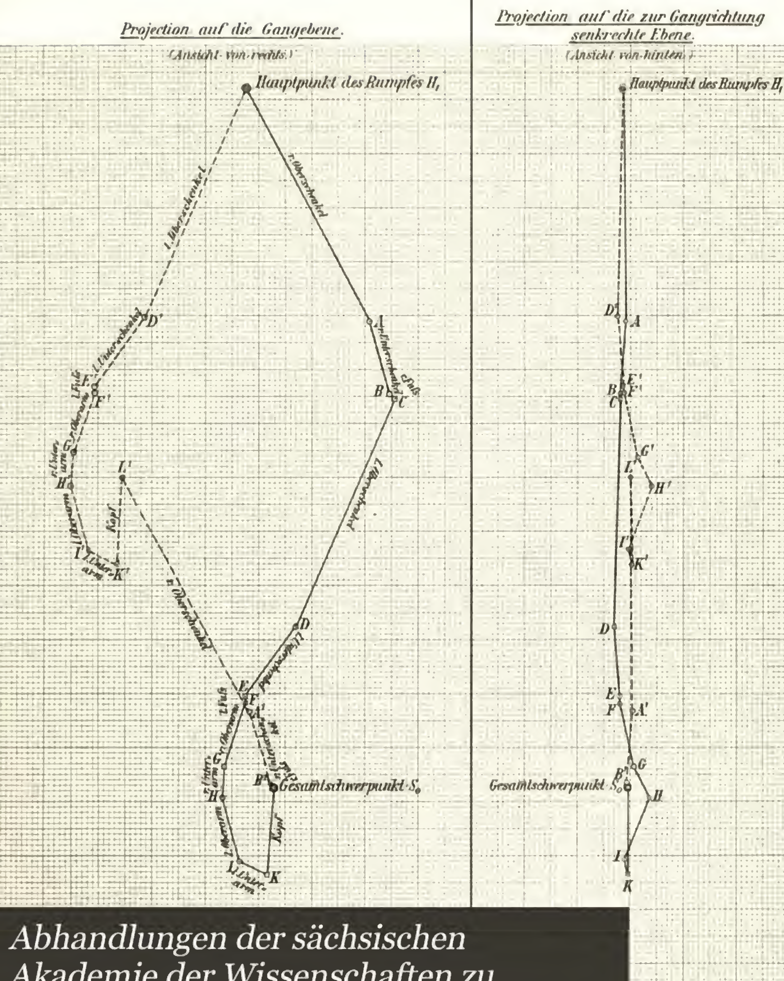
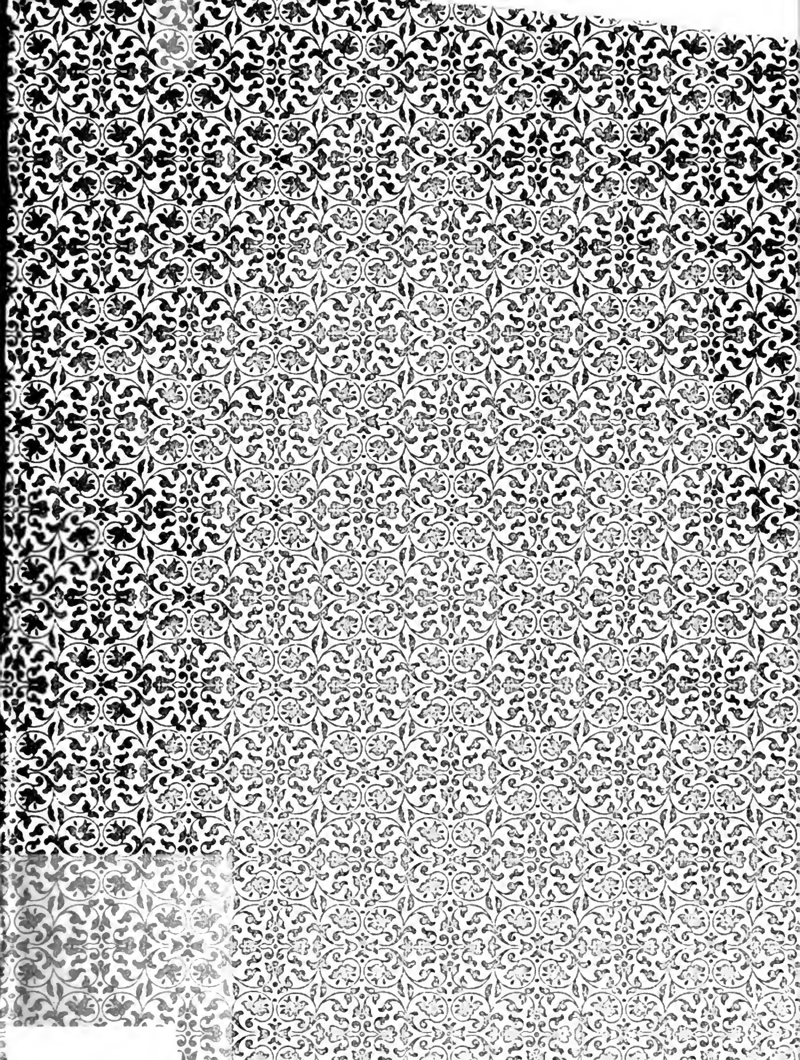


Abhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu ...

Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse



ABHANDLUNGEN

DREIUNDVIERZIGSTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



DREIUNDVIERZIGSTER BAND.

MIT 25 TAFELN UND 62 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1899.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



FÜNFUNDZWANZIGSTER BAND.

MIT 25 TAFELN UND 62 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1899.

INHALT.

DER

GANG DES MENSCHEN.

II. THEIL:

DIE BEWEGUNG DES GESAMMTSCHWERPUNKTES

UND

DIE ÄUSSEREN KRÄFTE

VON

OTTO FISCHER,

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIEDE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN.

Des XXV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ I.

MIT 12 TAFELN UND 5 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER

1899.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 5. December 1898.
Das Manuscript eingeliefert am 20. December 1898.
Der Abdruck vollendet am 18. März 1899.

DER

GANG DES MENSCHEN.

II. THEIL:

DIE BEWEGUNG DES GESAMMTSCHWERPUNKTES

UND

DIE ÄUSSEREN KRÄFTE

VON

OTTO FISCHER,

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIEDE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Durch die vor mehreren Jahren angestellten Versuche über den Gang des unbelasteten und belasteten Menschen ist dieser Bewegungsvorgang auf ein räumliches rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen worden.[1] Die hierbei erreichte Genauigkeit ist so gross, dass die Coordinatenbestimmung nicht nur eine bis in's Einzelnste gehende Darstellung der von den verschiedenen Punkten des menschlichen Körpers beschriebenen Bahnen ermöglicht, sondern auch den Ausgangspunkt für die Lösung vieler beim Gehen in Betracht kommenden Fragen bilden kann. So sind in der früheren Abhandlung als Beispiel bereits die Bahncurven von Gelenkmittelpunkten, des Kopfscheitelpunktes, der Fussspitze dargestellt worden. Es sind ferner die Drehungen und Deformationeu des Rumpfes ermittelt worden, soweit sie zurückgeführt werden können auf Drehungen der Hüftlinie, Schulterlinie und Rumpflinie, d. h. der Verbindungslinien der beiden Hüftgelenkmittelpunkte, der beiden Schultergelenkmittelpunkte und der Mitten von Hüftlinie und Schulterlinie.

Die grosse Genauigkeit brachte es mit sich, dass auch geringe Ungleichmässigkeiten im Verhalten der beiden Körperseiten an das Tageslicht kamen. So hatte sich beispielsweise herausgestellt, dass das Versuchsindividuum vor dem Aufsetzen des rechten Beins den ganzen Körper um einige Millimeter tiefer herunter senkt als vor dem Aufsetzen des linken Beins auf den Fussboden. Dieses asymmetrische Verhalten der beiden Beine kann nicht überraschen, wenn man beachtet, dass schon im Bau des menschlichen Körpers vollkommene Symmetrie gewiss nur

1) Der Gang des Menschen. I. Theil: Versuche am unbelasteten und belasteten Menschen, angestellt von Wilhelm Braune und Otto Fischer. Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Bd. XXI Nr. IV. 1895.

äusserst selten, vielleicht überhaupt nicht anzutreffen ist. Scheinbar genau symmetrisch und normal gebaute Menschen zeigen in ihren Knochen namhafte Längendifferenzen. Als wir seiner Zeit zum Zwecke der Bestimmung des Schwerpunktes die Längen der einzelnen Extremitätenabschnitte massen, fanden wir unter Anderen für die beiden Oberschenkel des gleichen Individuums Differenzen bis zu 1 cm.[1]) Und dabei hatten wir ganz besonders wohl gebaute und normal erscheinende Leichen ausgesucht. In entsprechender Weise ergaben sich auch Verschiedenheiten in der Lage des Schwerpunktes symmetrisch gelegener Glieder. Solche Abweichungen in den Dimensionen und der Massenvertheilung innerhalb der unteren Extremitäten bedingen selbstverständlich auch Verschiedenheiten im Verhalten der Beine beim Gehen. Es lässt sich daher voraussagen, dass wohl bei den meisten Menschen eine genaue Untersuchung des Ganges derartige Asymmetrien aufdecken wird, wie wir sie bei unserem Versuchsindividuum vorgefunden haben. Da unser Mann Soldat gewesen war, ausserdem einen sehr gleichmässigen Körperbau aufwies (man vergleiche die Abbildungen in der oben angeführten Schwerpunktsarbeit, welche unser für die Untersuchung des Ganges verwendetes Versuchsindividuum in verschiedenen Stellungen zeigen) und einen scheinbar sehr regelmässigen Gang besass, so ist anzunehmen, dass die bei ihm vorgefundenen Asymmetrien dem Grade nach nicht grösser sind als bei vielen anderen Menschen mit scheinbar normalem Gang. Da ferner auch später weder mir selbst, noch Anderen es möglich gewesen ist, die durch die eingehende Untersuchung aufgedeckten Asymmetrien in der Bewegung beider Körperseiten bei directer Beobachtung des Ganges unseres Versuchsindividuums zu erkennen, so wäre unser an und für sich sehr berechtigter und begreiflicher Wunsch, für unsere Versuche ein Individuum mit möglichst normalem Verhalten auszuwählen, nur dadurch zu erfüllen gewesen, dass wir die mühsamen und so ungeheuer zeitraubenden Aufnahmen, Messungen und Berechnungen in gleicher Weise auf eine grosse Reihe von Menschen erstreckt und dann diejenige Serie für die weitere Untersuchung ausgewählt hätten,

1) vgl. W. Braune und O. Fischer, Ueber den Schwerpunkt des menschlichen Körpers. Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Bd. XV Nr. VII. 1889.

welche die grösste Symmetrie aufwies. So lange diese grosse Arbeit nicht gethan ist, muss man sich damit begnügen, aus den Resultaten der Messung an dem einen Individuum unter Berücksichtigung der für beide Körperseiten übereinstimmenden Ergebnisse die wahrscheinlichste Norm abzuleiten.

Schon die wenigen im I. Theil dieser Untersuchung angeführten Beispiele lassen erkennen, dass die Unterschiede in dem Verhalten beider Körperseiten sich hauptsächlich auf die Ausdehnung, in äusserst geringem Maasse aber auf die Art der Bewegung beziehen, dass vielmehr in letzterer Hinsicht so gut wie vollständige Uebereinstimmung zwischen beiden Seiten besteht. Diese Thatsache findet sich auch durch die Ergebnisse des vorliegenden II. Theiles der Untersuchung durchweg bestätigt. Daraus ergibt sich, dass man bei der Ableitung der Norm des Gehens fast nur Fehler hinsichtlich der räumlichen Ausdehnung der einzelnen Bewegungsabschnitte begehen kann. In diesem Punkte werden im Allgemeinen auch die Gehbewegungen verschiedener Individuen von einander abweichen. Die Aufeinanderfolge und Art der einzelnen Gliederbewegungen ist aber für alle Menschen nahezu die gleiche. Dies geht schon daraus hervor, dass bei allen Menschen dieselben Arten von Kräften wirksam sind, um die Bewegung zu erzeugen; denn es ist wohl als sicher anzunehmen, dass selbst bei grossen individuellen Verschiedenheiten im Gange doch die gleichen Muskelgruppen in Thätigkeit treten. Es werden daher die aus den Versuchen an einem einzelnen Individuum gewonnenen Resultate über die Mechanik des Gehens und der Gehwerkzeuge nicht blos individuelle, sondern wenigstens in qualitativer Hinsicht allgemeine Gültigkeit besitzen.

So viel über die Verwendbarkeit der in dem I. Theile dieser Untersuchung mitgetheilten Versuchsreihen zur weiteren Analyse der Gehbewegung. —

Die selbständige Fortbewegung des menschlichen Körpers beim Gehen, Laufen, Springen oder irgend einer anderen Locomotionsart geschieht unter der Einwirkung theils innerer theils äusserer Kräfte. Als innere Kräfte, welche im Körper selbst erzeugt werden, kommen vor allen Dingen Muskelkräfte und elastische Zug- und Druckspannungen von Sehnen, Bändern und Gelenkknorpeln in Frage. Als äussere Kräfte wirken die Anziehungskraft der Erde, der Gegendruck des Bodens, die Reibung am Boden und

der Widerstand der Luft. Während z. B. beim Fliegen der Vögel Gegendruck und Reibung des Bodens ganz in Wegfall kommen, und dafür dem Widerstand der Luft eine Hauptrolle bei der Fortbewegung zufällt, ist der Einfluss des Luftwiderstandes auf das Gehen des Menschen von untergeordneter Bedeutung. Er ist bei unbewegter Luft oder Gegenwind sogar der Fortbewegung hinderlich, und kann dieselbe nur dann unterstützen, wenn eine Luftströmung in der Richtung des Ganges vorhanden ist, deren Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit des Gehens übertrifft.

Würden gar keine äusseren Kräfte wirksam sein, so könnte der Mensch wohl durch die Contraction seiner Muskeln die Haltung ändern, es wäre ihm aber jeder Einfluss auf die Fortbewegung seines Körpers unmöglich gemacht. Befände er sich in Ruhe, etwa frei im Raume schwebend, so würde alle Muskelanstrengung seinen Gesammtschwerpunkt auch nicht um einen Millimeter im Raume verrücken können. Wäre ihm dagegen durch irgend welche äussere Ursache eine Bewegung seines Schwerpunktes aufgezwungen, so würde er sich nach dem Aufhören dieser äusseren Einwirkung im Raume so weiter fortbewegen, dass sein Gesammtschwerpunkt dabei eine geradlinige Bahn mit constanter Geschwindigkeit durchläuft, ohne dass irgend welche Gliederbewegungen infolge von Muskelcontractionen an diesem Zustand etwas zu ändern vermöchten.

Käme von den äusseren Kräften nur die Reibung in Wegfall, wie es beim Gang auf einer vollkommen glatten Fläche thatsächlich der Fall wäre, so würde eine selbständige Fortbewegung ebenfalls ausgeschlossen sein. Man wäre dann nur im Stande, durch willkürliche Muskelcontraction den Gesammtschwerpunkt seines Körpers innerhalb gewisser Grenzen von der Bodenfläche zu entfernen oder ihr zu nähern, und auf diese Weise die Bewegung zu modificiren, welche dem Körper etwa durch äussere Einwirkungen, die man nicht in der Gewalt hat, aufgezwungen ist.

Dies lässt sich leicht einsehen.

Für die Bewegung des Schwerpunktes gilt unter allen Umständen folgender fundamentale Satz. *Der Schwerpunkt eines Körpers oder eines Systems von Körpern, auf welche beliebige innere und äussere Kräfte einwirken, bewegt sich stets so, als ob alle Massen in ihm vereinigt wären und alle äusseren Kräfte direct an ihm selbst angriffen.* Die

inneren Kräfte üben keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunktes aus, weil sie immer paarweise entgegengesetzt gleich sind.

Steht z. B. ein Mensch auf einer vollkommen ebenen und horizontalen reibungslosen Bodenfläche still, was nur möglich ist, wenn seine Schwerlinie die Unterstützungsfläche[1]) trifft, so übt er mit seinen Füssen normal gegen den Boden einen Druck aus, dessen Gesammtgrösse gleich dem Gewicht seines Körpers ist. Dieser Druck wird sich im Allgemeinen auf mehrere Stellen der Füsse vertheilen. Die Bodenfläche wird nun, wenn sie nur starr und unnachgiebig ist, ihrerseits rückwärts, also vertical nach oben gegen die Füsse drücken. Nach dem Princip der Gleichheit von Action und Reaction wird dieser Gegendruck des Bodens eine Gesammtgrösse besitzen, welche genau gleich dem Gewicht des Körpers ist. Dabei ist derselbe als äussere Kraft aufzufassen. Der Gesammtschwerpunkt des menschlichen Körpers unterliegt daher in diesem Falle nach dem obigen Satze der Einwirkung zweier Kräfte, nämlich der Schwere und des Gegendruckes des Bodens. Da die beiden Kräfte gleich gross aber entgegengesetzt gerichtet sind, so heben sie sich gegenseitig auf und können dem Schwerpunkt keine Bewegung ertheilen.

Beim Gebrauch seiner Muskeln hat man es nun in der Gewalt, den Druck auf den Boden zu verändern. Durch Streckung in den Knie- und Hüftgelenken wird man ihn beispielsweise in vielen Fällen vergrössern, durch Beugung verringern, durch rasche Beugung sogar unter Umständen ganz aufheben können. Dabei braucht er jetzt nicht mehr vertical, also normal gegen die Bodenfläche gerichtet zu sein. Nehmen wir aber zunächst einmal an, dass die Muskelcontractionen so abgemessen würden, dass auch der veränderte Druck gegen den Boden noch vertical gerichtet ist. In demselben Maasse, wie der Druck sich vergrössert oder verringert, wird der Gegendruck des Bodens gegen die Füsse sich ändern. Der Schwerpunkt des Körpers wird infolgedessen jetzt nicht mehr der Einwirkung zweier entgegengesetzt gleichen Kräfte unterliegen, die sich aufheben, und er wird daher in Bewegung

1) Ueber den Begriff der «Schwerlinie» und der «Unterstützungsfläche» vergleiche man die oben angeführte Abhandlung «Ueber den Schwerpunkt des menschlichen Körpers» Seite 561 und 562.

gesetzt werden. Da die resultirende Kraft, welche auf den Schwerpunkt einwirkt, immer noch vertical gerichtet ist, so wird auch die Bewegung des Schwerpunktes nur in einer Verticalen stattfinden können, in dem einen Falle nach oben, im anderen nach unten. Ist der Druck auf den Boden ganz aufgehoben, so wird der Schwerpunkt die gleiche Bewegung nach unten wie beim freien Fall annehmen.

Wenn der Druck gegen den Boden nicht mehr normal, sondern schräg stattfindet, so kann man ihn in zwei Componenten, eine verticale und eine horizontale, zerlegt denken. Nur die verticale Componente wirkt thatsächlich als Druck auf den Boden und gibt Veranlassung zu einem entgegengesetzt gleichen Gegendruck. Die horizontale Componente wird dagegen die Füsse auf der Bodenfläche fortschieben, so lange keine Reibung vorhanden ist, welche diesen Bewegungsantrieb vernichtet. Wie auch diese Bewegung der Füsse beschaffen sein mag, in keinem Falle kann bei vollkommen glatter Bodenfläche durch dieselbe der Schwerpunkt des Körpers aus seiner Verticalen herausgebracht werden, weil keine äusseren Kräfte hervorgerufen werden, deren Richtung von der Verticalen abweicht. Dagegen kann sehr leicht der Fall eintreten, dass die Schwerlinie aus der Unterstützungsfläche heraustritt; dann ändern sich momentan die Druckverhältnisse in der Weise, dass der Schwerpunkt jetzt so lange vertical nach unten fällt, bis wieder andere Theile des Körpers eine geeignete Unterstützung darbieten. Auf diesen mechanisch sehr interessanten Vorgang, dass mit dem Heraustreten der Schwerlinie aus der Unterstützungsfläche der Druck auf den Boden herabsinkt, so dass der Schwerpunkt nach unten fallen muss, hier weiter einzugehen, würde zu sehr von dem eigentlichen Gegenstand abführen.

Ist die Bodenfläche zwar eben, aber nicht mehr horizontal, so wird der durch die Schwere verursachte Druck gegen den Boden kleiner als das Gewicht des Körpers sein, denn es wirkt nur die zur Bodenfläche normale Componente der verticalen Schwerkraft als Druck. Die in die Bodenfläche selbst hineinfallende Componente wird dagegen in diesem Falle bei Abwesenheit jeglicher Reibung den ganzen Körper die schiefe Ebene hinabtreiben. Dabei findet die Bewegung des Schwerpunktes in der Richtung der zweiten Componente statt. Durch die Thätigkeit der Muskeln kann nun an dieser Bewegung des Schwerpunktes

wiederum nichts geändert werden, so lange die Bodenfläche nur vollkommen glatt ist. Dagegen ist man in der Lage, auch in diesem Falle die Entfernung des Schwerpunktes von der Bodenfläche innerhalb bestimmter, durch die Dimensionen des Körpers gesetzter Grenzen willkürlich zu ändern. Man hat es nämlich auch jetzt noch in der Gewalt, den Normaldruck gegen den Boden zu vergrössern oder zu verkleinern, und dadurch den Gegendruck des Bodens von der normal gegen den Boden gerichteten Componente der Schwerkraft verschieden zu machen. Jenachdem diese letztere von dem Gegendruck übertroffen wird oder ihn selbst übertrifft, wird der Schwerpunkt sich von der Bodenfläche mehr entfernen oder derselben näher kommen. An seiner Bewegungscomponente parallel der Bodenfläche wird hierdurch nichts geändert.

Die wenigen Beispiele werden zur Genüge erkennen lassen, dass ohne Reibung willkürliche Fortbewegung des menschlichen Körpers nicht möglich ist. Sie zeigen gleichzeitig, in welcher Weise die Reibung in die Bewegung eingreift. Es ist schon oben angeführt worden, dass man durch Muskelcontraction nicht allein die Grösse des Drucks auf die Bodenfläche, sondern auch dessen Richtung willkürlich verändern kann. Würde unser Körper so eingerichtet sein, dass wir bei allen Gliederbewegungen immer nur einen Druck auf den Boden ausüben könnten, der gegen diesen normal gerichtet ist, so würde alle Reibung am Boden uns für die Locomotion nichts nützen können. Dieselbe wird erst in Anspruch genommen, wenn der Druck schräg gegen den Boden gerichtet ist und infolgedessen eine Componente parallel der Bodenfläche besitzt. Dieser Componente wird dann bei genügender Rauhigkeit des Bodens durch die Reibung das Gleichgewicht gehalten. Der Effect der Reibung ist dabei genau der gleiche wie der des Gegendruckes in normaler Richtung. Sie wirkt wie eine äussere Kraft, welche entgegengesetzt gleich der parallel der Bodenfläche verlaufenden Druckcomponente ist. Diese Kraft soll im Folgenden immer kurz als „Reibungskraft“ bezeichnet sein. Durch sie wird einmal das Ausgleiten der Füsse verhindert, und dann erhält der Schwerpunkt des Körpers gleichzeitig einen Bewegungsantrieb in der Richtung der Reibungskraft. Es kann also bei geeigneter Contraction der Muskeln der Schwerpunkt des Körpers durch Vermittelung der Reibung parallel der Bodenfläche fortbewegt, oder, wenn er schon in Bewegung war, ihm eine Be-

schleunigung bezüglich Verzögerung oder eine Aenderung seiner Bewegungsrichtung, oder beides zugleich, ertheilt werden.

Was endlich den Luftwiderstand anlangt, so ist schon oben angeführt worden, dass er beim Gang des Menschen im geschlossenen Raume, wo keine merklichen Luftströmungen vorhanden sind, der Fortbewegung entgegenwirkt, und zwar um so mehr, je grösser die Geschwindigkeit der Bewegung des menschlichen Körpers ist. Da es beim Gehen nur in der Richtung des Fortschreitens zu namhaften Geschwindigkeiten kommt, so wird man in erster Annäherung die Wirkung des Luftwiderstandes als die einer äusseren Kraft auffassen können, deren Richtung der Bodenfläche parallel läuft und der Gangrichtung entgegengesetzt ist.

So theilen sich denn die äusseren Kräfte in bestimmter Weise in die Rolle, den Schwerpunkt des menschlichen Körpers fortzubewegen. Setzt man, wie es bei unseren Versuchen der Fall war, eine horizontale Bodenfläche voraus, so wird jede Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung des Schwerpunktes in verticaler Richtung dem Zusammenwirken von Schwere und normalem Gegendruck des Bodens, in horizontaler Richtung dagegen dem Zusammenwirken von Reibungskraft und Luftwiderstand zuzuschreiben sein. Dadurch, dass wir Gegendruck des Bodens und Reibungskraft innerhalb bestimmter Grenzen vermittelst unserer Muskeln variiren können, sind wir im Stande, unserem Körper sowohl die Richtung als auch die Geschwindigkeit des Ganges willkürlich aufzuzwingen.

Kennt man nun die genaue Bewegung des Gesammtschwerpunktes im Raume beim Gehen, indem man mindestens während eines Doppelschrittes Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung desselben für jeden Moment festgestellt hat, so ist man in der Lage, die Grössen von normalem Gegendruck, Reibungskraft und Luftwiderstand für den ganzen Ablauf der Bewegung zu berechnen. Die Kenntniss von Gegendruck und Reibungskraft wird dann weiterhin den Ausgangspunkt für die Beurtheilung der Thätigkeit der hauptsächlich beim Gehen in Frage kommenden Muskelgruppen bilden können. Allerdings wird man sich zu dem letzteren Zwecke erst noch mit Hülfe der räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte eine eingehende Kenntniss der während eines Doppelschrittes stattfindenden Gelenkbewegungen verschaffen müssen.

Die vorliegende Abhandlung soll nun der Bestimmung der Bewegung des Schwerpunktes im Raume und der dabei thätigen

äusseren Kräfte gewidmet sein. In einem ersten Abschnitt sollen die verschiedenen Methoden der Bestimmung der Bahn des Schwerpunktes auseinander gesetzt werden. Ein zweiter Abschnitt wird sich dann mit der Berechnung der Coordinaten der Schwerpunktsbahn und ein dritter Abschnitt mit der Ableitung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Bewegung des Schwerpunktes zu beschäftigen haben. In einem vierten und letzten Abschnitte sollen endlich aus diesen Daten die äusseren Kräfte berechnet werden, welche die Bewegung des Schwerpunktes hervorgebracht haben.

I. Ueber die Methoden der Bestimmung der Schwerpunktsbahn.

Von der Bahn, welche der Gesammtschwerpunkt des menschlichen Körpers beim Gehen im Raume beschreibt, lassen sich auf Grund der im I. Theil dieser Arbeit mitgetheilten Messungen so viel Punkte gewinnen als Bewegungsphasen auf ihre Coordinaten untersucht worden sind. Diese Punkte liegen so nahe aneinander, dass durch sie die ganze Schwerpunktsbahn vollkommen eindeutig bestimmt ist.

Es gibt zunächst zwei verschiedene Methoden, um zu dem Ort des Gesammtschwerpunktes im Raume für eine bestimmte Bewegungsphase zu gelangen: Man geht entweder von den Schwerpunkten oder von den Hauptpunkten der einzelnen Körpertheile aus. In jedem Falle kann man dann noch dreierlei Wege beschreiten. Man kann den Gesammtschwerpunkt entweder auf rein geometrischem Wege, durch Construction, darstellen, oder man kann aus den Coordinaten der Gelenkmittelpunkte die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes berechnen. Endlich kann man einen Mechanismus zusammensetzen, welcher die Lage des Gesammtschwerpunktes für jede Stellung des menschlichen Körpers selbstthätig angibt.

A. Bestimmung der Schwerpunktsbahn aus den Schwerpunkten der einzelnen Abschnitte des menschlichen Körpers.

Da wir für die Untersuchung des Ganges den menschlichen Körper aus 12 verschiedenen Abschnitten zusammengesetzt annahmen, so sind zunächst die Einzelschwerpunkte dieser 12 Abschnitte zu ermitteln, und dann dieselben zu dem Gesammtschwerpunkte zu vereinigen.

Der Ort der beiden Fussschwerpunkte ist direct durch die photographische Aufnahme festgelegt worden. Die Lage der übrigen

Einzelschwerpunkte muss dagegen für jede Bewegungsphase aus der Stellung der Gelenkmittelpunkte abgeleitet werden, und zwar auf folgende Weise. Die oben angeführte Untersuchung über die Lage der Schwerpunkte im menschlichen Körper hatte ergeben, dass der Schwerpunkt des Oberschenkels, Unterschenkels und Oberarms bei Menschen von der Gestalt unseres Versuchsindividuums mit grosser Annäherung in der Längsaxe des Gliedes, d. h. in der Linie, welche die Mittelpunkte der beiden das Glied begrenzenden Gelenke verbindet, liegt, und dass er die Strecke zwischen den beiden Gelenkmittelpunkten in einem bestimmten, für alle Individuen von ähnlicher Gestalt gleichen Verhältniss theilt.

Es verhält sich nämlich der Abstand des Schwerpunktes vom proximalen Gelenkmittelpunkt zu dem vom distalen Gelenkmittelpunkt beim Oberschenkel wie 0,44 : 0,56, beim Unterschenkel wie 0,42 : 0,58 und beim Oberarm wie 0,47 : 0,53 (vgl. Seite 622 der Schwerpunktsarbeit). Ferner liegt beim System Unterarm + Hand, wenn die Hand sich in mittlerer Pronationsstellung befindet, der gemeinsame Schwerpunkt ebenfalls in der Längsaxe des Unterarms. Das Verhältniss zwischen seinen Abständen vom Ellbogengelenkmittelpunkt und Handgelenkmittelpunkt beträgt 0,66 : 0,34, wie man aus den auf Seite 619 und 620 der Schwerpunktsarbeit angegebenen Maassen für Cadaver III und Cadaver IV im Mittel ableitet. Für den Rumpf hatte die Messung an dem, unserem Versuchsindividuum am nächsten stehenden Cadaver IV ergeben, dass der Schwerpunkt bei aufrechter Haltung nahezu in der Verbindungslinie der Mitten der Hüft- und Schulterlinie liegt, welche im ersten Theile dieser Arbeit als Rumpflinie bezeichnet worden ist. Sein Abstand von der Hüftlinie betrug 25,8 cm (Seite 628), während Hüftlinie und Schulterlinie 49 cm von einander entfernt waren (Seite 595). Demnach verhält sich die Entfernung des Rumpfschwerpunktes von der Mitte der Hüftlinie zu der von der Mitte der Schulterlinie wie 0,53 : 0,47. Da ferner der Abstand des Rumpfschwerpunktes vom Mittelpunkt des Atlantooccipitalgelenks 40,2 cm betrug (Seite 628), und der letztere annähernd in der Verlängerung der Rumpflinie liegt, so theilt der Rumpfschwerpunkt die Strecke zwischen dem Mittelpunkt der Hüftlinie und dem Mittelpunkt des Atlantooccipitalgelenks im Verhältniss 0,39 : 0,61. Die Kenntniss der zuletzt angeführten Maasse kann man gleichzeitig benutzen, um die Lagen des Mittelpunktes vom

Atlantooccipitalgelenk, welche nicht bei den Aufnahmen des Ganges mit gewonnen worden sind, hinterher wenigstens annähernd für die verschiedenen Bewegungsphasen festzustellen. Man hat zu diesem Zwecke nur auf der nach oben verlängerten Rumpflinie einen Punkt aufzusuchen, dessen Entfernung von der Mitte der Schulterlinie sich zu dem Abstand zwischen Schulter- und Hüftlinienmitte wie 17 : 49 oder 0,35 : 1 verhält. Was endlich die Bestimmung des Kopfschwerpunktes anlangt, so kann man zwei Wege einschlagen, welche zwar beide gleich ungenau sind, aber doch mit genügender Annäherung die Lage des Kopfschwerpunktes ermitteln lassen, da beide den nicht sehr weit von demselben entfernten Kopfscheitelpunkt benutzen. Man kann entweder annehmen, der Kopfschwerpunkt liegt auf der Verbindungslinie des Kopfscheitelpunktes mit dem Mittelpunkt des Atlantooccipitalgelenks; dann ergeben Messungen an den Photogrammen der Schwerpunktsarbeit, dass er diese Strecke im Verhältniss 0,26 : 0,74 theilt, und zwar so, dass er dem Atlantooccipitalgelenk näher liegt als dem Scheitelpunkt des Kopfes. Oder man nimmt ihn auf der Verbindungslinie des Mittelpunktes der Schulterlinie mit dem Kopfscheitelpunkte an; dann ergeben Messungen an jenen Photogrammen in Verbindung mit den photographischen Aufnahmen des Ganges im I. Theil dieser Arbeit, dass sein Abstand vom Mittelpunkt der Schulterlinie sich zu dem vom Kopfscheitelpunkt beim I. und II. Versuch wie 0,70 : 0,30, beim III. Versuch dagegen wie 0,68 : 0,32 verhält. Ein Unterschied zwischen dem letzten und den beiden ersten Versuchen hat sich deshalb herausgestellt, weil infolge der starken Belastung beim III. Versuch die Schultern etwas anders gestellt waren als bei den Versuchen ohne Belastung. Wenn auch diese beiden Bestimmungen des Kopfschwerpunktes an Genauigkeit hinter denen der übrigen Schwerpunkte zurückstehen, so werden sie doch genügend genau die Gestalt der Bahn des Kopfschwerpunktes ergeben. Die etwaigen Fehler sind ja doch für alle Bewegungsphasen nahezu dieselben; sie werden daher höchstens eine kleine Verschiebung dieser Bahn im Raume, nicht aber eine Deformation derselben bedingen. Man würde gewiss schon genügend genau sein, wollte man die Gestalt der Bahn des Schwerpunktes mit der des Scheitelpunktes des Kopfes identificiren und die letztere nur um so viel nach abwärts bezüglich rückwärts verschieben, als es die relative Lage des Kopfschwerpunktes zum

Kopfscheitelpunkte verlangt. Durch jede der beiden oben angeführten Bestimmungsarten wird man aber immer noch genauere Angaben erzielen, da man bei ihnen ausserdem den Bewegungen des Kopfes relativ zum Rumpfe etwas Rechnung trägt. Da die Bestimmung des Kopfschwerpunktes im vorliegenden Falle nur dazu helfen soll, den Gesammtschwerpunkt des Körpers aufzusuchen, so würden selbst grössere Fehler, als sie den angeführten Bestimmungen anhaften, infolge der relativ kleinen Masse des Kopfes keinen nennenswerthen Einfluss auf die Bahn des Gesammtschwerpunktes ausüben.

Die angeführten Verhältnisszahlen und die Linien, auf denen die einzelnen Schwerpunkte der Körperabschnitte zu suchen sind, geben nun das Mittel an die Hand, die Coordinaten aller 12 Einzelschwerpunkte zu bestimmen, und die Schwerpunkte selbst in die Projectionen der einzelnen Bewegungsphasen auf Tafel X und XI des I. Theiles dieser Untersuchung einzutragen. Denn wenn auch die Längsaxen der Glieder in der Projection im Allgemeinen verkürzt erscheinen, so werden doch auch in der Projection die Schwerpunkte dieselben in den angegebenen Verhältnissen theilen.

Nachdem auf diese Weise die Bahnen der 12 Einzelschwerpunkte ermittelt sind, kann man dazu übergehen, für jede Bewegungsphase die Schwerpunkte der 12 Körperabschnitte zu dem Gesammtschwerpunkte zusammen zu setzen. Durch die Rechnung lässt sich dies auf einmal erreichen (vgl. Seite 19). Bei der Construction muss man schrittweise vorgehen. Man setzt erst zwei Schwerpunkte zu dem gemeinsamen Schwerpunkte zusammen, vereinigt dann diesen mit einem dritten u. s. w. Die Reihenfolge, welche man dabei einhält, ist an und für sich gleichgültig. Da jedoch die Schwerpunkte bestimmter Systeme, wie z. B. des Systems Unterschenkel + Fuss oder der ganzen unteren Extremitäten, der oberen Extremitäten, des Systems Rumpf + Kopf u. s. w. ihre besondere Bedeutung für die Analyse des ganzen Bewegungsvorganges besitzen, so ist es zweckmässig, die Zusammensetzung in folgender Ordnung vorzunehmen. Man setzt zuerst auf beiden Seiten die Schwerpunkte des Oberarms und des Systems Unterarm + Hand zum Schwerpunkt des ganzen Armes zusammen, dann die vom Rumpf und Kopf zum Schwerpunkte des Systems Rumpf + Kopf. Weiter verschafft man sich den Gesammtschwerpunkt für beide Arme und vereinigt diesen mit dem Schwerpunkt

des Systems Rumpf + Kopf zu dem Schwerpunkte des ganzen Körperabschnittes, welcher von den beiden Beinen getragen wird. Ferner setzt man zunächst für jede Körperseite die Schwerpunkte des Unterschenkels und Fusses zum Schwerpunkt vom System Unterschenkel + Fuss zusammen, und vereinigt darauf diesen letzteren mit dem Schwerpunkt des Oberschenkels zum Schwerpunkt des ganzen Beins. Endlich verschafft man sich wieder den Gesammtschwerpunkt für beide Beine und vereinigt denselben mit dem vorher gewonnenen Schwerpunkt des Systems Rumpf + Kopf + beide Arme zum Gesammtschwerpunkte des ganzen Körpers.

Um diese Zusammensetzungen der Schwerpunkte vornehmen zu können, braucht man nur die Verhältnisse der einzelnen Massen zu kennen. Dieselben finden sich für den Cadaver IV, welcher unserem Versuchsindividuum entsprach, auf Seite 612 der Schwerpunktsarbeit niedergelegt. Da in der vorliegenden Arbeit öfter von ihnen Gebrauch gemacht wird, so sollen sie an dieser Stelle noch einmal angeführt werden, und zwar in etwas anderer Form. Setzt man nämlich die Masse des ganzen Körpers gleich 1, so kommen den einzelnen Körperabschnitten folgende Verhältnisszahlen zu:

Kopf	0,07055	Rumpf + Kopf	0,49755
Rumpf	0,4270	Unterschenkel + Fuss	0,07055
Oberschenkel	0,1158	Ganzes Bein	0,18635
Unterschenkel	0,052675	Ganzer Arm	0,064875
Fuss	0,017875	Beide Beine	0,3727
Oberarm	0,03365	Beide Arme	0,12975
Unterarm + Hand	0,031225	Rumpf + Kopf + beide Arme	0,6273

Der gemeinsame Schwerpunkt zweier Massen liegt nun bekanntlich auf der Verbindungslinie der Einzelschwerpunkte und theilt dieselbe im umgekehrten Verhältniss dieser Massen. Man findet demnach den Schwerpunkt eines Armes, indem man die Verbindungslinie der Schwerpunkte des Oberarms und des Systems Unteram + Hand im Verhältniss 0,031225 : 0,03365 oder, was für die Construction zweckmässiger ist, im Verhältniss 0,481 : 0,519 theilt. Der Schwerpunkt des Systems Rumpf + Kopf theilt die Verbindungslinie der Schwerpunkte des Rumpfes und Kopfes im Verhältniss 0,142 : 0,858, der Schwerpunkt des Systems Unterschenkel + Fuss die Verbindungslinie der Schwerpunkte des Unter-

schenkels und des Fusses im Verhältniss 0,253 : 0,747, und der Schwerpunkt eines Beins die Verbindungslinie der Schwerpunkte des Oberschenkels und des Systems Unterschenkel + Fuss im Verhältniss 0,379 : 0,621. Der Gesammtschwerpunkt beider Arme liegt natürlich stets in der Mitte der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Arme, und der Gesammtschwerpunkt für beide Beine halbirt die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der beiden Beine. Um nun weiterhin den Schwerpunkt des Systems Rumpf + Kopf + beide Arme zu finden, hat man die Verbindungslinie des Schwerpunktes des Systems Rumpf + Kopf und des Gesammtschwerpunktes beider Arme im Verhältnis 0,207 : 0,793 zu theilen. Der Gesammtschwerpunkt des ganzen Körpers liegt endlich auf der Verbindungslinie des Schwerpunktes des Systems Rumpf + Kopf + beide Arme und des Gesammtschwerpunktes für beide Beine und theilt dieselbe im Verhältniss 0,373 : 0,627.

So hat man denn alle Mittel an der Hand, um entweder aus Projectionen des Ganges von der Art, wie sie z. B. für den I. und II. Versuch auf den Tafeln X und XI des I. Theils der Untersuchung niedergelegt sind, durch Construction, oder aus den Coordinaten der Gelenkmittelpunkte durch Rechnung, oder endlich mit Hülfe eines geeigneten Mechanismus für jede Bewegungsphase den Ort des Gesammtschwerpunktes des Körpers und gleichzeitig die Lage der Schwerpunkte einzelner wichtiger Körperabschnitte festzustellen.

Was zunächst die Construction anlangt, so ist dabei zu beachten, dass die oben angegebenen Verhältnisszahlen natürlich auch für die Projectionen der Verbindungsstrecken einzelner Schwerpunkte gelten. Hat man nun an zwei verschiedenen Projectionen diese Construction ausgeführt, so hat man damit zwei Projectionen der verschiedenen Schwerpunktsbahnen gewonnen, welche vollständig ausreichen, um den Verlauf dieser im Allgemeinen doppelt gekrümmten Curven im Raume zu erkennen. Beziehen sich insbesondere die beiden Projectionen auf die Gangebene und die horizontale Bodenfläche, wie auf Tafel X und XI des I. Theils, so kann man aus ihnen die drei räumlichen Coordinaten des Gesammtschwerpunktes und der partiellen Schwerpunkte direct ablesen. Die dabei erzielte Genauigkeit ist um so grösser, je grösser der Maassstab der Projectionen ist. Es empfiehlt sich daher, dieselben zum Zwecke der Construction

noch besonders in ganzer oder doch mindestens halber Lebensgrösse aufzuzeichnen.

Will man auf dem Wege der Rechnung zu den Coordinaten des Gesammtschwerpunktes gelangen, so hat man zunächst die Coordinaten der Einzelschwerpunkte zu ermitteln. Zu diesem Zwecke hat man sich beim Oberschenkel, Unterschenkel und Oberarm aus den Tabellen 10, 11 und 12 auf den Seiten 258 bis 263 des I. Theils der Untersuchung über den Gang des Menschen die Differenzen entsprechender Coordinaten des distalen und proximalen Gelenkmittelpunktes zu verschaffen, dieselben bezüglich mit 0,44; 0,42 und 0,47 zu multipliciren (vgl. S. 13), und die in dieser Weise verkleinerten Differenzen bei jedem der drei Körpertheile zu den Coordinaten des proximalen Gelenkmittelpunktes zu addiren. Um die Coordinaten des Schwerpunktes vom System Unterarm + Hand zu erhalten, hat man die Differenzen entsprechender Coordinaten des Hand- und Ellbogengelenkmittelpunktes mit 0,66 zu multipliciren und zu den Coordinaten des Mittelpunktes vom Ellbogengelenk zu addiren. Die Coordinaten des Rumpfschwerpunktes gewinnt man, indem man die Differenzen entsprechender Coordinaten der Schulter- und Hüftlinienmitte mit 0,53 multiplicirt und zu den Coordinaten des Mittelpunktes der Hüftlinie addirt. Endlich erhält man aus den in den Tabellen 10, 11 und 12 des I. Theils niedergelegten Coordinaten des Kopfscheitelpunktes und der Schulterlinienmitte die Coordinaten des Kopfschwerpunktes, indem man ihre Differenzen beim I. und II. Versuch mit 0,70, beim III. Versuch mit 0,68 multiplicirt und dann zu den Coordinaten der Schulterlinienmitte addirt. Die Coordinaten des Fussschwerpunktes finden sich schon in jenen Tabellen angegeben.

Aus den auf diese Weise berechneten Coordinaten der Einzelschwerpunkte kann man nun auf zwei Wegen zu den Coordinaten des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers gelangen.

Der einfachste Weg ist der, dass man die gleichnamigen Coordinaten der 12 Einzelschwerpunkte mit den zu dem betreffenden Körpertheil gehörenden Verhältnisszahlen, welche sich auf Seite 16 vorfinden, multiplicirt und alle 12 Producte algebraisch summirt. Nummerirt man die 12 Körpertheile in bestimmter Weise und bezeichnet dann mit x_i, y_i, z_i die drei Coordinaten des Schwerpunktes und mit μ_i die Zahl für das Massenverhältniss des

mit der Nummer i versehenen Körpertheils, so hat man demnach zur Berechnung der drei Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Gesammtschwerpunktes die Formeln:

$$x_0 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \cdots\cdots\cdots + \mu_{12} x_{12} = \sum_1^{12} \mu_i x_i ,$$

$$y_0 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 \cdots\cdots\cdots + \mu_{12} y_{12} = \sum_1^{12} \mu_i y_i ,$$

$$z_0 = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 \cdots\cdots\cdots + \mu_{12} z_{12} = \sum_1^{12} \mu_i z_i .$$

Diese Formeln sind deshalb einfacher und für die Berechnung bequemer als die ihnen entsprechenden der Schwerpunktsarbeit auf Seite 606, weil bei ihnen nicht die Massen selbst, sondern nur die Verhältnisszahlen für dieselben verwendet sind. Da der Gesammtmasse des Körpers hierbei die Verhältnisszahl 1 zukommt, so fällt der Nenner aus den früheren Formeln fort.

Man kann nun die Rechnung auch so gestalten, dass sie sich eng an die Construction des Gesammtschwerpunktes aus den Einzelschwerpunkten anschliesst. Wenn auch dieser Weg beschwerlicher ist als der eben geschilderte, so bietet er doch den Vortheil, dass man beim Beschreiten desselben nicht nur die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes, sondern auch gleichzeitig die Coordinaten von Schwerpunkten einiger wichtiger Körpersysteme, wie der ganzen Extremitäten oder des von den Beinen getragenen, aus Rumpf, Kopf und den beiden Armen bestehenden Körperabschnittes u. a. gewinnt. Die Rechnung verwendet dabei am besten die oben angegebenen Verhältnisszahlen, durch welche in jedem Falle der Ort des gemeinsamen Schwerpunktes auf der Verbindungslinie der beiden Einzelschwerpunkte bestimmt wird.

Um z. B. die Coordinaten des Schwerpunktes des ganzen Armes zu erhalten, hat man zunächst die Differenzen entsprechender Coordinaten der Schwerpunkte des Systems Unterarm + Hand und des Oberarms zu bilden, dieselben mit 0,481 zu multipliciren und dann zu den Coordinaten des Oberarmschwerpunktes zu addiren. Die Coordinaten des Schwerpunktes des Systems Rumpf + Kopf gewinnt man, indem man die Differenzen entsprechender Coordinaten des Kopfschwerpunktes und Rumpfschwerpunktes mit 0,142 multiplicirt und zu den Coordinaten des Rumpfschwerpunktes addirt. Bildet man die Differenzen entsprechender Coordinaten

des Fussschwerpunktes und des Schwerpunktes vom Unterschenkel, multiplicirt dieselben mit 0,253 und addirt sie zu den Coordinaten des Unterschenkelschwerpunktes, so erhält man die Coordinaten des Schwerpunktes vom System Unterschenkel + Fuss. Zieht man weiterhin von letzteren die entsprechenden Coordinaten des Schwerpunktes vom Oberschenkel ab, multiplicirt diese Differenzen mit 0,379 und addirt sie dann wieder zu den Schwerpunktscoordinaten des Oberschenkels, so erhält man die Coordinaten des Schwerpunktes des ganzen Beins. Die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes beider Arme stellen einfach das arithmetische Mittel entsprechender Coordinaten der Schwerpunkte der beiden Arme dar. Desgleichen bilden die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes für beide Beine das arithmetische Mittel entsprechender Coordinaten der Schwerpunkte beider Beine. Vermindert man weiterhin die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes beider Arme um die entsprechenden Coordinaten des Schwerpunktes vom System Rumpf + Kopf, multiplicirt diese Differenzen mit 0,207 und addirt sie darauf zu den Schwerpunktscoordinaten des Systems Rumpf + Kopf, so erhält man die Coordinaten des Schwerpunktes vom System Rumpf + Kopf + beide Arme. Zieht man diese letzteren von den entsprechenden Coordinaten des Gesammtschwerpunktes beider Beine ab, multiplicirt diese Differenzen mit 0,373 und addirt sie darauf wieder zu den Coordinaten des Schwerpunktes vom System Rumpf + Kopf + beide Arme, so gelangt man schliesslich zu den Coordinaten des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers.

Endlich kann man, von den Einzelschwerpunkten ausgehend, einen Gelenkmechanismus construiren, welcher automatisch für jede Stellung des menschlichen Körpers den Ort des Gesammtschwerpunktes angiebt. Ein solcher Mechanismus schliesst sich sehr eng an die Construction des Gesammtschwerpunktes aus den Einzelschwerpunkten an; er führt dieselbe mechanisch aus. Da es bei dieser Construction nur auf Theilung variabeler Strecken in bestimmten Verhältnissen ankommt, so wird der Gesammtmechanismus sich aus lauter einzelnen Mechanismen zusammensetzen, von denen jeder die Theilung einer innerhalb bestimmter Grenzen variabelen Strecke nach gegebenem Verhältniss für jede Länge derselben ausführt. Einen derartigen Gelenkmechanismus veranschaulicht Fig. 1. Die vier Stäbe, Metallstreifen oder auch

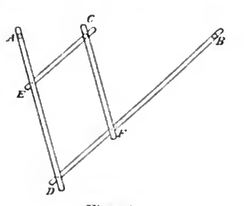
Cartonstreifen, AD, DB, EC und FC sind an den Stellen D, E, F und C durch Charnirgelenke mit parallelen Axen verbunden. Die Lage der Gelenkaxen und die Dimensionen der einzelnen Stäbe sind so bemessen, dass

$$AE:ED = DF:FB, \text{ ferner } EC = DF \text{ und } FC = DE,$$

so dass das Viereck $ECFD$ ein Parallelogramm darstellt. Dann lässt sich leicht einsehen, dass die drei Punkte A, C und B stets in gerader Linie liegen, und dass für jede Gelenkstellung stattfindet

$$AC:CB = AE:ED = DF:FB.$$

Die Längen der beiden Stäbe AD und DB können bis zu gewissem Grade ganz willkürlich gewählt werden; sie müssen nur den Bedingungen genügen, dass ihre Summe mindestens gleich der grössten und ihre Differenz höchstens gleich der kleinsten Entfernung ist, welche die beiden Punkte A und B annehmen können. In dem besonderen Falle, dass diese Punkte sich bis zum Zusammenfallen einander nähern können, müssen daher AD und DB gleich lang genommen werden; in allen anderen Fällen ist aber Gleichheit dieser beiden Strecken durchaus nicht erforderlich. Verbindet man den Mechanismus im Punkte A durch eine zu den vier Charniraxen parallele Axe gelenkig mit einer festen Unterlage, so stellt er den bekannten Storchschnabel dar; bewegt man dabei B auf einer Curve, so zeichnet C eine hierzu ähnliche, im Verhältniss $AC:AB$ verkleinerte Curve auf. Verbindet man dagegen den Mechanismus in den Punkten A und B gelenkig mit den Schwerpunkten zweier Körper, so giebt, vorausgesetzt, dass eine solche Verbindung überhaupt möglich ist, der Punkt C für jede Stellung der Körper zu einander den Gesammtschwerpunkt derselben an, falls die Strecken AE und ED, ebenso wie die Strecken DF und FB des Mechanismus, sich umgekehrt wie die Massen der beiden Körper verhalten. Im Allgemeinen muss man hierbei den Mechanismus in A und B durch Kugelgelenke mit den Schwerpunkten der beiden Körper verbinden. Nur in dem



Figur 1.

Falle, dass die Körper selbst durch ein Charnirgelenk mit einander verbunden sind, kann man diese Verbindungen in *A* und *B* durch blosse Charnirgelenke bewirken, deren Axen aber sowohl den vier Charniraxen des Mechanismus als auch gleichzeitig der Axe des die beiden Körper verbindenden Charnirgelenks parallel sein müssen.

Unter den Gelenken des menschlichen Körpers finden sich nur wenige, welche im streng mechanischen Sinne als Charnirgelenke angesehen werden können. Die meisten besitzen entweder mehrere Grade der Freiheit oder lassen wenigstens innerhalb gewisser Grenzen Schwankungen der Axe zu. Fasst man dagegen die Projection der Bewegung des menschlichen Körpers auf irgend eine Ebene ins Auge, so kommt von jeder Gelenkbewegung immer nur der Theil zum Vorschein, welcher in einer Drehung der Projectionen der beiden durch das Gelenk verbundenen Körpertheile um die zur Projectionsebene senkrechte Gelenkaxe besteht. Im Allgemeinen werden bei dieser Drehung die Projectionen der Körpertheile ihre Dimensionen ändern, und zwar um so mehr, je mehr die thatsächlich stattfindende Gelenkbewegung von einer reinen Drehung um die zur Projectionsebene senkrechte Gelenkaxe abweicht. Besitzt dagegen bei einer Bewegung die Axe der wirklichen Gelenkdrehung schon nahezu diese Richtung, so werden auch die Projectionen der Körpertheile ihre Grössen während der Bewegung nicht wesentlich ändern. Beim Gehen tritt nun dieser Fall für eine Projection ein. Hier finden in allen Gelenken die Drehungen annähernd um Axen von derselben Richtung statt, nämlich der zur Gangebene senkrechten Richtung; denn die Längsaxen aller Körpertheile bleiben bei ihrer Bewegung nahezu der Gangebene parallel. Es erscheinen daher die Längsaxen der Körpertheile in der Projection auf die Gangebene annähernd in ihrer wahren Grösse und erleiden nur verhältnissmässig geringe Aenderungen ihrer Länge bei der Bewegung.

Verschafft man sich nun ein in den Hauptgelenken bewegliches Modell der Projection des menschlichen Körpers auf die Medianebene aus Metallblech oder Carton, so kann man durch Veränderung der Gelenkstellungen mit demselben annähernd alle Bewegungsphasen des menschlichen Körpers beim Gehen in ihrer Projection auf die Gangebene richtig darstellen. Dabei brauchen die 12 Abschnitte, in welche man der früheren Versuchsanordnung entsprechend

den menschlichen Körper zerlegt denkt, nur durch Charnirgelenke mit parallelen, natürlich zur Gangebene senkrechten, Axen verbunden zu sein. An diesem Modell kann man nun leicht einen Mechanismus anbringen, welcher die Projection des Gesammtschwerpunktes auf die Gangebene automatisch anzeigt. Die einzelnen Theile desselben brauchen in diesem besonderen Falle nur durch Charnirgelenke untereinander und mit den Projectionen der Einzelschwerpunkte verbunden zu sein, deren Axen alle den Gelenkaxen des Modells parallel sind.

Tafel I veranschaulicht ein solches Modell der Projection des menschlichen Körpers mit Schwerpunktsmechanismus. Dasselbe ist seiner Zeit von mir aus Carton in halber Lebensgrösse ausgeführt worden[1]) und kann in Metall ausgeführt von Herrn Präcisionsmechaniker E. Zimmermann in Leipzig (Emilienstrasse 21) bezogen werden. Wie man leicht erkennt, besteht der Schwerpunktsmechanismus aus lauter Bestandtheilen von der durch Fig. 1 auf Seite 21 dargestellten Form. Zum Zwecke bequemerer Darstellung sind auf Tafel I die 12 Abschnitte des Körpers nummerirt und die Einzelschwerpunkte durch den Buchstaben S mit der Nummer des betreffenden Körpertheils als Index bezeichnet worden. Der Rumpf besitzt die Nummer 1, die drei Abschnitte der rechten unteren Extremität tragen in distaler Reihenfolge die Nummern 2, 4 und 6, die der linken unteren Extremität entsprechend die Nummern 3, 5 und 7, ferner die beiden Abschnitte der rechten oberen Extremität die Nummern 8 und 10 und die der linken oberen Extremität die Nummern 9 und 11. Endlich ist der Kopf mit der Nummer 12 versehen. Demnach bedeutet z. B. S_1 den Schwerpunkt des Rumpfes, S_7 den Schwerpunkt des linken Fusses u. s. w. Die Gelenke zwischen den einzelnen Körpertheilen sind mit dem Buchstaben G bezeichnet worden und tragen als Indices immer die beiden Nummern der durch das Gelenk verbundenen Glieder. So bedeutet z. B. $G_{1,2}$ das rechte Hüftgelenk, $G_{9,11}$ das linke Ellenbogengelenk u. s. w. Endlich sind auch die Gesammtschwerpunkte für mehrere Körpertheile mit mehreren Indices versehen worden, nämlich den Nummern sämmtlicher Körpertheile, welche zu dem betreffenden Gesammt-

1) Vgl. Nr. 262 des Haupt-Kataloges mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, herausgegeben von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Jahre 1892.

schwerpunkte gehören; wo es ging, sind diese Indices in gedrängter Form angegeben worden, wie z. B. in der Form 2 bis 7 für den Gesammtschwerpunkt beider Beine, oder 8 bis 11 für den Gesammtschwerpunkt beider Arme. Demnach bedeutet also z. B. $S_{2,4,6}$ den Schwerpunkt des ganzen rechten Beines, $S_{5,7}$ den Schwerpunkt des Systems linker Unterschenkel + Fuss, $S_{1,12}$ den Schwerpunkt des Systems Rumpf + Kopf, $S_{1,8 \text{ bis } 12}$ den Schwerpunkt des ganzen auf den beiden Beinen ruhenden Abschnittes des menschlichen Körpers, u. s. w. Der Gesammtschwerpunkt des ganzen Körpers ist mit S_0 bezeichnet worden.

Die Figur auf Tafel I gibt die Dimensionen der einzelnen Körpertheile, und insbesondere die Längen der verschiedenen Cartonstreifen, in $\frac{1}{10}$ natürlicher Grösse wieder. Man kann sich daher mit Hülfe dieser Figur den ganzen Mechanismus leicht selbst herstellen. Es ist dabei besonders zu beachten, dass mit Ausnahme des Gesammtschwerpunktes S_0 alle mit nur einem Index versehenen Schwerpunkte Einzelschwerpunkte sind und daher am Modell feste Lage innerhalb eines Körpertheils besitzen. Dagegen ändern alle mit mehreren Indices versehenen Schwerpunkte als Systemschwerpunkte, ebenso wie der Gesammtschwerpunkt S_0, beim Uebergang aus einer Bewegungsphase in eine andere im Allgemeinen ihre Lage relativ zu den einzelnen Körpertheilen. Die Abmessungen der einzelnen Theilmechanismen richten sich natürlich genau nach den früher angegebenen Verhältnisszahlen. So müssen z. B. für den zwischen S_5 und S_7 angebrachten Mechanismus, welcher die Schwerpunkte des linken Unterschenkels und Fusses zu dem Schwerpunkt $S_{5,7}$ des Systems linker Unterschenkel + Fuss zusammensetzt, die einzelnen Cartonstreifen, oder besser Metallstreifen, so gewählt sein, dass $S_5 S_{5,7} : S_{5,7} S_7 = 0{,}253 : 0{,}747$ (vgl. Seite 17). Der Schwerpunkt $S_{5,7}$ wird nun durch den zwischen ihm und dem Schwerpunkt S_3 des linken Oberschenkels eingelenkten Theilmechanismus mit S_3 zu dem Schwerpunkt $S_{3,5,7}$ des ganzen linken Beines zusammengesetzt. Die Längen der hierzu nöthigen Streifen müssen so bemessen sein, dass $S_3 S_{3,5,7} : S_{3,5,7} S_{5,7} = 0{,}379 : 0{,}621$. Der Theilmechanismus, welcher den Schwerpunkt des linken Beins $S_{3,5,7}$ mit dem des rechten Beines $S_{2,4,6}$ zu dem Gesammtschwerpunkt beider Beine $S_{2 \text{ bis } 7}$ zusammensetzt, muss so construirt werden, dass der letztere immer genau in der Mitte zwischen den beiden ersteren liegt.

Da die Schwerpunkte beider Beine in der Projection zur vollständigen Deckung kommen können, so müssen hier sogar die beiden längeren Streifen von gleicher Länge sein; die beiden kürzeren Streifen müssen daher beide die halbe Länge eines langen Streifens besitzen. Die Längen der Stäbe des zwischen S_1 und S_{12} angebrachten Theilmechanismus, welcher die Schwerpunkte des Rumpfes und Kopfes zu dem Schwerpunkte des Systems Rumpf + Kopf vereinigt, müssen so gewählt sein, dass immer $S_1 S_{1,12} : S_{1,12} S_{12} = 0{,}142 : 0{,}858$. Die Theile des im Schwerpunkt $S_{2 \text{ bis } 7}$ für beide Beine und in dem Schwerpunkt $S_{1,8 \text{ bis } 12}$ des Systems Rumpf + Kopf + beide Arme andererseits eingelenkten Mechanismus, welcher schliesslich den Gesammtschwerpunkt S_0 des ganzen Körpers liefert, müssen in ihren Dimensionen dem Umstande Rechnung tragen, dass für alle Stellungen des menschlichen Körpers die Proportion gelten muss

$$S_{1,8 \text{ bis } 12} S_0 : S_0 S_{2 \text{ bis } 7} = 0{,}373 : 0{,}627 \text{ (vgl. Seite 17).}$$

Es wird nicht nöthig sein, weitere Erklärungen hinzuzufügen, da die Figur auf Tafel I sich selbst erklärt. Der Mechanismus führt eben die oben ausführlich auseinander gesetzte Construction des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers aus den Einzelschwerpunkten unter genauer Beachtung der oben mitgetheilten Verhältnisszahlen für die Projection auf die Gangebene automatisch aus. Er thut dies mit grosser Präcision, wenn er genau construirt ist. Die einzige Ungenauigkeit, welche seinen Angaben anhaftet, hat darin ihren Grund, dass die Projectionen der Längsaxen der Glieder auf die Gangebene im Verlauf eines Schrittes doch etwas ihre Länge ändern. Diese Fehlerquelle liesse sich noch vollkommen beseitigen, wenn man an den einzelnen Körpertheilen die Gelenke innerhalb gewisser Grenzen in ihrer Lage veränderlich machte, und nun durch einen Mechanismus von der Art der einzelnen Theilmechanismen dafür sorgte, dass der Einzelschwerpunkt des Körpertheils in jedem Falle die Längsaxe desselben in dem oben angegebenen (Seite 13 u. 14) bestimmten Verhältniss theilt.

Hat man sich die Projection des ganzen Bewegungsvorganges auf die Gangebene verschafft, so kann man dann mit Hülfe des beschriebenen Schwerpunktsmechanismus durch Auflegen desselben auf die einzelnen Bewegungsphasen die Bahn des Gesammtschwerpunktes des Körpers, sowie der einzelnen Systemschwerpunkte

direct in die Projection eintragen, oder durch kleine Bleistiftchen, welche an den betreffenden Gelenken des Mechanismus in der Richtung der Axe angebracht sind, selbstthätig eintragen lassen. Ist die Projection des Ganges auf Millimeterpapier aufgezeichnet, so lassen sich ferner ohne Weiteres zwei Coordinaten, nämlich die x- und z-Coordinate der Schwerpunkte, ablesen. Zur Gewinnung der y-Coordinate reicht natürlich der eine Mechanismus nicht aus, da er sich nur auf eine Projection bezieht. Man hätte dann noch einen zweiten Mechanismus von derselben Art zu verwenden, welcher der Projection auf die horizontale Bodenfläche oder auch auf die zur Gangrichtung senkrechte Ebene angepasst wäre. Da in diesen beiden Projectionen die Längsaxen der Glieder zum Theil sehr stark verkürzt erscheinen und überhaupt bei der Bewegung des Gehens sehr beträchtliche Längenänderungen erfahren, die man nicht, wie bei der Projection auf die Gangebene, vernachlässigen kann, so würde ein solcher Schwerpunktsmechanismus nach den obigen Auseinandersetzungen sehr complicirt werden. Es empfiehlt sich daher, wenn man nicht nur eine Projection des Schwerpunkts, sondern seine Lage im Raume feststellen will, sich ein räumliches Modell des menschlichen Körpers, etwa ein in den Hauptgelenken bewegliches Skelet zu verschaffen, und an diesem einen Schwerpunktsmechanismus nach demselben Princip anzubringen. Derselbe könnte genau so zusammengesetzt sein, wie der durch Tafel I veranschaulichte. Es müssten nur die Enden eines jeden Theilmechanismus in den betreffenden Schwerpunkten durch Kugelgelenke mit den Knochen, bezüglich den benachbarten Theilmechanismen verbunden sein. Zum Theil würde man dabei von den Knochen, z. B. von einigen Rippen oder von der Schädelkapsel, etwas wegnehmen müssen, um die einzelnen Stäbe des Mechanismus nicht in ihren Bewegungen zu hindern. Im Übrigen setzen sich der Construction eines solchen räumlichen Schwerpunktsmechanismus durchaus keine praktischen Schwierigkeiten entgegen. Es haben mir bisher nur die Mittel gefehlt, denselben ausführen zu lassen. Ein derartiger Mechanismus wird ebenso wie der aus Cartonstreifen thatsächlich ausgeführte sehr leicht spielen. Denn bewegt man z. B. irgend einen Körpertheil, etwa das System rechter Unterarm + Hand, so werden nicht alle Systemschwerpunkte ihren Ort ändern, sondern nur $S_{8,10}$, $S_{8 \text{ bis } 11}$, $S_{1,8 \text{ bis } 12}$ und S_0. Dabei sind ferner die Excursionen dieser vier

Schwerpunkte um so kleiner, je grösser das zugehörige Massensystem ist; die kleinste Bewegung wird daher immer der Gesammtschwerpunkt S_0 des ganzen Körpers ausführen. Die Kraft, mit welcher die Bewegung der Schwerpunkte ausgeführt wird, ist nun aber nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten um so grösser, je kleiner die Verrückung. Es bedarf daher nur einer sehr geringen Anstrengung, um mit der Drehung des Unterarmes im Ellenbogengelenk den ganzen Mechanismus in Bewegung zu versetzen; der Gesammtschwerpunkt wird immer mit grossem Zwange auf diese Drehung reagiren.

B. Bestimmung der Schwerpunktsbahn aus den Hauptpunkten der einzelnen Abschnitte des menschlichen Körpers.

In der Mechanik des menschlichen Körpers, wie überhaupt in der Mechanik eines Systems von Körpern, welche durch Gelenke miteinander verbunden sind, spielt neben den Schwerpunkten noch eine andere Art von festen Punkten innerhalb der einzelnen Körpertheile eine wichtige Rolle. Die Lage eines jeden Einzelschwerpunktes hängt nur von der Vertheilung der Masse innerhalb des betreffenden Körpertheils ab, steht aber in gar keiner Beziehung zu den Massen der übrigen Abschnitte des menschlichen Körpers. Es gibt nun aber in jedem Körpertheil einen zweiten festen Punkt, welcher ausserdem dem Zusammenhange des betreffenden Gliedes mit allen übrigen Rechnung trägt und sogar in noch engerer Beziehung zu dem Gesammtschwerpunkte des menschlichen Körpers steht als der Einzelschwerpunkt selbst. Dieser Punkt, den ich Hauptpunkt des Körpertheils nenne, kann aufgefasst werden als der Schwerpunkt eines fingirten Massensystems, welches man dadurch erhält, dass man in dem Mittelpunkte eines jeden Gelenkes des betreffenden Körpertheils die Massen aller Körpertheile concentrirt denkt, welche durch dieses Gelenk entweder unmittelbar oder mittelbar mit dem fraglichen Körpertheile in Verbindung stehen.[1]) Man erhält also z. B. den Hauptpunkt des rechten Oberschenkels, wenn man im Mittelpunkt des rechten Kniegelenks die Massen des rechten Unterschenkels und Fusses, und im Mittel-

1) vgl. Otto Fischer. Die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft des menschlichen Körpers. Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. XX. Nr. I.

punkt des rechten Hüftgelenks die Massen sämmtlicher übrigen Körpertheile, also des Rumpfes, des ganzen linken Beins, der beiden Arme und des Kopfes, concentrirt annimmt, und nun den Schwerpunkt des so beschwerten Oberschenkels bestimmt. Das Massensystem, welches auf diese Weise aus dem Oberschenkel entsteht, besitzt das Gewicht des ganzen Körpers; ich bezeichne es als reducirtes Oberschenkelsystem. In entsprechender Weise stellt sich der Hauptpunkt des Rumpfes als Schwerpunkt des „reducirten Rumpfsystems“ dar, d. h. eines Massensystems, welches man dadurch erhält, dass man den Rumpf im Mittelpunkt eines jeden Schultergelenks durch die Masse des betreffenden Armes, im Mittelpunkt eines jeden Hüftgelenks durch die Masse des betreffenden Beins und im Mittelpunkt des Atlantooccipitalgelenks durch die Masse des Kopfes beschwert.

Wenn auch im Rumpfe der Hauptpunkt in der Nähe des Schwerpunktes zu suchen sein wird, so sieht man doch leicht ein, dass der Hauptpunkt des Oberschenkels verhältnissmässig weit von dem Schwerpunkte desselben entfernt sein muss; er wird ziemlich nahe am Hüftgelenk liegen in Folge der grossen Massenconcentration im Mittelpunkt des Hüftgelenks. Das Entsprechende wird für alle Extremitätenabschnitte gelten; überall wird der Hauptpunkt näher dem proximalen Gelenk als dem Schwerpunkt des betreffenden Gliedes zu liegen kommen.

Unter Zugrundelegung der Auffassung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der 12 reducirten Systeme des menschlichen Körpers lässt sich die genaue Lage derselben für alle Körpertheile leicht bestimmen. Da der Ort des gemeinsamen Schwerpunktes mehrerer Massen nur von den Verhältnissen derselben, nicht aber von ihren absoluten Grössen abhängt, so kann man zu der Ermittelung der Hauptpunktslagen die auf Seite 16 angeführten Zahlen für das Verhältniss der Massen der einzelnen Körpertheile zu der Gesammtmasse des menschlichen Körpers verwenden.

Demnach stellt sich der Hauptpunkt eines Oberschenkels als der Gesammtschwerpunkt dreier im Hüftgelenkmittelpunkt, Kniegelenkmittelpunkt und Schwerpunkt des Oberschenkels concentrirten Massen dar, denen bezüglich die Verhältnisszahlen 0,81365; 0,07055 und 0,1158 zukommen. Setzt man diese drei Massenpunkte in der oben angegebenen Weise successiv zusammen, indem man berücksichtigt, dass der Schwerpunkt des Oberschenkels auf

der Verbindungsstrecke des Hüftgelenk- und Kniegelenkmittelpunktes liegt und dieselbe im Verhältniss 0,44 : 0,56 theilt, so ergiebt sich, dass der ebenfalls auf dieser Verbindungsstrecke liegende Hauptpunkt des Oberschenkels dieselbe im Verhältniss 0,122 : 0,878 theilt. Ist l die Entfernung der Mittelpunkte des Hüft- und Kniegelenks, so hat in Folge dessen der Hauptpunkt des Oberschenkels auf der Längsaxe desselben vom Hüftgelenkmittelpunkt den Abstand $0{,}122 \cdot l$ und vom Kniegelenkmittelpunkt den Abstand $0{,}878 \cdot l$.

Der Hauptpunkt eines Unterschenkels ist der Gesammtschwerpunkt dreier im Kniegelenkmittelpunkt, Mittelpunkt des oberen Sprunggelenks und Schwerpunkt des Unterschenkels concentrirten Massen von den Verhältnisszahlen 0,92945; 0,017875 und 0,052675. Da der Schwerpunkt des Unterschenkels auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte vom Knie- und Fussgelenk liegt und dieselbe im Verhältniss 0,42 : 0,58 theilt, so befindet sich auch der Hauptpunkt des Unterschenkels auf dieser Linie; er theilt sie im Verhältniss 0,040 : 0,960. Ist l die zwischen den Mittelpunkten der begrenzenden Gelenke gemessene Länge des Unterschenkels, so besitzt der Hauptpunkt des Unterschenkels von den Mittelpunkten des Knie- und Fussgelenks bezüglich die Abstände $0{,}040 \cdot l$ und $0{,}960 \cdot l$.

Der Hauptpunkt eines Fusses stellt sich nur als gemeinsamer Schwerpunkt zweier Massenpunkte dar, welche im Fussgelenkmittelpunkt und Schwerpunkt des Fusses concentrirt zu denken sind und bezüglich die Verhältnisszahlen 0,982125 und 0,017875 besitzen. Er theilt demnach die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte im Verhältniss 0,018 : 0,982. Bezeichnet r die Entfernung zwischen dem Mittelpunkt des Fussgelenks und dem Schwerpunkt des Fusses, so besitzt der Hauptpunkt des Fusses von diesen beiden Punkten bezüglich die Abstände $0{,}018 \cdot r$ und $0{,}982 \cdot r$. Er liegt also sehr nahe am Mittelpunkt des Fussgelenks.

Der Hauptpunkt eines Oberarms bedeutet den Gesammtschwerpunkt dreier im Mittelpunkt des Schultergelenks, Mittelpunkt des Ellbogengelenks und Schwerpunkt des Oberarms concentrirten Massen von den Verhältnisszahlen 0,935125; 0,031225 und 0,03365. Berücksichtigt man, dass der Schwerpunkt des Oberarms auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte des Schultergelenks und Ellbogengelenks liegt und dieselbe im Verhältniss 0,47 : 0,53 theilt, so findet man, dass der Hauptpunkt des Ober-

arms sich ebenfalls auf dieser Verbindungsstrecke befindet, und dass er dieselbe im Verhältniss 0,047 : 0,953 theilt. Bei einer Länge l des Oberarms, gemessen zwischen den beiden Gelenkmittelpunkten, besitzt demnach der Hauptpunkt desselben von den Mittelpunkten des Schulter- und Ellbogengelenks bezüglich die Abstände $0{,}047 \cdot l$ und $0{,}953 \cdot l$.

Der Hauptpunkt des Systems Unterarm plus Hand jeder Seite ist der gemeinsame Schwerpunkt von nur zwei Massenpunkten, welche im Mittelpunkt des Ellbogengelenks und im Schwerpunkte des Systems Unterarm plus Hand concentrirt zu denken sind, behaftet mit den Verhältnisszahlen 0,968775 und 0,031225. Da bei mittlerer Pronationsstellung der Hand der Schwerpunkt des Systems Unterarm plus Hand auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte des Ellbogengelenks und Handgelenks liegt und dieselbe im Verhältniss 0,66 : 0,34 theilt, so wird der Hauptpunkt des Systems Unterarm plus Hand ebenfalls auf dieser Verbindungsstrecke zu suchen sein; die Rechnung ergibt, dass er dieselbe im Verhältniss 0,021 : 0,979 theilt. Bezeichnet l die Entfernung zwischen den Mittelpunkten des Ellbogengelenks und Handgelenks, so wird in Folge dessen der Hauptpunkt des Systems Unterarm plus Hand vom Ellbogengelenkmittelpunkt den Abstand $0{,}021 \cdot l$ und vom Handgelenkmittelpunkt den Abstand $0{,}979 \cdot l$ besitzen, also sehr nahe an ersterem liegen. Einen Hauptpunkt des Unterarms und einen solchen der Hand allein aufzusuchen, hat für die vorliegende Untersuchung des Ganges keinen Zweck, da bei derselben die Hand zum Unterarm festgestellt war, und also der Unterarm mit der Hand zusammen als ein starrer Körpertheil aufgefasst wurde. Für die Untersuchung anderer Bewegungsarten des menschlichen Körpers, wie z. B. denen eines Klavierspielers wird man dagegen nicht nur die Einzelhauptpunkte des Unterarms und der Mittelhand, sondern sogar die Hauptpunkte der Fingerglieder berücksichtigen müssen.

Der Hauptpunkt des Rumpfes stellt den Gesammtschwerpunkt von nicht weniger als 6 Massenpunkten dar, welche in den Mittelpunkten der beiden Hüftgelenke, der beiden Schultergelenke, des Atlantooccipitalgelenks und im Schwerpunkt des Rumpfes concentrirt zu denken sind. Dabei kommt einer jeden in einem Hüftgelenkmittelpunkt concentrirten Masse die Verhältnisszahl 0,18635, einer jeden in einem Schultergelenkmittelpunkt concentrirten Masse

die Verhältnisszahl 0,064875 und den im Kopfgelenkmittelpunkt und im Schwerpunkt des Rumpfs concentrirten Massen bezüglich die Verhältnisszahl 0,07055 und 0,4270 zu. Zur Vereinfachung der Hauptpunktsbestimmung kann man die beiden in den Hüftgelenkmittelpunkten concentrirten Massen durch einen im Mittelpunkt der Hüftlinie befindlichen Massenpunkt von der Verhältnisszahl 0,3727, und die beiden in den Schultergelenkmittelpunkten concentrirten Massen durch einen im Mittelpunkt der Schulterlinie angebrachten Massenpunkt von der Verhältnisszahl 0,12975 ersetzen. Dann hat man nur noch 4 Massenpunkte zum gemeinsamen Schwerpunkt zusammenzusetzen, welche alle auf einer Geraden, nämlich der Rumpflinie, liegen. Auf dieser Linie wird in Folge dessen auch der Hauptpunkt des Rumpfes zu finden sein. Da der Abstand des Kopfgelenkmittelpunktes von der Mitte der Hüftlinie sich zu der Entfernung der Hüft- und Schulterlinienmitte wie 1,35 : 1 verhält, und ferner der Schwerpunkt des Rumpfes die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Hüftlinie und Schulterlinie im Verhältniss 0,53 : 0,47 theilt, so ergibt die Rechnung, dass der Hauptpunkt des Rumpfes diese letztere Verbindungsstrecke im Verhältniss 0,451 : 0,549 theilt. Die Verbindungsstrecke zwischen den Mittelpunkten der Hüftlinie und des Kopfgelenks wird dagegen durch den Hauptpunkt des Rumpfes im Verhältniss 0,333 : 0,667 getheilt. Ist h die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der Hüft- und Schulterlinie und l die Entfernung zwischen der Hüftlinienmitte und dem Mittelpunkt des Kopfgelenks, so besitzt demnach der Hauptpunkt des Rumpfes vom Mittelpunkt der Hüftlinie den Abstand $0{,}451 \cdot h$ oder $0{,}333 \cdot l$, vom Mittelpunkt der Schulterlinie den Abstand $0{,}549 \cdot h$ und vom Mittelpunkt des Kopfgelenks den Abstand $0{,}667 \cdot l$. Da l 1,35 mal so gross ist als h, so können natürlich die beiden zuerst angegebenen Abstände nur gleich sein, wenn 0,451 auch 1,35 mal so gross ist als 0,333. Dies ist aber thatsächlich der Fall. Ist ferner b die halbe Entfernung der beiden Hüftgelenkmittelpunkte voneinander und a der halbe Abstand der beiden Schultergelenkmittelpunkte, so wird bei aufrechter Haltung des Körpers, wo die Hüftlinie und Schulterlinie annähernd senkrecht auf der Rumpflinie stehen, nach dem pythagoreischen Lehrsatz die Entfernung des Rumpfhauptpunktes von einem jeden Hüftgelenkmittelpunkt $\sqrt{0{,}203 \cdot h^2 + b^2}$ oder $\sqrt{0{,}111 \cdot l^2 + b^2}$, und die Entfernung desselben von einem jeden

Schultergelenkmittelpunkt $\sqrt{0{,}301 \cdot h^2 + a^2}$ betragen. Diese Abstände werden natürlich ungenau, sobald sich eine der beiden Linien gegen die Rumpflinie neigt; sie können daher nur als Mittelwerte betrachtet werden.

Im I. Theil der vorliegenden Untersuchung ist schon (vgl. Seite 310 ff.) darauf aufmerksam gemacht worden, dass die relative Bewegung des Kopfes zum Rumpfe beim Gehen sich streng genommen nicht als einfache Drehung um ein zum Rumpfe festes Drehcentrum auffassen lässt, da die Halswirbelsäule dabei sich etwas verbiegt. Will man trotzdem die Annahme eines festen Drehcentrums machen, um die ziemlich verwickelten Bewegungen des Kopfes zu den mittleren Partien des Rumpfes doch wenigstens annähernd berücksichtigen zu können, so wird man der wahren Bewegung näher kommen und auch der Verbiegung der Halswirbelsäule bis zu gewissem Grade Rechnung tragen, wenn man das feste Drehcentrum nicht in den Mittelpunkt des Atlanto-occipitalgelenks, sondern viel tiefer, etwa in die Gegend des unteren Halswirbelendes verlegt. Aus diesem Grunde sind schon im ersten Theil die Bewegungen des Kopfes auf den Mittelpunkt der Schulterlinie bezogen worden, indem die Drehungen der Verbindungslinie der Schulterlinienmitte mit dem Scheitelpunkt des Kopfes, welche als „Kopflinie“ bezeichnet wurde, relativ zum Rumpfe untersucht wurden. Diese Annahme über den Ort des Drehcentrums des Kopfes bedingt nun eine etwas andere Lage des Rumpfhauptpunktes; denn sie ist gleichbedeutend damit, dass der Kopf im Mittelpunkt der Schulterlinie durch ein Gelenk mit dem Rumpfe verbunden ist, im Übrigen aber eine starre Masse darstellt. Für die Bestimmung des Hauptpunktes im Rumpf hat man dann die mit der Verhältnisszahl 0,07055 behaftete Masse des Kopfes im Mittelpunkt der Schulterlinie concentrirt zu denken. Dies bedingt eine Verschiebung des Rumpfhauptpunktes auf der Rumpflinie nach unten, indem derselbe die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von Hüft- und Schulterlinie im Verhältniss 0,427 : 0,573 theilt. Der Abstand des Hauptpunktes von der Hüftlinienmitte würde demnach nur $0{,}427 \cdot h$, der von der Schulterlinienmitte dagegen $0{,}573 \cdot h$ betragen. Der Unterschied zwischen diesen Angaben und den früheren auf Seite 31 ist gering; er beträgt 0,024, also noch nicht ganz $2\frac{1}{2}$ Procent, der Entfernung zwischen Hüft- und Schulterlinienmitte. Da die wirklichen Bewegungen des Kopfes relativ

zum Rumpfe nur durch die Annahme eines zwischen dem unteren Ende der Halswirbelsäule und dem Kopfgelenk befindliches instantanes Drehcentrum von wechselnder Lage getroffen werden, so erkennt man aus diesem geringen Unterschiede zwischen den äussersten Grenzen des Centrums, dass man weder bei der ersten noch bei der zweiten gemachten Annahme Fehler begeht, welche im Missverhältniss zu der sonst erreichten Genauigkeit stehen. Bei der zweiten Annahme würde der Hauptpunkt des Rumpfes von je einem Hüftgelenkmittelpunkt bezüglich Schultergelenkmittelpunkt die Entfernung $\sqrt{0{,}182 \cdot h^2 + b^2}$ bezüglich $\sqrt{0{,}328 \cdot h^2 + a^2}$ besitzen.

Für den Hauptpunkt des Kopfes erhält man auch zwei verschiedene Lagen, je nachdem man das Drehcentrum in das Kopfgelenk oder in die Schulterlinie verlegt. Im ersten Falle stellt der Hauptpunkt des Kopfes den gemeinsamen Schwerpunkt zweier im Mittelpunkt des Atlantooccipitalgelenks und Schwerpunkt des Kopfes concentrirten Massen dar, deren Verhältnisszahlen 0,92945 und 0,07055 sind. Dabei liegt er, ebenso wie der Kopfschwerpunkt, sehr annähernd auf der Verbindungsstrecke des Kopfgelenkmittelpunktes mit dem Kopfscheitelpunkt. Da der Schwerpunkt des Kopfes diese Verbindungsstrecke im Verhältniss 0,26 : 0,74 theilt, so ergiebt die Rechnung, dass der Hauptpunkt des Kopfes dieselbe im Verhältniss 0,018 : 0,982 theilt. Ist l die Länge dieser Strecke, so beträgt der Abstand des Hauptpunktes vom Kopfgelenkmittelpunkt $0{,}018 \cdot l$ und vom Kopfscheitelpunkt $0{,}982 \cdot l$.

Im zweiten Falle, wenn das Drehcentrum mit dem Mittelpunkt der Schulterlinie zusammenfällt, hat der Hauptpunkt einen wesentlich anderen Ort, denn derselbe hängt ja hauptsächlich von der Lage der Gelenkverbindungen des betreffenden Körpertheils mit anderen ab. Der Hauptpunkt stellt sich auch bei dieser zweiten Annahme als gemeinsamer Schwerpunkt zweier Massenpunkte von den Verhältnisszahlen 0,92945 und 0,07055 dar, nur fällt der erste jetzt in den Mittelpunkt der Schulterlinie hinein. Der Schwerpunkt des Kopfes liegt nun nach den früheren Angaben (Seite 14) auf der Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkt der Schulterlinie und dem Kopfscheitelpunkt und theilt dieselbe beim I. und II. Versuch wie 0,70 : 0,30 und beim III. Versuch wie 0,68 : 0,32. Daraus ergiebt sich, dass der Hauptpunkt des Kopfes dieselbe Strecke beim I. und II. Ver-

such im Verhältniss 0,049 : 0,951 und beim III. Versuch im Verhältniss 0,048 : 0,952 theilt und ebenfalls auf der Kopflinie liegt. Bedeutet h die Entfernung zwischen dem Mittelpunkt der Schulterlinie und dem Kopfscheitelpunkt, so besitzt demnach der Hauptpunkt des Kopfes von diesen beiden Punkten bezüglich die Abstände $0{,}049 \cdot h$ und $0{,}951 \cdot h$ beim I. und II. Versuch und $0{,}048 \cdot h$ und $0{,}952 \cdot h$ beim III. Versuch; er liegt also bei dieser zweiten Annahme sehr nahe an der Schulterlinie. —

Damit ist die Lage der Hauptpunkte sämmtlicher 12 Körperabschnitte für jedes Individuum ermittelt, welchem die auf Seite 16 angegebenen normalen Massenverhältnisse der einzelnen Körpertheile zukommen. Die Angaben über die Abstände der Hauptpunkte von den benachbarten Gelenkmittelpunkten sind ganz allgemein gemacht worden, damit man im gegebenen Falle nach directer Messung der Dimensionen des betreffenden Individuums diese Abstände leicht berechnen kann.

Die Strecken zwischen den Mittelpunkten der zu einem Körpertheil gehörenden Gelenke und dem Hauptpunkte dieses Körpertheils führen den Namen „Hauptstrecken“. Demnach besitzen bei der getroffenen Eintheilung des Körpers der Oberschenkel, Unterschenkel und Oberarm je 2 Hauptstrecken, das System Unterarm + Hand, der Fuss und der Kopf je 1 Hauptstrecke, dagegen der Rumpf 5 Hauptstrecken.

Mit Hülfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken kann man nun auf die einfachste Weise durch Construction zu dem Ort des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers gelangen. Man braucht nur von dem Hauptpunkte irgend eines der 12 Körpertheile aus in beliebiger Reihenfolge diejenigen Hauptstrecken der übrigen 11 Körpertheile unter Beibehaltung ihrer im Körper jeweils eingenommenen Richtung aneinander zu setzen, welche innerhalb des Körpers diesem Hauptpunkte zugekehrt sind. Der Endpunkt des auf diese Weise entstehenden gebrochenen Linienzuges wird dann stets mit dem Gesammtschwerpunkte des menschlichen Körpers zusammenfallen. Führt man diese Construction nicht im Raume, sondern in der Projection des Körpers auf irgend eine Ebene aus, indem man natürlich dann die Projectionen der betreffenden Hauptstrecken zu dem gebrochenen Linienzug zusammensetzt, so erhält man die Projection des Gesammtschwerpunktes auf diese Ebene. Den ausführlichen Beweis für

diesen Satz habe ich in meiner oben angeführten Abhandlung „Ueber die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft des menschlichen Körpers“ auf Seite 72 ff. erbracht, so dass hier auf denselben verwiesen werden kann.

Benutzt man beispielsweise den Hauptpunkt des Rumpfes als Ausgangspunkt, so setzt sich also im Raume der gebrochene Linienzug zusammen aus den beiden Verbindungsstrecken eines jeden Hüftgelenkmittelpunktes mit dem Hauptpunkt seines Oberschenkels, den beiden Verbindungsstrecken eines jeden Kniegelenkmittelpunktes mit dem Hauptpunkt seines Unterschenkels, den beiden Verbindungsstrecken eines jeden Fussgelenkmittelpunktes mit dem Hauptpunkt seines Fusses, den beiden Verbindungsstrecken eines jeden Schultergelenkmittelpunktes mit dem Hauptpunkt seines Oberarmes, den beiden Verbindungsstrecken eines jeden Ellbogengelenks mit dem Hauptpunkt des zugehörigen Systems Unterarm + Hand und endlich der Verbindungsstrecke des Kopfgelenkmittelpunktes mit dem Hauptpunkt des Kopfes. An Stelle der letzteren kann auch die grössere Verbindungsstrecke des Mittelpunktes der Schulterlinie mit demjenigen Hauptpunkte des Kopfes, welcher dem in der Schulterlinie angenommenen Drehcentrum des Kopfes entspricht, verwendet werden; nur muss man in diesem Falle dann auch von dem dieser Annahme entsprechenden tiefer gelegenen Hauptpunkte des Rumpfes bei der Construction ausgehen. Es lässt sich leicht nachweisen, dass man in beiden Fällen zu dem gleichen Endresultat gelangt. Da nach den früheren Angaben der Schwerpunkt des Kopfes die Verbindungsstrecke des Kopfgelenkmittelpunktes mit dem Kopfscheitelpunkt im Verhältniss 0,26 : 0,74 und die Verbindungsstrecke der Schulterlinienmitte mit dem Kopfscheitel im Verhältniss 0,70 : 0,30 theilt, so kann man leicht berechnen, dass die erstere Verbindungsstrecke im Verhältniss 0,68 : 1 und die letztere im Verhältniss 1,68 : 1 zu der Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkt der Schulterlinie und dem Kopfgelenkmittelpunkt steht. Diese steht nun ihrerseits zu dem Abstand zwischen den Mitten der Hüft- und Schulterlinie im Verhältniss 0,35 : 1. Es verhalten sich daher die Verbindungsstrecke des Kopfgelenkmittelpunktes mit dem Kopfscheitelpunkt bezüglich die Verbindungsstrecke der Schulterlinienmitte mit dem Kopfscheitelpunkt zu der Verbindungsstrecke der Mitten von Hüft- und Schulterlinie wie 0,24 : 1 bezüglich

0,59 : 1. Daraus ergiebt sich aber, dass die beiden verschiedenen Hauptstrecken des Kopfes von der Länge $0{,}018 \cdot l$ bezüglich $0{,}049 \cdot h$ (vgl. Seite 33 und 34) sich zu dem Abstand der Mittelpunkte der Hüft- und Schulterlinie verhalten wie 0,004 : 1 bezüglich 0,028 : 1. Es ist also die Hauptstrecke für den Fall, dass das Drehcentrum des Kopfes in das Kopfgelenk fällt, um 2,4 Procent des Abstandes der Hüft- und Schulterlinienmitte kleiner als wenn das Drehcentrum in der Schulterlinie liegt. Um gerade so viel liegt aber im ersten Falle der Hauptpunkt des Rumpfes auf der Rumpflinie höher als im letzten (vgl. Seite 32). Es wird daher der Gesammtschwerpunkt des Körpers in der Normalstellung in beiden Fällen absolut genau, bei allen anderen Stellungen des Körpers wenigstens mit genügender Genauigkeit an demselben Ort gefunden werden.

Anstatt von dem Hauptpunkte des Rumpfes kann man bei der Construction des Gesammtschwerpunktes von jedem beliebigen anderen Hauptpunkte ausgehen. So empfiehlt es sich z. B. den Hauptpunkt des auf dem Boden aufstehenden Fusses als Ausgangspunkt zu verwenden, wenn man die Bewegungen des Schwerpunktes untersuchen will, während der Körper beim Gehen nur das eine Bein aufgesetzt hat. Dann hat man aber zum Theil andere Hauptstrecken zu verwenden, nämlich für den Unterschenkel des aufstehenden Beins die Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkt des Fussgelenks und dem Hauptpunkt des Unterschenkels, für den Oberschenkel desselben Beins die Verbindungsstrecke des Kniegelenkmittelpunktes mit dem Hauptpunkt des Oberschenkels. Die Hauptstrecke des aufgesetzten Fusses kommt jetzt in Wegfall, dafür tritt aber eine Hauptstrecke des Rumpfes ein, nämlich die Verbindungsstrecke des Hüftgelenkmittelpunktes des aufgesetzten Beins mit dem Hauptpunkt des Rumpfes; die Hauptstrecken der übrigen 8 Körpertheile sind dieselben wie in dem Falle, dass von dem Rumpfhauptpunkt ausgegangen wird.

Als Beispiel für diese Methode der Gewinnung des Gesammtschwerpunktes ist auf Tafel II die Construction für die Bewegungsphase Nr. 11 des I. Versuches vom Hauptpunkte des Rumpfes aus in zwei Projectionen, auf die Gangebene und auf die zur Gangrichtung senkrechte Ebene, in natürlicher Grösse durchgeführt worden. Da die beim Ausgang vom Rumpfhauptpunkte zu verwendenden Hauptstrecken relativ klein sind, so nimmt der ge-

brochene Linienzug, selbst wenn die wahren Längen der Hauptstrecken verwendet werden, nur einen verhältnissmässig kleinen Raum ein. Darin liegt eine besondere Empfehlung der Construction vom Rumpfhauptpunkte aus. Die verwendete Reihenfolge der Hauptstrecken ist aus Tafel II ersichtlich. Um zu zeigen, dass dieselbe für das Endresultat ohne Belang ist, findet sich in der Figur mit punktirten Linien gezeichnet die Construction noch einmal bei anderer Reihenfolge der Hauptstrecken angegeben. Zur Orientirung über die Lage des Rumpfhauptpunktes H_1 und Gesammtschwerpunktes S_0 im Körper sind ausserdem in der Projection auf die Gangebene die Contouren der beiden Femurköpfe angedeutet. —

Die Construction des Gesammtschwerpunktes mit Hülfe der Hauptpunkte besitzt nun ihre grossen Vorzüge gegenüber der gebräuchlichen, unter A auseinandergesetzten Methode der Zusammensetzung der einzelnen Schwerpunkte. Zunächst führt sie viel schneller zum Ziele als diese. Hat man einmal die Lage der Hauptpunkte innerhalb der einzelnen Körpertheile festgestellt, so läuft die Construction des Gesammtschwerpunktes nur noch auf eine geometrische Addition, d. h. ein Aneinandersetzen von 11 bestimmten, durch die Hauptpunkte gegebenen Strecken hinaus. Bei der Construction mit Hülfe der Einzelschwerpunkte hat man dagegen eben so viel Verbindungsstrecken zwischen einzelnen Schwerpunkten in bestimmten Verhältnissen zu theilen. Die Ermittelung der Hauptpunkte selbst erfordert aber nicht mehr Arbeit als die Bestimmung der Einzelschwerpunkte; denn in beiden Fällen handelt es sich darum, die Längsaxen der einzelnen Körpertheile in gegebenen Verhältnissen zu theilen. Viel wichtiger als dieser praktische Vortheil, den man durch die Verwendung der Hauptpunkte für die Construction des Gesammtschwerpunktes gewinnt, ist die Thatsache, dass man in den Hauptstrecken direct ein Maass besitzt für den Einfluss, den die Bewegung der verschiedenen Körpertheile und Systeme von Körpertheilen auf die Lage des Gesammtschwerpunktes ausübt. Bewegt man z. B. in der Haltung Nr. 11 des I. Versuchs, für welche die Construction des Gesammtschwerpunktes auf Tafel II ausgeführt ist, allein den Kopf, so wird von den 11 Hauptstrecken nur die letzte KS_0 ihre Richtung ändern, d. h. sich um den Punkt K drehen. Es beschreibt demnach bei jeder Drehung des Kopfes um den Mittelpunkt der

Schulterlinie (vgl. Seite 32) der Gesammtschwerpunkt S_0 des menschlichen Körpers einen Kreis, dessen Radius die Hauptstrecke des Kopfes ist. Das Centrum dieses Kreises erhält man, indem man von S_0 aus die in entgegengesetzter Richtung genommene Hauptstrecke des Kopfes abträgt. Dreht man ferner das ganze rechte Bein um eine Axe des Hüftgelenks, indem man dabei die in Bewegungsphase Nr. 11 des I. Versuchs eingenommenen Gelenkstellungen im Knie- und Fussgelenk beibehält, so wird, wenn alle anderen Körpertheile in Ruhe bleiben, der Gesammtschwerpunkt S_0 ebenfalls einen Kreis beschreiben. Der Radius dieser Kreisbahn wird erhalten, indem man die drei dem Rumpfe zuliegenden Hauptstrecken des rechten Oberschenkels, Unterschenkels und Fusses in ihrer jeweils eingenommenen Richtung aneinandersetzt; er ist also gleich der geometrischen Summe dieser drei Hauptstrecken. Dies lässt sich unmittelbar einsehen, wenn man die andere auf Tafel II mit punktirten Linien angegebene Construction in's Auge fasst. Die drei letzten Strecken des gebrochenen Linienzuges sind die Hauptstrecken der Abschnitte des rechten Beins. Bleiben die Gelenkstellungen im Knie- und Fussgelenk erhalten, so werden auch die letzteren ihre relative Winkelstellung beibehalten, und es wird daher bei den Drehungen des ganzen Beins der Schwerpunkt S_0 einen Kreis um L' beschreiben, dessen Radius die constante Verbindungsstrecke $L'S_0$ ist. Zu dem Mittelpunkt L' dieses Kreises gelangt man vom Gesammtschwerpunkte, indem man die drei verwendeten Hauptstrecken des rechten Beins in umgekehrter Richtung von S_0 aus nach einander abträgt. In entsprechender Weise findet man, dass bei alleiniger Bewegung des Systems Unterarm + Hand der Gesammtschwerpunkt einen Kreis mit der Hauptstrecke dieses Systems als Radius, und bei alleiniger Bewegung eines Armes mit festgestelltem Ellbogengelenk einen Kreis mit einem Radius gleich der geometrischen Summe der dem Rumpf zugekehrten Hauptstrecken der beiden Abschnitte des Armes beschreibt.

Es ist schon früher hervorgehoben worden, dass die Hauptpunkte in engem Zusammenhang mit der Gliederung des Körpers stehen. Würde man für die Untersuchung einer bestimmten Bewegung das ganze Bein als eine starre Masse auffassen können, weil bei den betrachteten Bewegungen thatsächlich keine Aenderung in den Gelenkstellungen des Knie- und Fussgelenks eintritt,

so wäre es zwecklos, besondere Hauptpunkte für die drei Abschnitte des Beins zu unterscheiden. Man würde in diesem Falle nur einen Hauptpunkt des ganzen Beins annehmen; die Lage desselben steht in sehr enger Beziehung zu den Hauptpunkten der drei Abschnitte. Es lässt sich leicht nachweisen, dass man zum Hauptpunkte des ganzen Beins gelangt, wenn man vom Mittelpunkt des Hüftgelenks aus die drei zu Oberschenkel, Unterschenkel und Fuss gehörenden proximalen Hauptstrecken unter Beibehaltung ihrer wirklichen Richtung aneinandersetzt. Dies ist einfach eine Folge davon, dass der Gesammtschwerpunkt bei alleiniger Bewegung des im Knie- und Fussgelenk starr gemachten Beins einen Kreis beschreibt, dessen Radius die geometrische Summe der proximalen Hauptstrecken der drei Abschnitte des Beins ist. Es würde also bei der zur Bewegungsphase Nr. 11 des I. Versuchs gehörenden Haltung des Beins die Strecke $\overline{L'S_0}$ auf Tafel II sowohl der Grösse als der Richtung nach die Hauptstrecke des ganzen rechten Beins darstellen, und daher in derselben Richtung und Entfernung vom Hüftgelenkmittelpunkt der Hauptpunkt des ganzen Beins zu suchen sein.

Der Hauptpunkt des ganzen Beins kann nach dem Früheren als Schwerpunkt zweier Massen angesehen werden, von denen die eine im Schwerpunkt des ganzen Beins und die andere im Hüftgelenkmittelpunkt concentrirt ist; die erste ist gleich der Masse des ganzen Beins, die letzte gleich der Gesammtmasse des menschlichen Körpers vermindert um die Masse des Beins. Daraus geht hervor, dass man rückwärts vom Hauptpunkte des ganzen Beins auch sehr leicht zu dem Schwerpunkte desselben gelangen kann. Man braucht nur die Verbindungsstrecke des Hüftgelenkmittelpunktes mit dem Hauptpunkt des ganzen Beins im Verhältniss der Gesammtmasse des menschlichen Körpers zu der Masse des ganzen Beins zu vergrössern. Zu demselben Ziele gelangt man, wenn man die proximalen Hauptstrecken von Oberschenkel, Unterschenkel und Fuss in demselben Verhältniss vergrössert und dann geometrisch addirt. Diese vergrösserten Hauptstrecken gehören dann zu festen Punkten der drei Abschnitte des Beins, welche als Hauptpunkte anzusprechen sind, wenn man das Bein vollständig vom übrigen Körper abgelöst denkt und als selbständiges Körpersystem behandelt. Dies geht ohne Weiteres daraus hervor, dass diese Punkte bei der Construction des Schwerpunktes des

ganzen Beins genau dieselbe Rolle spielen, wie die eigentlichen Hauptpunkte bei der Construction des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers. Man kann diese Punkte als die zum ganzen Bein gehörenden „partiellen Hauptpunkte" bezeichnen. In entsprechender Weise erhält man als partielle Hauptpunkte des Systems Unterschenkel + Fuss Punkte, deren Entfernungen vom Mittelpunkt des Knie- bezüglich Fussgelenks sich zu den Längen der proximalen Hauptstrecken des Unterschenkels und Fusses wie die Gesammtmasse des Körpers zu der Masse des Systems Unterschenkel + Fuss verhalten. Für den ganzen Arm würden die partiellen Hauptpunkte auf den Längsaxen des Oberarms und Unterarms in Abständen vom Schulter- bezüglich Ellbogengelenk liegen, welche sich zu den proximalen Hauptstrecken der beiden Abschnitte des Armes wie die Masse des ganzen Körpers zu der Masse des ganzen Armes verhalten. Unter Umständen empfiehlt es sich auch, die partiellen Hauptpunkte an Stelle der wirklichen zu verwenden, ohne dass man das System, also etwa den ganzen Arm, vom übrigen Körper abgelöst denkt. Dies ist z. B. der Fall, wenn der Rumpf und der Schultergürtel als fixirt angenommen werden können, und nun der Arm sich wie ein selbständiges Körpersystem um einen im Raume festen Punkt, nämlich den mit dem Rumpfe fixirten Mittelpunkt des Schultergelenks, dreht. Dann kann man die Massen aller übrigen Körpertheile und auch den Gesammtschwerpunkt des menschlichen Körpers ganz ausser Betracht lassen und nur nach dem Verhalten des Schwerpunktes des ganzen Armes fragen. Hierzu braucht man aber nur die partiellen Hauptpunkte. Es sind daher in früheren Arbeiten[1]), in denen die Wirkungsweise der Muskeln auf den Arm untersucht wurde unter der Voraussetzung, dass Rumpf und Schultergürtel durch äussere Kräfte vollkommen fixirt sind, ausschliesslich die partiellen Hauptpunkte und Hauptstrecken der beiden Abschnitte des Armes verwendet worden. Da das Verhältniss der Masse des ganzen Armes zu der Gesammtmasse des menschlichen Körpers nach Seite 16 den Werth 0,064875 besitzt, so sind beim Arm die dem Schultergelenk zugekehrten partiellen Hauptstrecken rund

1) Vgl. Otto Fischer, Beiträge zu einer Muskeldynamik I und II, und Beiträge zur Muskelstatik I. Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. XXII Nr. II, Bd. XXIII Nr. VI und Bd. XXIII Nr. IV.

$15\frac{1}{2}$ mal so gross als die wirklichen Hauptstrecken des dem menschlichen Körper angegliederten Armes.

Man sieht also, dass man mit Hülfe der Hauptpunkte nicht nur zu dem Gesammtschwerpunkte des ganzen Körpers, sondern auch auf sehr einfache Weise zu den Schwerpunkten einzelner Systeme gelangen kann. Es ist jedoch dabei nicht zu verkennen, dass die sich nöthig machenden starken Vergrösserungen der Hauptstrecken die Genauigkeit der Resultate etwas beeinträchtigen. Immerhin steht auch in Beziehung auf die Gewinnung der Schwerpunkte einzelner Systeme die Construction des Gesammtschwerpunktes mit Hülfe der Hauptpunkte nicht wesentlich hinter jener zurück, welche von den Einzelschwerpunkten der Körpertheile ausgeht.

Wie die Construction des Gesammtschwerpunktes sich unter Zugrundelegung der Hauptpunkte viel einfacher gestaltet, als wenn man von den Einzelschwerpunkten ausgeht, so erfährt auch die Rechnung durch die Anwendung der Hauptpunkte und Hauptstrecken eine wesentliche Vereinfachung. Zunächst hat man natürlich die Coordinaten der 12 Hauptpunkte zu ermitteln. Diese Berechnung gestaltet sich genau entsprechend der Bestimmung der Coordinaten der Einzelschwerpunkte (vgl. Seite 18); nur hat man dabei die oben angegebenen, für die Lage der Hauptpunkte geltenden, Verhältnisszahlen an Stelle der den Einzelschwerpunkten zukommenden zu verwenden. Hat man diese Bestimmung gemacht, so sind im weiteren Verlaufe der Rechnung nur noch Subtractionen und Additionen auszuführen. Durch Subtraction gewinnt man die Projectionen der in Frage kommenden Hauptstrecken auf die drei Coordinatenaxen und durch Addition dieser Differenzen mit den Coordinaten des Hauptpunktes, von dem man ausgeht, die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes. Beginnt man mit dem Hauptpunkt des Rumpfes, so gewinnt man die Projectionen der in Frage kommenden 11 Hauptstrecken auf die drei Coordinatenaxen, indem man von den Coordinaten eines jeden der 11 übrigen Hauptpunkte die entsprechenden Coordinaten des zu demselben Körpertheil gehörenden proximalen Gelenkmittelpunktes abzieht. Bezeichnet man allgemein die so entstehenden Differenzen der x, y und z-Coordinaten mit h_i', h_i'' und h_i''', wobei i die Nummer des betreffenden Körpertheils angiebt, und bedeuten ξ_1, η_1, ζ_1 die drei Coordinaten des Rumpfhauptpunktes, so hat

man zur Berechnung der Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers die Formeln:

$$x_0 = \xi_1 + h'_2 + h'_3 + h'_4 \cdots\cdots + h'_{12} = \xi_1 + \sum_2^{12} h'_i,$$

$$y_0 = \eta_1 + h''_2 + h''_3 + h''_4 \cdots\cdots + h''_{12} = \eta_1 + \sum_2^{12} h''_i,$$

$$z_0 = \zeta_1 + h'''_2 + h'''_3 + h'''_4 \cdots\cdots + h'''_{12} = \zeta_1 + \sum_2^{12} h'''_i.$$

Dies folgt einfach daraus, dass die Projection eines gebrochenen Linienzuges auf eine Gerade gleich der algebraischen Summe der Projectionen der einzelnen Strecken dieses Linienzuges auf dieselbe Gerade ist.

Endlich kann man wiederum einen Gelenkmechanismus zusammensetzen, welcher die Construction des Gesammtschwerpunktes mittelst der Hauptstrecken an einem Gelenkmodell des menschlichen Körpers selbstthätig ausführt. Man braucht zu diesem Zwecke nur einzelne Stäbe, Metallstreifen oder Cartonstreifen, von der Länge der in Frage kommenden Hauptstrecken gelenkig mit einander, und die so entstehende Kette von Stäben an dem einen Ende durch ein Gelenk mit dem Hauptpunkte des Rumpfes zu verbinden, und durch eine besondere Vorrichtung dafür zu sorgen, dass die Längsaxen der einzelnen Stäbe bei jeder Haltung des Körpers immer den ihnen entsprechenden innerhalb der Körpertheile gelegenen Hauptstrecken parallel bleiben. Dieser letztere Zweck lässt sich auf mechanischem Wege nur mit Hülfe einer grossen Anzahl von Gelenken erreichen. Schon bei einem System von fünf durch Gelenke mit einander verbundenen Körpern häufen sich die Hülfsgelenke des Mechanismus derartig[1]), dass selbst bei sehr geringer Reibung in den Gelenken der Mechanismus unverhältnissmässig viel schwerer spielt, als der auf die Einzelschwerpunkte gegründete. Es würde daher bei der Zerlegung des menschlichen Körpers in 12 Abschnitte ein automatisch wirkender Schwerpunktsmechanismus, welcher die Construction

1) Vgl. OTTO FISCHER. Ein zweiter Mechanismus zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes eines Systems von in beliebiger Weise durch Gelenke mit einander verbundenen Körpern. Nr. 264a des Nachtrags-Katalogs mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. Herausgegeben von der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1892.

mittelst der Hauptstrecken verwirklicht, zu complicirt werden. Dagegen erhält man einen sehr einfachen, theoretisch interessanten und auch praktisch werthvollen Apparat zur Gewinnung des Gesammtschwerpunktes, wenn man sich auf die aus den Hauptstrecken zusammengesetzte bewegliche Kette von 11 Gliedern beschränkt. Der Gesammtschwerpunkt stellt sich nur dann nicht selbstthätig ein, wenn man das Modell des Körpers in irgend eine Haltung bringt, sondern man ist in jedem Falle genöthigt, die einzelnen Glieder der Kette der Reihe nach den ihnen zugehörenden Hauptstrecken parallel zu richten. Stellt das Modell des menschlichen Körpers, an welchem die Kette angebracht ist, nur die Projection desselben auf die Gangebene dar, so brauchen die einzelnen Glieder der Kette nur durch Charnirgelenke verbunden zu sein. Bei einem räumlichen Modell des menschlichen Körpers müssen dagegen die Gelenkverbindungen der einzelnen Stäbe der Kette durch Kugelgelenke bewirkt sein.

II. Die Bahn des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers.

Ein Vergleich der verschiedenen, im I. Abschnitt ausführlich dargelegten Wege zur Bestimmung der Schwerpunktsbahn lehrt, dass die Methoden der Construction und der Gewinnung des Gesammtschwerpunktes mit Hülfe eines Gelenkmechanismus gegenüber der Methode der Rechnung den Vorzug der Anschaulichkeit besitzen. Dagegen wird man auf dem Wege der Rechnung im Allgemeinen eine grössere Genauigkeit der Resultate erzielen können als auf den beiden anderen Wegen; denn vor Rechenfehlern kann man sich durch stete Controle aller einzelnen Schritte schützen, kleine Ungenauigkeiten bei der Construction oder bei der Zusammensetzung eines Bewegungsmechanismus sind dagegen unvermeidlich. Da eine Ableitung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gesammtschwerpunktes nur dann möglich ist, wenn die Bahn desselben genügend genau bekannt ist, so ist man im vorliegenden Falle im Interesse der weiteren Untersuchung gezwungen, den mühsamen und zeitraubenden Weg der Rechnung zu beschreiten. Es bleiben dabei noch zwei Möglichkeiten. Entweder man leitet aus den im ersten Theile dieser Untersuchung festgestellten Coordinaten der Gelenkmittelpunkte zunächst die Coordinaten der Einzelschwerpunkte ab, und rechnet dann aus diesen nach einer der beiden im vorigen Abschnitt beschriebenen Methoden die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes aus. Oder man verschafft sich mit Umgehung der Einzelschwerpunkte zuerst die Coordinaten der Hauptpunkte für alle 12 Körpertheile, und leitet darauf aus diesen nach den oben angegebenen Formeln die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes ab.

Wenn nun auch der letztere Weg nach den früheren Auseinandersetzungen am schnellsten zum Ziele führt, so soll er

doch für die vorliegende Untersuchung nicht eingeschlagen werden, und zwar aus rein ökonomischen Gründen. Die Untersuchung der Bewegung der einzelnen Abschnitte des menschlichen Körpers beim Gehen, welche zwar in dem vorliegenden Theile der Arbeit noch nicht in Betracht gezogen werden soll, sondern den Gegenstand späterer Veröffentlichungen bilden wird, erfordert die Kenntnis der Bahnen der Einzelschwerpunkte und Systemschwerpunkte. Würde man jetzt für die Berechnung der Coordinaten des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers die Coordinaten der Hauptpunkte verwenden, so hätte man später die Coordinaten der Einzelschwerpunkte und Systemschwerpunkte aus den Coordinaten der Gelenkmittelpunkte oder auch der Hauptpunkte besonders zu berechnen. Leitet man dagegen jetzt gleich die Coordinaten der Einzelschwerpunkte ab, verschafft sich ferner im Anschluss an die geometrische Construction zunächst aus diesen die Coordinaten der wichtigeren Systemschwerpunkte, und schreitet auf diesem Wege endlich rechnerisch bis zu den Coordinaten des Gesammtschwerpunktes vor, so erreicht man zwar das zunächst gesteckte Ziel auf Umwegen, hat aber im Ganzen weniger Arbeit aufzuwenden, als wenn man jetzt die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes auf dem kürzesten Wege und dann später noch besonders die Coordinaten der Einzelschwerpunkte und Systemschwerpunkte berechnete. Die Berechnung ist nun genau nach den im vorigen Abschnitt auf den Seiten 18 bis 20 gemachten Angaben unter Zugrundelegung der in den Tabellen 10, 11 und 12 des I. Theiles niedergelegten Coordinaten der Gelenkmittelpunkte von mir selbst ausgeführt, und jeder einzelne Schritt sorgfältig controlirt worden, so dass Fehler so gut wie ausgeschlossen sind. Da mir diesmal keine Hülfskraft mehr zur Verfügung stand, meine zweifache Berufsthätigkeit mir aber verhältnissmässig wenig Zeit zur Erledigung derartiger umfangreicher Arbeiten übrig lässt, so beanspruchte die Ausführung der Berechnung der sämmtlichen Schwerpunktscoordinaten für alle drei Versuche einen Zeitraum von mehreren Jahren. Dies ist der Grund, weshalb der vorliegende zweite Theil der Untersuchung des menschlichen Ganges so spät nach dem ersten erscheint.

In den folgenden Tabellen 1 und 2 finden sich die Resultate dieser Coordinatenbestimmung zunächst für den I. und II. Versuch niedergelegt.

Nr.	Schwerpunkt des Oberarms						Schwerpunkt von: Unterarm + Hand						Nr.
	rechts			links			rechts			links			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	39,92	+19,05	117,75	36,34	−23,11	117,93	55,09	+25,31	88,79	43,13	−32,47	87,24	1
2	44,79	+18,61	119,07	43,15	−23,16	119,64	55,54	+25,89	88,10	53,58	−30,97	89,88	2
3	49,08	+18,38	120,38	49,83	−23,21	121,31	55,36	+26,81	88,42	63,67	−29,47	93,18	3
4	53,19	+18,43	121,26	56,21	−23,41	122,32	55,24	+27,83	89,15	72,88	−28,11	96,35	4
5	57,54	+18,62	121,79	62,69	−23,52	122,56	56,11	+28,69	89,88	81,51	−26,82	99,00	5
6	62,21	+18,77	121,77	69,14	−23,55	122,13	58,15	+29,20	90,26	89,37	−25,78	101,06	6
7	67,37	+18,97	121,09	75,59	−23,36	121,19	61,24	+30,03	90,12	96,63	−25,00	101,98	7
8	73,38	+19,21	119,74	82,39	−23,04	119,79	65,71	+30,87	89,44	103,86	−24,40	101,74	8
9	79,56	+19,38	118,34	88,75	−22,54	118,50	71,30	+31,46	88,37	110,21	−23,95	100,35	9
10	85,88	+19,80	117,33	94,76	−21,86	117,71	78,14	+31,87	87,25	115,75	−23,81	98,27	10
11	93,16	+20,35	116,71	100,97	−21,02	117,29	87,13	+31,97	86,71	121,00	−23,89	95,40	11
12	100,79	+20,90	116,58	106,86	−20,28	117,43	97,40	+31,95	85,12	125,01	−24,30	92,45	12
13	108,65	+21,33	116,92	112,82	−19,68	117,93	109,00	+31,86	85,19	127,94	−25,38	89,96	13
14	115,73	+21,58	117,96	117,85	−19,30	118,68	120,77	+31,32	86,41	129,71	−26,08	88,81	14
15	123,04	+21,81	119,78	122,55	−19,14	119,96	133,10	+30,54	89,50	130,72	−27,35	89,09	15
16	129,15	+22,10	121,38	126,25	−19,24	121,00	142,99	+29,83	92,99	131,41	−28,53	89,78	16
17	136,26	+22,53	122,48	130,72	−19,54	121,73	153,96	+29,02	97,09	132,69	−29,79	90,41	17
18	142,70	+22,90	122,72	135,08	−19,70	121,83	163,22	+28,08	100,34	134,77	−30,44	90,61	18
19	149,67	+23,02	122,38	140,13	−19,83	121,36	172,63	+27,32	102,80	137,92	−31,41	90,45	19
20	156,45	+22,96	121,55	145,59	−20,01	120,41	180,16	+26,59	104,08	142,07	−32,12	89,87	20
21	163,01	+22,59	120,45	151,50	−20,24	119,16	187,30	+26,10	103,97	147,23	−32,86	88,89	21
22	169,23	+21,94	119,24	157,89	−20,57	118,02	193,57	+25,83	102,70	153,60	−33,31	87,84	22
23	174,99	+21,40	118,28	164,53	−21,01	117,21	198,73	+25,69	100,28	161,10	−33,50	86,79	23
24	180,53	+20,74	117,85	171,77	−21,61	116,78	202,96	+25,32	97,08	169,99	−33,50	86,00	24
25	185,80	+20,16	117,81	179,13	−22,06	116,86	205,85	+25,61	93,64	179,57	−33,57	85,78	25
26	191,56	+19,53	118,07	187,08	−22,46	117,38	207,92	+26,05	90,73	190,81	−32,84	86,32	26
27	196,57	+19,10	118,59	194,01	−22,88	118,42	208,90	+26,54	88,55	201,42	−31,97	87,78	27
28	201,21	+18,61	119,61	201,04	−22,99	120,14	209,13	+27,04	88,17	211,99	−30,94	90,57	28
29	204,89	+18,39	120,54	207,32	−23,12	121,67	208,93	+27,56	88,54	221,25	−29,86	93,64	29
30	208,67	+18,37	121,28	213,74	−23,31	122,60	208,99	+27,92	89,24	230,32	−28,77	96,58	30
31	212,64	+18,81	121,56	219,83	−23,48	122,75	210,03	+28,78	89,92	238,32	−27,63	99,02	31

Nr.	Schwerpunkt des ganzen Armes						Schwerpunkt des Rumpfes			Schwerpunkt des Kopfes			Nr.
	rechts			links									
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	47,22	+22,06	103,82	39,61	−27,61	103,17	38,01	−1,72	108,55	38,19	−1,41	153,48	1
2	49,96	+22,11	104,17	48,17	−26,92	105,33	43,90	−1,75	109,92	44,18	−1,59	154,87	2
3	52,10	+22,43	105,01	56,49	−26,22	107,78	49,72	−1,76	111,22	50,63	−1,66	156,14	3
4	54,18	+22,95	105,82	64,23	−25,67	109,83	55,42	−1,75	112,00	56,52	−1,62	156,78	4
5	56,85	+23,46	106,44	71,74	−25,11	111,27	61,15	−1,71	112,09	62,47	−1,52	156,78	5
6	60,26	+23,79	106,61	78,87	−24,62	112,00	66,82	−1,66	111,52	68,36	−1,32	156,18	6
7	64,42	+24,29	106,19	85,71	−24,15	111,95	72,53	−1,54	110,37	74,34	−1,11	155,05	7
8	69,69	+24,82	105,17	92,72	−23,69	111,11	78,78	−1,37	108,84	80,74	−0,83	153,67	8
9	75,50	+25,19	104,92	99,07	−23,22	109,77	85,08	−1,13	107,73	86,89	−0,49	152,53	9
10	82,16	+25,61	102,86	104,86	−22,80	108,36	91,40	−0,69	107,14	92,85	−0,05	151,86	10
11	90,26	+25,94	102,28	110,60	−22,40	106,76	98,50	0	106,97	99,16	+0,47	151,70	11
12	99,16	+26,22	101,45	115,59	−22,21	105,41	105,28	+0,59	107,33	105,14	+0,95	152,14	12
13	108,82	+26,39	101,66	120,09	−22,42	104,48	111,74	+1,16	107,84	111,15	+1,39	152,98	13
14	118,15	+26,26	102,78	123,55	−22,56	104,31	117,61	+1,48	108,88	116,75	+1,59	154,20	14
15	127,88	+26,01	105,22	126,48	−23,09	105,11	123,49	+1,68	110,47	122,76	+1,66	155,71	15
16	135,81	+25,82	107,72	128,73	−23,71	105,98	128,76	+1,74	111,53	127,82	+1,64	156,74	16
17	144,79	+25,65	110,75	131,67	−24,47	106,67	134,41	+1,71	112,13	133,83	+1,57	157,24	17
18	152,57	+25,39	111,96	134,93	−24,87	106,81	139,72	+1,61	112,01	139,39	+1,50	156,95	18
19	160,71	+25,09	113,01	139,07	−25,40	106,49	145,42	+1,54	111,25	145,44	+1,43	156,11	19
20	167,85	+24,71	113,15	143,90	−25,83	105,72	151,16	+1,37	110,09	151,54	+1,34	154,92	20
21	174,69	+24,28	112,52	149,15	−26,31	104,60	157,08	+1,18	108,87	157,69	+1,15	153,71	21
22	180,94	+23,81	111,77	155,83	−26,70	103,50	163,29	+0,79	108,00	163,91	+0,79	152,72	22
23	186,41	+23,46	109,62	162,88	−27,02	102,58	169,67	+0,28	107,50	170,11	+0,31	152,08	23
24	191,32	+22,94	107,86	170,91	−27,33	102,00	176,53	−0,39	107,47	176,42	−0,30	151,96	24
25	195,44	+22,78	106,18	179,34	−27,60	101,91	183,00	−1,06	107,76	182,41	−0,85	152,33	25
26	199,43	+22,67	104,92	188,87	−27,45	102,44	189,67	−1,41	108,32	188,88	−1,31	153,08	26
27	202,50	+22,68	104,14	197,57	−27,25	103,68	195,71	−1,66	109,17	194,91	−1,54	154,10	27
28	205,02	+22,66	104,49	206,31	−26,81	105,92	201,80	−1,75	110,35	201,28	−1,59	155,37	28
29	206,83	+22,80	105,15	214,02	−26,36	108,19	207,18	−1,73	111,32	207,00	−1,55	156,33	29
30	208,82	+22,96	105,87	221,71	−25,94	110,08	212,50	−1,64	112,02	212,70	−1,28	156,92	30
31	211,38	+23,61	106,34	228,71	−25,48	111,34	217,87	−1,63	111,98	218,32	−1,00	156,59	31

Nr.	Schwerpunkt von: Rumpf + Kopf			Schwerpunkt beider Arme			Schwerpunkt von: Rumpf + Kopf + beide Arme			Nr.
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	38,04	− 1,68	114,93	44,42	− 2,78	103,50	39,36	− 1,91	112,56	1
2	43,98	− 1,73	116,30	49,07	− 2,41	104,75	45,03	− 1,87	113,91	2
3	49,85	− 1,75	117,60	54,30	− 1,95	106,40	50,77	− 1,79	115,28	3
4	55,58	− 1,73	118,36	59,21	− 1,36	107,83	56,33	− 1,65	116,18	4
5	61,34	− 1,68	118,44	64,30	− 0,83	108,86	61,95	− 1,50	116,46	5
6	67,04	− 1,61	117,86	69,57	− 0,42	109,31	67,56	− 1,36	116,09	6
7	72,79	− 1,48	116,71	75,07	+ 0,07	109,07	73,26	− 1,16	115,13	7
8	79,06	− 1,29	115,21	81,21	+ 0,57	108,14	79,51	− 0,90	113,75	8
9	85,34	− 1,04	114,09	87,33	+ 0,99	107,35	85,75	− 0,62	112,69	9
10	91,61	− 0,60	113,49	93,51	+ 1,41	105,61	92,00	− 0,18	111,86	10
11	98,59	+ 0,07	113,32	100,43	+ 1,77	104,52	98,97	+ 0,42	111,50	11
12	105,26	+ 0,64	113,69	107,38	+ 2,01	103,43	105,70	+ 0,92	111,57	12
13	111,66	+ 1,19	114,25	114,46	+ 1,99	103,07	112,24	+ 1,36	111,94	13
14	117,49	+ 1,50	115,32	120,85	+ 1,85	103,55	118,19	+ 1,57	112,88	14
15	123,39	+ 1,68	116,89	127,18	+ 1,46	105,17	124,17	+ 1,63	114,46	15
16	128,63	+ 1,73	117,95	132,27	+ 1,06	106,85	129,38	+ 1,59	115,65	16
17	134,33	+ 1,69	118,54	138,23	+ 0,59	108,71	135,14	+ 1,46	116,51	17
18	139,67	+ 1,50	118,39	143,75	+ 0,26	109,39	140,51	+ 1,31	116,53	18
19	145,42	+ 1,52	117,62	149,89	− 0,16	109,75	146,35	+ 1,17	115,99	19
20	151,21	+ 1,37	116,46	155,88	− 0,56	109,44	152,18	+ 0,97	115,01	20
21	157,17	+ 1,18	115,24	162,07	− 1,02	108,56	158,18	+ 0,72	113,86	21
22	163,38	+ 0,79	114,35	168,39	− 1,45	107,64	164,42	+ 0,33	112,96	22
23	169,73	+ 0,28	113,83	174,65	− 1,78	106,10	170,75	− 0,15	112,23	23
24	176,51	− 0,38	113,79	181,12	− 2,20	104,93	177,46	− 0,76	111,96	24
25	182,92	− 1,03	114,09	187,39	− 2,41	104,05	183,85	− 1,32	112,01	25
26	189,56	− 1,40	114,68	194,15	− 2,39	103,68	190,51	− 1,60	112,40	26
27	195,60	− 1,64	115,55	200,04	− 2,29	103,91	196,52	− 1,77	113,14	27
28	201,73	− 1,73	116,74	205,67	− 2,08	105,21	202,55	− 1,80	114,35	28
29	207,15	− 1,70	117,71	210,43	− 1,78	106,67	207,83	− 1,72	115,42	29
30	212,61	− 1,59	118,40	215,27	− 1,49	107,98	213,16	− 1,57	116,24	30
31	217,93	− 1,54	118,31	220,05	− 0,94	108,84	218,37	− 1,42	116,35	31

Nr	Schwerpunkt des Oberschenkels						Schwerpunkt des Unterschenkels						Nr.
	rechts			links			rechts			links			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	38,90	+ 8,39	65,71	44,73	− 10,45	69,60	25,64	+ 9,50	34,77	51,58	− 8,37	33,20	1
2	47,59	+ 8,20	67,22	48,51	− 10,40	70,26	37,99	+ 9,06	35,52	52,47	− 8,36	33,43	2
3	55,81	+ 8,08	68,85	52,06	− 10,15	70,83	50,49	+ 8,65	35,92	53,18	− 8,08	33,63	3
4	63,37	+ 7,87	70,14	55,53	− 9,89	71,29	62,64	+ 8,17	35,86	53,88	− 7,78	33,80	4
5	70,31	+ 7,57	70,64	59,23	− 9,62	71,29	74,51	+ 7,62	35,48	54,80	− 7,40	33,89	5
6	76,62	+ 7,34	70,19	63,19	− 9,48	70,92	85,72	+ 7,27	34,88	56,17	− 7,15	33,88	6
7	82,17	+ 6,99	68,68	67,51	− 9,35	70,13	95,56	+ 6,91	34,12	57,90	− 6,93	33,74	7
8	88,11	+ 6,55	66,76	72,54	− 9,30	69,22	104,68	+ 6,56	33,52	60,26	− 6,90	33,71	8
9	94,84	+ 6,59	65,89	78,10	− 9,39	68,67	112,23	+ 6,42	33,00	63,35	− 7,28	33,97	9
10	102,15	+ 7,13	65,09	84,28	− 9,50	68,31	118,59	+ 6,53	32,43	67,44	− 7,91	34,43	10
11	109,35	+ 7,79	65,92	91,83	− 9,54	68,16	124,13	+ 6,94	31,89	73,39	− 8,77	35,24	11
12	116,21	+ 8,92	66,81	100,21	− 9,77	67,92	128,73	+ 7,97	32,28	81,65	− 9,72	36,00	12
13	121,87	+ 9,56	67,26	109,06	− 9,47	67,63	131,90	+ 8,13	32,38	92,11	− 10,01	36,87	13
14	125,95	+ 10,02	67,80	117,71	− 9,08	68,36	132,91	+ 8,29	32,27	103,51	− 9,92	37,64	14
15	129,36	+ 9,98	68,46	126,09	− 8,67	70,01	133,38	+ 7,92	32,23	115,95	− 9,46	38,14	15
16	132,45	+ 9,70	68,79	133,46	− 8,45	71,34	133,75	+ 7,42	32,20	126,78	− 9,05	38,16	16
17	135,65	+ 9,39	68,91	140,97	− 8,24	72,33	134,31	+ 7,01	32,12	139,50	− 8,16	37,75	17
18	138,95	+ 9,08	68,77	147,60	− 8,08	72,53	134,97	+ 6,70	32,04	150,88	− 8,17	37,06	18
19	142,80	+ 8,93	68,26	153,88	− 7,89	71,88	136,07	+ 6,55	31,91	162,16	− 7,87	36,11	19
20	147,03	+ 8,66	67,46	159,46	− 7,65	70,50	137,73	+ 6,27	31,70	172,17	− 7,68	35,23	20
21	151,45	+ 8,55	66,84	164,92	− 7,34	68,85	139,69	+ 6,22	31,81	180,49	− 7,50	34,60	21
22	156,70	+ 8,43	66,57	171,49	− 7,55	68,12	142,62	+ 6,42	32,24	187,65	− 7,53	34,00	22
23	162,88	+ 8,31	66,32	179,01	− 8,32	68,40	146,76	+ 6,77	32,72	194,06	− 7,95	33,54	23
24	170,10	+ 8,17	66,18	185,40	− 9,09	68,27	152,47	+ 7,21	33,38	198,69	− 8,53	33,06	24
25	178,20	+ 8,17	65,87	191,61	− 9,99	68,83	160,51	+ 7,86	33,98	202,88	− 9,07	33,25	25
26	187,49	+ 8,08	65,58	197,72	− 10,56	69,53	171,67	+ 8,12	34,15	206,58	− 9,46	33,62	26
27	196,56	+ 7,71	66,12	202,28	− 10,71	70,10	183,45	+ 7,78	34,86	208,03	− 9,45	33,72	27
28	205,22	+ 7,51	67,38	206,39	− 10,75	70,66	195,68	+ 7,39	35,13	209,14	− 9,41	33,86	28
29	212,89	+ 7,40	68,81	210,14	− 10,50	71,04	207,04	+ 7,05	35,71	210,10	− 9,07	33,95	29
30	220,70	+ 7,47	70,00	213,57	− 10,35	71,33	218,97	+ 6,95	35,59	210,68	− 8,91	34,07	30
31	226,45	+ 7,42	70,35	217,13	− 10,35	71,20	229,83	+ 7,01	35,14	212,03	− 8,85	34,05	31

Nr.	Schwerpunkt des Fusses						Schwerpunkt von: Unterschenkel + Fuss						Nr.
	rechts			links			rechts			links			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	4,86	+ 7,30	16,85	56,87	− 6,23	6,07	20,38	+ 8,97	30,24	52,92	− 7,83	26,34	1
2	19,27	+ 7,18	15,87	56,94	− 6,23	6,10	33,25	+ 8,58	30,55	53,60	− 7,82	26,52	2
3	35,58	+ 6,99	13,67	56,93	− 6,20	6,11	46,72	+ 8,23	30,29	54,13	− 7,60	26,67	3
4	52,80	+ 6,78	11,17	56,98	− 6,19	6,14	60,15	+ 7,82	29,61	54,66	− 7,38	26,80	4
5	70,97	+ 6,48	9,38	56,99	− 6,16	6,16	73,61	+ 7,31	28,88	55,40	− 7,09	26,87	5
6	88,88	+ 6,32	8,82	56,99	− 6,13	6,18	86,52	+ 7,03	28,29	56,38	− 6,89	26,87	6
7	105,53	+ 6,70	10,03	57,00	− 6,10	6,20	98,08	+ 6,86	28,03	57,67	− 6,72	26,77	7
8	119,84	+ 7,66	12,64	57,05	− 6,09	6,34	108,52	+ 6,84	28,24	59,45	− 6,70	26,79	8
9	127,92	+ 7,73	12,71	57,34	− 6,35	6,81	116,20	+ 6,75	27,87	61,88	− 7,04	27,10	9
10	131,33	+ 6,82	10,00	58,50	− 6,78	7,60	121,81	+ 6,60	26,76	65,18	− 7,62	27,64	10
11	134,81	+ 6,10	7,76	60,42	− 7,13	9,19	126,83	+ 6,78	25,79	70,11	− 8,36	28,65	11
12	135,68	+ 6,04	6,77	63,94	− 7,15	12,50	130,49	+ 7,48	25,83	77,17	− 9,07	30,05	12
13	135,91	+ 6,12	6,68	72,08	− 7,68	16,41	132,91	+ 7,62	25,88	87,04	− 9,42	31,69	13
14	135,92	+ 6,09	6,71	83,42	− 7,03	17,61	133,67	+ 7,73	25,80	98,43	− 9,34	32,57	14
15	135,93	+ 6,04	6,74	98,76	− 7,15	16,33	134,03	+ 7,44	25,78	111,60	− 8,88	32,62	15
16	135,93	+ 6,01	6,77	113,08	− 6,68	14,03	134,30	+ 7,06	25,77	123,31	− 8,45	32,06	16
17	135,94	+ 5,96	6,80	131,24	− 6,55	11,35	134,72	+ 6,74	25,71	137,41	− 7,75	31,07	17
18	135,95	+ 5,90	6,83	148,50	− 6,72	9,36	135,22	+ 6,50	25,66	150,28	− 7,80	30,05	18
19	135,97	+ 5,86	6,87	166,68	− 6,91	8,54	136,04	+ 6,38	25,87	163,30	− 7,63	29,13	19
20	136,00	+ 5,80	6,94	183,98	− 7,49	9,79	137,29	+ 6,15	25,44	175,16	− 7,63	28,79	20
21	136,28	+ 5,82	7,17	197,72	− 8,69	12,43	138,83	+ 6,12	25,58	184,85	− 7,80	28,99	21
22	136,83	+ 5,97	7,74	205,44	− 8,97	12,30	141,16	+ 6,31	26,04	192,15	− 7,89	28,55	22
23	137,76	+ 6,15	8,66	208,35	− 8,36	9,43	144,48	+ 6,61	26,63	197,68	− 8,05	27,44	23
24	139,59	+ 5,98	10,54	211,40	− 8,14	7,34	149,21	+ 6,90	27,60	201,91	− 8,43	26,55	24
25	143,27	+ 5,87	13,23	212,62	− 7,60	6,39	156,15	+ 7,36	28,73	205,34	− 8,70	26,45	25
26	151,42	+ 5,71	16,45	212,64	− 7,76	6,24	166,55	+ 7,51	29,90	208,11	− 9,03	26,69	26
27	162,92	+ 5,15	16,80	212,66	− 7,77	6,30	178,26	+ 7,11	30,29	209,20	− 9,02	26,78	27
28	177,34	+ 4,66	15,53	212,68	− 7,79	6,37	191,04	+ 6,70	30,40	210,04	− 9,00	26,91	28
29	192,31	+ 4,53	13,35	212,70	− 7,80	6,43	203,31	+ 6,41	30,05	210,76	− 8,75	26,99	29
30	209,06	+ 4,66	10,88	212,72	− 7,81	6,50	216,46	+ 6,37	29,34	211,42	− 8,63	27,09	30
31	226,00	+ 5,14	9,00	212,75	− 7,83	6,58	228,86	+ 6,54	28,53	212,21	− 8,59	27,10	31

Nr	Schwerpunkt des ganzen Beins						Schwerpunkt beider Beine			Gesammt-schwerpunkt des ganzen Körpers			Nr
	rechts			links									
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	31,88	+ 8,61	52,27	47,83	− 9,46	53,20	39,86	− 0,43	52,74	39,55	− 1,36	90,25	1
2	42,16	+ 8,34	53,32	50,44	− 9,42	53,72	46,30	− 0,54	53,52	45,50	− 1,37	91,38	2
3	52,36	+ 8,14	54,24	52,84	− 9,18	54,09	52,60	− 0,52	54,17	51,45	− 1,32	92,49	3
4	62,15	+ 7,85	54,78	55,20	− 8,94	54,43	58,68	− 0,55	54,61	57,21	− 1,24	93,21	4
5	71,56	+ 7,47	54,81	57,78	− 8,66	54,45	64,67	− 0,60	54,63	62,96	− 1,16	93,40	5
6	80,37	+ 7,22	54,31	60,61	− 8,50	54,23	70,49	− 0,64	54,27	68,65	− 1,09	93,03	6
7	88,20	+ 6,94	53,27	63,78	− 8,35	53,70	75,99	− 0,71	53,49	74,28	− 0,99	92,14	7
8	95,85	+ 6,66	52,16	67,58	− 8,31	53,14	81,72	− 0,83	52,65	80,33	− 0,87	90,96	8
9	102,94	+ 6,65	51,48	71,95	− 8,50	52,91	87,45	− 0,93	52,20	86,38	− 0,74	90,13	9
10	109,60	+ 6,93	51,12	77,04	− 8,79	52,90	93,32	− 0,93	52,01	92,49	− 0,46	89,54	10
11	115,22	+ 7,41	50,71	83,60	− 9,09	53,19	99,41	− 0,84	51,95	99,13	− 0,05	89,29	11
12	121,62	+ 8,37	51,28	91,48	− 9,50	53,57	106,55	− 0,57	52,43	106,02	+ 0,36	89,51	12
13	126,05	+ 8,82	51,58	101,09	− 9,45	54,01	113,57	− 0,32	52,80	112,74	+ 0,73	89,88	13
14	128,88	+ 9,15	51,88	110,40	− 9,18	54,80	119,64	− 0,02	53,34	118,73	+ 0,98	90,67	14
15	131,13	+ 9,02	52,28	120,60	− 8,75	55,84	125,87	+ 0,14	54,06	124,80	+ 1,07	91,93	15
16	133,15	+ 8,70	52,49	129,61	− 8,45	56,45	131,38	+ 0,13	54,47	130,13	+ 1,05	92,83	16
17	135,30	+ 8,39	52,55	139,62	− 8,05	56,69	137,46	+ 0,17	54,62	136,01	+ 0,98	93,43	17
18	137,54	+ 8,10	52,43	148,52	− 7,97	56,43	143,03	+ 0,07	54,43	141,45	+ 0,85	93,37	18
19	140,24	+ 7,96	52,19	157,45	− 7,80	55,68	148,85	+ 0,08	53,94	147,28	+ 0,76	92,85	19
20	143,34	+ 7,78	51,53	165,41	− 7,64	54,69	154,38	+ 0,04	53,11	153,00	+ 0,62	91,92	20
21	146,67	+ 7,63	51,20	172,47	− 7,51	53,74	159,57	+ 0,06	52,47	159,07	+ 0,47	90,96	21
22	150,81	+ 7,63	51,21	179,32	− 7,68	53,12	165,07	− 0,03	52,17	164,66	+ 0,20	90,29	22
23	155,91	+ 7,67	51,28	186,09	− 8,22	52,88	171,00	− 0,28	52,08	170,84	− 0,20	89,79	23
24	162,18	+ 7,69	51,56	191,66	− 8,84	52,46	176,92	− 0,58	52,01	177,26	− 0,69	89,60	24
25	169,84	+ 7,86	51,79	196,81	− 9,50	52,77	183,33	− 0,82	52,28	183,66	− 1,13	89,73	25
26	179,55	+ 7,86	52,06	201,66	− 9,98	53,29	190,61	− 1,06	52,68	190,55	− 1,40	90,12	26
27	189,62	+ 7,48	52,54	204,90	− 10,07	53,08	197,26	− 1,30	53,11	196,80	− 1,59	90,75	27
28	199,85	+ 7,20	53,36	208,77	− 10,09	54,08	204,31	− 1,45	53,72	203,21	− 1,67	91,74	28
29	209,26	+ 7,02	54,12	210,37	− 9,84	54,35	209,82	− 1,41	54,24	208,57	− 1,60	92,60	29
30	218,78	+ 7,05	54,59	212,76	− 9,70	54,56	215,77	− 1,33	54,58	214,13	− 1,48	93,24	30
31	227,36	+ 7,09	54,50	215,27	− 9,68	54,49	221,32	− 1,30	54,50	219,47	− 1,38	93,28	31

Nr.	Schwerpunkt des Oberarms rechts x	y	z	links x	y	z	Schwerpunkt des Unterarms rechts x	y	z	links x	y	z	Nr.
1	46,26	+20,37	118,14	42,69	−22,77	116,50	65,78	+26,64	93,82	44,53	−33,65	85,23	1
2	51,34	+20,18	118,52	49,59	−22,69	117,05	68,24	+26,63	91,41	54,45	−32,25	85,70	2
3	56,16	+19,46	119,45	56,48	−22,48	118,43	69,64	+26,37	89,87	64,81	−30,33	87,50	3
4	60,88	+19,05	120,55	63,31	−22,38	120,28	70,33	+26,53	89,33	75,51	−28,34	90,54	4
5	64,95	+18,87	121,32	69,69	−22,43	121,80	70,79	+26,99	89,39	85,18	−26,74	94,18	5
6	69,27	+18,71	121,68	76,35	−22,64	122,73	71,63	+27,47	89,48	94,57	−25,03	97,29	6
7	74,04	+18,79	121,61	83,21	−22,80	122,83	73,32	+27,76	89,43	103,60	−23,64	100,32	7
8	78,62	+18,81	121,14	89,23	−22,78	122,32	75,75	+28,31	89,11	111,01	−22,63	102,22	8
9	84,54	+18,94	120,14	96,28	−22,56	121,26	79,64	+28,80	88,47	119,04	−21,94	103,38	9
10	90,50	+19,09	118,00	102,67	−22,17	120,00	84,42	+29,41	87,60	125,88	−21,51	103,12	10
11	97,26	+19,41	117,75	109,08	−21,60	118,87	90,47	+30,07	86,68	132,34	−21,48	101,83	11
12	104,08	+19,85	117,21	114,92	−20,90	118,24	98,19	+30,54	86,10	137,70	−21,62	99,69	12
13	111,69	+20,45	117,03	120,57	−20,30	117,98	107,36	+30,99	85,64	142,31	−22,49	96,90	13
14	118,99	+20,94	117,35	125,80	−19,84	118,40	117,26	+31,08	85,66	145,62	−23,01	94,21	14
15	126,47	+21,34	118,22	131,20	−19,60	119,18	128,65	+31,28	86,38	148,11	−24,22	91,80	15
16	133,43	+21,57	119,76	136,05	−19,43	120,23	139,91	+30,90	88,47	149,53	−25,73	90,79	16
17	140,16	+21,90	121,30	140,47	−19,55	121,08	150,76	+30,33	91,29	150,34	−27,23	90,51	17
18	146,86	+22,39	122,27	144,86	−19,79	121,56	161,41	+29,63	94,23	151,27	−28,80	90,50	18
19	153,87	+22,66	122,56	149,49	−20,17	121,54	171,87	+28,75	97,05	152,65	−30,57	90,28	19
20	160,93	+22,54	122,24	154,43	−20,49	121,22	181,59	+27,69	99,33	155,04	−31,72	90,15	20
21	167,48	+22,44	121,62	159,41	−20,57	120,58	189,74	+26,88	100,65	158,32	−32,87	89,74	21
22	173,94	+22,13	120,77	164,84	−20,88	119,59	197,11	+26,17	100,91	162,61	−33,63	89,08	22
23	180,92	+21,56	119,73	171,58	−21,13	118,44	204,28	+25,82	99,94	168,84	−34,23	88,18	23
24	187,00	+21,03	118,78	178,21	−21,45	117,70	209,75	+25,36	98,08	176,02	−34,32	87,32	24
25	192,78	+20,48	118,25	185,30	−21,88	117,22	214,11	+25,53	95,88	184,67	−33,72	86,52	25
26	198,13	+19,99	118,11	192,53	−22,17	117,19	217,15	+25,79	93,00	194,08	−33,53	86,18	26
27	203,62	+19,55	118,36	199,88	−22,41	117,64	219,40	+25,91	90,49	204,70	−32,64	86,64	27
28	208,52	+19,26	118,96	206,70	−22,58	118,68	220,05	+26,63	88,90	215,19	−31,38	88,15	28
29	212,93	+18,86	120,15	213,33	−22,75	120,32	221,40	+26,65	88,93	225,20	−30,29	90,92	29
30	216,83	+18,47	121,20	219,75	−23,02	121,88	221,87	+27,12	89,39	234,75	−28,79	94,16	30
31	221,10	+18,42	122,03	226,45	−23,35	122,87	222,70	+27,65	89,87	244,17	−27,49	97,17	31

Nr.	Schwerpunkt des ganzen Armes rechts x	y	z	links x	y	z	Schwerpunkt des Rumpfes x	y	z	Schwerpunkt des Kopfes x	y	z	Nr.
1	55,65	+23,39	106,44	43,58	−28,00	101,46	44,05	−0,92	107,63	42,73	−0,96	152,43	1
2	59,47	+23,28	105,48	51,93	−27,29	101,97	50,30	−1,11	108,45	48,71	−1,35	153,33	2
3	62,64	+22,78	105,22	60,49	−26,26	103,55	56,18	−1,22	109,79	54,76	−1,49	154,65	3
4	65,43	+22,65	105,53	69,18	−25,25	105,98	61,97	−1,29	110,98	61,05	−1,47	156,04	4
5	67,76	+22,78	105,96	77,14	−24,50	108,51	67,45	−1,35	111,78	66,81	−1,35	156,95	5
6	70,41	+22,92	106,19	85,11	−23,79	110,49	73,07	−1,46	112,10	72,82	−1,18	157,20	6
7	73,69	+23,10	106,13	93,02	−23,20	112,00	78,91	−1,44	111,82	79,04	−0,93	156,77	7
8	77,24	+23,38	105,73	99,71	−22,71	112,65	84,09	−1,42	110,95	84,57	−0,76	155,89	8
9	82,18	+23,68	104,91	107,23	−22,26	112,66	90,27	−1,29	109,49	91,18	−0,50	154,54	9
10	87,58	+24,05	103,84	113,83	−21,85	111,88	96,31	−1,12	108,23	97,38	−0,27	153,30	10
11	93,99	+24,54	102,81	120,27	−21,54	110,67	103,00	−0,79	107,50	103,90	+0,09	152,46	11
12	101,25	+24,99	102,25	125,88	−21,25	109,32	109,68	−0,27	107,18	110,20	+0,53	152,11	12
13	109,61	+25,52	101,93	131,03	−21,35	107,84	116,70	+0,37	107,38	116,70	+0,98	152,30	13
14	118,16	+25,82	102,11	135,33	−21,36	106,76	123,00	+0,84	107,86	122,58	+1,33	152,96	14
15	127,52	+26,12	102,90	139,33	−21,82	106,01	129,11	+1,29	108,92	128,65	+1,55	154,08	15
16	136,55	+26,06	104,71	142,51	−22,46	106,07	134,84	+1,46	110,25	134,54	+1,62	155,43	16
17	145,26	+25,95	106,87	145,22	−23,24	106,38	140,49	+1,53	111,33	140,26	+1,62	156,49	17
18	153,86	+25,87	108,78	147,94	−24,12	106,02	146,14	+1,63	111,93	145,94	+1,61	156,98	18
19	162,53	+25,59	110,29	151,01	−25,17	106,50	151,92	+1,54	111,91	151,84	+1,50	156,81	19
20	170,87	+25,02	111,22	154,72	−25,89	106,28	157,71	+1,31	111,32	157,86	+1,30	156,10	20
21	178,19	+24,58	111,53	158,89	−26,49	105,75	163,20	+1,30	110,33	163,53	+1,29	155,00	21
22	185,08	+24,07	111,22	163,77	−27,01	104,91	168,86	+1,11	109,23	169,28	+1,09	154,00	22
23	192,16	+23,61	110,21	170,26	−27,43	103,88	175,60	+0,77	108,32	175,93	+0,77	153,04	23
24	197,94	+23,11	108,82	177,16	−27,64	103,09	182,07	+0,31	107,88	182,17	+0,33	152,50	24
25	203,04	+22,91	107,49	185,00	−27,58	102,45	188,98	−0,31	107,77	188,52	−0,14	152,31	25
26	207,28	+22,78	106,03	193,28	−27,63	102,27	195,48	−0,90	107,97	194,50	−0,61	152,60	26
27	211,21	+22,61	104,95	202,20	−27,33	102,73	201,02	−1,25	108,50	200,57	−1,01	153,31	27
28	214,35	+22,80	104,50	210,78	−26,81	104,00	207,84	−1,38	109,52	206,45	−1,22	154,40	28
29	217,00	+22,71	105,13	219,04	−26,38	106,18	213,59	−1,53	110,86	212,40	−1,40	155,69	29
30	219,25	+22,63	105,90	226,97	−25,80	108,55	219,16	−1,70	111,79	218,16	−1,51	156,70	30
31	221,87	+22,86	106,56	234,07	−25,34	110,51	224,83	−1,76	112,35	224,09	−1,43	157,22	31

Nr.	Schwerpunkt von: Rumpf + Kopf			Schwerpunkt beider Arme			Schwerpunkt von: Rumpf + Kopf + beide Arme			Nr.
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	43,86	− 0,93	113,99	49,62	− 2,31	103,95	45,05	− 1,22	111,91	1
2	50,07	− 1,14	114,82	55,70	− 2,01	103,73	51,24	− 1,32	112,52	2
3	55,98	− 1,26	116,16	61,57	− 1,74	104,39	57,14	− 1,36	113,72	3
4	61,84	− 1,32	117,38	67,31	− 1,30	105,76	62,97	− 1,32	114,97	4
5	67,36	− 1,35	118,19	72,45	− 0,86	107,24	68,41	− 1,25	115,92	5
6	73,03	− 1,42	118,50	77,76	− 0,44	108,34	74,01	− 1,22	116,40	6
7	78,93	− 1,37	118,20	83,36	− 0,05	109,07	79,85	− 1,10	116,31	7
8	84,16	− 1,33	117,33	88,48	+ 0,34	109,19	85,05	− 0,98	115,65	8
9	90,40	− 1,18	115,89	94,71	+ 0,71	108,79	91,29	− 0,79	114,42	9
10	96,46	− 1,00	114,63	100,71	+ 1,10	107,86	97,34	− 0,57	113,23	10
11	103,13	− 0,67	113,88	107,13	+ 1,50	106,74	103,96	− 0,22	112,40	11
12	109,75	− 0,16	113,56	113,57	+ 1,87	105,79	110,54	+ 0,26	111,95	12
13	116,70	+ 0,46	113,76	120,32	+ 2,09	104,89	117,45	+ 0,80	111,92	13
14	122,94	+ 0,91	114,26	126,75	+ 2,23	104,44	123,73	+ 1,18	112,23	14
15	129,04	+ 1,33	115,33	133,43	+ 2,15	104,46	129,95	+ 1,50	113,08	15
16	134,80	+ 1,48	116,67	139,54	+ 1,80	105,39	135,78	+ 1,55	114,34	16
17	140,46	+ 1,54	117,74	145,24	+ 1,36	106,63	141,45	+ 1,50	115,44	17
18	146,11	+ 1,63	118,33	150,90	+ 0,88	107,70	147,10	+ 1,47	116,13	18
19	151,01	+ 1,53	118,29	156,77	+ 0,21	108,40	152,92	+ 1,26	116,24	19
20	157,73	+ 1,31	117,68	162,80	− 0,44	108,75	158,78	+ 0,95	115,83	20
21	163,25	+ 1,30	116,69	168,54	− 0,96	108,64	164,35	+ 0,83	115,02	21
22	168,92	+ 1,11	115,59	174,43	− 1,47	108,07	170,06	+ 0,58	114,03	22
23	175,65	+ 0,77	114,67	181,21	− 1,91	107,05	176,80	+ 0,22	113,09	23
24	182,08	+ 0,31	114,22	187,55	− 2,27	105,96	183,21	− 0,22	112,51	24
25	188,91	− 0,29	114,09	194,02	− 2,34	104,07	189,97	− 0,71	112,20	25
26	195,34	− 0,86	114,31	200,28	− 2,43	104,15	196,36	− 1,18	112,21	26
27	201,73	− 1,22	114,86	206,71	− 2,36	103,84	202,76	− 1,46	112,58	27
28	207,63	− 1,36	115,89	212,57	− 2,01	104,25	208,65	− 1,49	113,48	28
29	213,42	− 1,51	117,17	218,01	− 1,84	105,66	214,37	− 1,58	114,79	29
30	219,02	− 1,67	118,17	223,11	− 1,59	107,23	219,87	− 1,65	115,91	30
31	224,72	− 1,71	118,72	228,42	− 1,24	108,54	225,40	− 1,61	116,61	31

Nr.	Schwerpunkt des Oberschenkels						Schwerpunkt des Unterschenkels						Nr.
	rechts			links			rechts			links			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	39,73	+ 9,37	65,22	52,72	− 9,23	68,69	23,12	+ 9,54	33,71	63,64	− 7,73	33,11	1
2	49,37	+ 9,34	65,68	57,45	− 9,45	69,27	34,15	+ 9,61	34,42	65,66	− 7,88	33,22	2
3	58,26	+ 9,09	67,03	61,58	− 9,64	70,19	46,18	+ 9,20	35,12	66,93	− 8,02	33,39	3
4	66,38	+ 8,80	68,39	65,42	− 9,60	70,70	58,67	+ 8,84	35,73	67,83	− 7,84	33,47	4
5	73,75	+ 8,57	69,56	68,93	− 9,56	71,04	70,36	+ 8,55	36,00	68,52	− 7,68	33,58	5
6	80,75	+ 8,26	70,35	72,48	− 9,51	71,14	82,29	+ 8,22	35,76	69,24	− 7,48	33,68	6
7	87,37	+ 7,93	70,35	76,34	− 9,47	70,92	94,07	+ 7,88	35,03	70,35	− 7,33	33,68	7
8	92,87	+ 7,62	69,32	80,01	− 9,41	70,35	103,80	+ 7,65	34,21	71,59	− 7,15	33,60	8
9	98,54	+ 7,09	67,27	84,65	− 9,28	69,41	113,61	+ 7,23	33,30	73,50	− 7,01	33,52	9
10	104,60	+ 6,83	65,87	89,63	− 9,24	68,74	121,49	+ 6,78	32,79	76,09	− 7,10	33,66	10
11	112,52	+ 7,13	65,90	95,91	− 9,38	68,33	129,12	+ 6,53	32,56	80,13	− 7,67	34,00	11
12	119,90	+ 7,51	65,93	102,84	− 9,49	68,05	135,13	+ 6,35	32,09	85,33	− 8,44	34,64	12
13	126,67	+ 8,51	66,31	111,37	− 9,68	67,81	139,66	+ 7,13	31,87	93,38	− 9,45	35,47	13
14	132,82	+ 9,08	67,03	119,91	− 9,53	67,40	143,47	+ 7,44	32,22	103,14	− 9,85	36,29	14
15	137,27	+ 9,58	67,42	129,02	− 9,02	67,92	145,06	+ 7,46	32,13	115,12	− 9,79	37,25	15
16	141,03	+ 9,60	68,05	137,18	− 8,77	69,36	145,93	+ 7,26	32,11	126,96	− 9,53	38,00	16
17	144,52	+ 9,48	68,61	144,93	− 8,63	70,99	146,54	+ 7,00	32,02	138,80	− 9,21	38,20	17
18	147,90	+ 9,20	68,77	152,51	− 8,51	72,05	147,05	+ 6,58	31,95	150,87	− 8,91	37,92	18
19	151,42	+ 9,01	68,70	159,70	− 8,28	72,40	147,75	+ 6,32	31,91	163,00	− 8,50	37,16	19
20	155,11	+ 8,85	68,21	166,24	− 7,95	71,87	148,72	+ 6,15	31,75	174,57	− 8,05	36,08	20
21	158,94	+ 8,64	67,53	171,58	− 7,60	70,50	150,04	+ 5,92	31,61	184,03	− 7,59	35,09	21
22	163,20	+ 8,54	66,93	176,69	− 7,18	68,94	151,95	+ 5,82	31,68	191,96	− 7,13	34,52	22
23	168,08	+ 8,51	66,58	183,73	− 7,21	68,26	155,26	+ 6,12	32,07	199,81	− 6,66	34,14	23
24	175,32	+ 8,51	66,31	191,16	− 7,80	68,38	159,63	+ 6,54	32,57	206,17	− 6,78	33,62	24
25	182,72	+ 8,33	66,07	197,63	− 8,48	68,35	165,62	+ 6,06	33,18	210,82	− 7,14	33,18	25
26	191,16	+ 8,46	65,68	204,16	− 9,39	68,97	174,23	+ 7,88	33,81	215,40	− 7,73	33,50	26
27	200,49	+ 8,29	65,46	209,91	− 9,86	69,52	185,49	+ 8,24	34,38	218,72	− 8,00	33,67	27
28	209,47	+ 7,97	66,56	214,40	−10,07	70,11	197,58	+ 8,17	35,09	220,30	− 8,06	33,77	28
29	217,80	+ 7,83	68,18	218,48	−10,03	70,69	209,40	+ 8,12	35,93	221,37	− 7,88	33,85	29
30	225,56	+ 7,69	69,58	222,16	− 9,90	71,10	220,93	+ 8,06	36,40	222,23	− 7,62	33,94	30
31	233,06	+ 7,60	70,59	225,59	− 9,80	71,35	233,01	+ 7,95	36,28	223,05	− 7,50	34,03	31

Nr.	Schwerpunkt des Fusses						Schwerpunkt von: Unterschenkel + Fuss						Nr.
	rechts			links			rechts			links			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	4,45	+ 6,98	14,22	71,10	− 6,02	6,01	18,40	+ 8,89	28,78	65,53	− 7,30	26,25	1
2	13,88	+ 6,77	16,63	71,09	− 6,02	6,02	29,02	+ 8,89	29,92	67,02	− 7,41	26,34	2
3	26,56	+ 6,22	16,45	71,08	− 6,00	6,03	41,22	+ 8,51	30,40	67,98	− 7,51	26,47	3
4	42,00	+ 6,04	14,81	71,06	− 5,98	6,03	54,45	+ 8,13	30,44	68,65	− 7,37	26,53	4
5	57,84	+ 6,04	12,53	71,03	− 5,95	6,05	67,19	+ 7,91	30,06	69,16	− 7,24	26,61	5
6	75,38	+ 6,30	10,15	71,04	− 5,95	6,07	80,54	+ 7,73	29,28	69,71	− 7,09	26,69	6
7	94,03	+ 6,57	8,65	71,05	− 5,91	6,10	94,06	+ 7,55	28,36	70,53	− 6,97	26,70	7
8	110,29	+ 6,84	8,76	71,06	− 5,90	6,12	105,44	+ 7,45	27,77	71,46	− 6,83	26,65	8
9	127,15	+ 7,69	10,80	71,09	− 5,90	6,18	117,04	+ 7,35	27,61	72,89	− 6,73	26,60	9
10	137,70	+ 8,16	12,49	71,56	− 6,09	6,46	125,59	+ 7,13	27,65	74,94	− 6,84	26,78	10
11	142,90	+ 7,06	10,43	72,21	− 6,34	7,10	132,61	+ 6,66	26,96	78,13	− 7,33	27,19	11
12	146,27	+ 5,69	8,41	73,73	− 6,75	8,31	137,95	+ 6,18	26,10	82,40	− 8,01	27,98	12
13	147,94	+ 5,40	6,88	76,82	− 6,85	11,25	141,75	+ 6,69	25,55	89,19	− 8,70	29,34	13
14	148,30	+ 5,31	6,50	83,59	− 7,48	15,10	144,72	+ 6,90	25,71	98,19	− 9,25	30,93	14
15	148,37	+ 5,27	6,52	94,73	− 7,57	17,29	145,90	+ 6,91	25,65	109,96	− 9,23	32,20	15
16	148,39	+ 5,23	6,54	108,94	− 7,19	16,60	146,55	+ 6,75	25,64	122,40	− 8,94	32,59	16
17	148,40	+ 5,19	6,56	124,65	− 6,71	14,37	147,01	+ 6,54	25,58	135,22	− 8,58	32,17	17
18	148,41	+ 5,15	6,61	141,72	− 6,57	11,65	147,39	+ 6,22	25,54	148,56	− 8,32	31,27	18
19	148,43	+ 5,14	6,63	160,20	− 6,75	9,33	147,92	+ 6,02	25,51	162,29	− 8,06	30,12	19
20	148,46	+ 5,11	6,66	178,86	− 6,97	8,35	148,65	+ 5,89	25,40	175,66	− 7,78	29,06	20
21	148,51	+ 5,05	6,71	195,31	− 7,38	9,43	149,65	+ 5,70	25,31	186,88	− 7,54	28,60	21
22	148,81	+ 5,11	6,93	208,80	− 7,85	11,97	151,16	+ 5,64	25,42	196,22	− 7,31	28,81	22
23	149,37	+ 5,12	7,56	217,38	− 7,65	12,25	153,77	+ 5,87	25,87	204,26	− 6,91	28,60	23
24	150,27	+ 5,32	8,55	220,39	− 6,53	9,45	157,26	+ 6,23	26,49	209,77	− 6,72	27,50	24
25	152,28	+ 5,17	10,54	223,56	− 5,58	7,66	162,24	+ 6,51	27,45	214,04	− 6,75	26,72	25
26	156,39	+ 5,30	13,41	224,65	− 5,50	6,81	169,72	+ 7,23	28,65	217,74	− 7,17	26,75	26
27	164,98	+ 5,55	16,50	224,69	− 5,65	6,67	180,30	+ 7,56	29,86	220,23	− 7,41	26,84	27
28	176,93	+ 5,64	16,99	224,70	− 5,66	6,68	192,36	+ 7,53	30,51	221,41	− 7,45	26,92	28
29	191,01	+ 5,71	15,91	224,71	− 5,67	6,67	204,75	+ 7,51	30,86	222,22	− 7,32	26,97	29
30	206,33	+ 6,05	13,81	224,72	− 5,68	6,66	217,24	+ 7,55	30,68	222,86	− 7,13	27,04	30
31	223,72	+ 6,38	11,14	224,73	− 5,68	6,66	230,66	+ 7,55	29,92	223,48	− 7,04	27,11	31

Nr.	Schwerpunkt des ganzen Beins						Schwerpunkt beider Beine			Gesammtschwerpunkt des ganzen Körpers			Nr.
	rechts			links									
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	31,65	+ 9,19	51,41	57,57	− 8,50	52,61	44,61	+ 0,35	52,01	44,89	− 0,63	89,57	1
2	41,66	+ 9,17	52,13	61,08	− 8,68	53,00	51,37	+ 0,25	52,57	51,29	− 0,73	90,16	2
3	51,80	+ 8,87	53,15	64,01	− 8,83	53,62	57,91	+ 0,02	53,39	57,43	− 0,85	91,22	3
4	61,86	+ 8,55	54,01	66,64	− 8,75	53,96	64,25	− 0,10	53,98	63,45	− 0,86	92,22	4
5	71,26	+ 8,32	54,59	69,02	− 8,68	54,20	70,14	− 0,18	54,40	69,06	− 0,85	92,97	5
6	80,67	+ 8,06	54,78	71,43	− 8,59	54,29	76,05	− 0,27	54,54	74,77	− 0,87	93,33	6
7	89,91	+ 7,79	54,43	74,14	− 8,52	54,16	82,03	− 0,37	54,30	80,66	− 0,83	93,18	7
8	97,63	+ 7,56	53,57	76,77	− 8,43	53,79	87,20	− 0,44	53,68	85,85	− 0,78	92,54	8
9	105,55	+ 7,19	52,24	80,19	− 8,31	53,19	92,87	− 0,56	52,72	91,88	− 0,70	91,41	9
10	112,56	+ 6,94	51,38	84,06	− 8,33	52,84	98,31	− 0,70	52,11	97,70	− 0,62	90,43	10
11	120,13	+ 6,95	51,20	89,17	− 8,60	52,74	104,65	− 0,83	51,97	104,22	− 0,45	89,86	11
12	126,74	+ 7,01	50,83	95,09	− 8,93	52,86	110,92	− 0,96	51,85	110,68	− 0,20	89,53	12
13	132,39	+ 7,82	50,86	102,96	− 9,34	53,23	117,68	− 0,76	52,05	117,54	+ 0,22	89,59	13
14	137,33	+ 8,25	51,37	111,68	− 9,42	53,58	124,51	− 0,59	52,48	124,02	+ 0,52	89,94	14
15	140,54	+ 8,57	51,59	121,80	− 9,10	54,38	131,17	− 0,27	52,98	130,41	+ 0,84	90,66	15
16	143,12	+ 8,52	51,98	131,58	− 8,83	55,42	137,35	− 0,16	53,70	136,37	+ 0,91	91,72	16
17	145,46	+ 8,37	52,30	141,25	− 8,61	56,28	143,36	− 0,12	54,29	142,16	+ 0,90	92,63	17
18	147,71	+ 8,07	52,39	151,01	− 8,44	56,59	149,36	− 0,19	54,49	147,94	+ 0,85	93,14	18
19	150,09	+ 7,88	52,33	160,68	− 8,20	56,38	155,39	− 0,16	54,36	153,84	+ 0,73	93,16	19
20	152,66	+ 7,73	51,99	169,81	− 7,89	55,65	161,24	− 0,08	53,82	159,70	+ 0,57	92,70	20
21	155,42	+ 7,53	51,53	177,38	− 7,58	54,62	166,40	− 0,03	53,08	165,11	+ 0,51	91,92	21
22	158,64	+ 7,44	51,20	184,09	− 7,23	53,73	171,37	+ 0,11	52,47	170,55	+ 0,40	91,07	22
23	163,22	+ 7,51	51,15	191,51	− 7,10	53,23	177,37	+ 0,21	52,19	177,01	+ 0,22	90,37	23
24	168,48	+ 7,65	51,22	198,21	− 7,39	52,89	183,35	+ 0,13	52,06	183,26	− 0,09	89,96	24
25	174,96	+ 7,64	51,43	203,85	− 7,82	52,57	189,41	− 0,09	52,00	189,76	− 0,48	89,75	25
26	183,03	+ 7,99	51,65	209,31	− 8,55	52,97	196,17	− 0,28	52,31	196,29	− 0,84	89,87	26
27	192,84	+ 8,01	51,97	213,82	− 8,93	53,34	203,33	− 0,46	52,66	202,97	− 1,09	90,23	27
28	202,99	+ 7,80	52,90	217,06	− 9,08	53,74	210,03	− 0,64	53,32	209,16	− 1,17	91,04	28
29	212,85	+ 7,71	54,04	219,90	− 9,00	54,12	216,38	− 0,65	54,08	215,12	− 1,23	92,15	29
30	222,41	+ 7,67	54,84	222,43	− 8,85	54,40	222,42	− 0,59	54,62	220,82	− 1,25	93,05	30
31	232,15	+ 7,58	55,18	224,79	− 8,75	54,58	228,47	− 0,59	54,88	226,60	− 1,23	93,58	31

Um zunächst einen Ueberblick über das Verhalten der verschiedenen Schwerpunkte beim Gang des unbelasteten Menschen zu gewinnen, sind auf Tafel III unter Benutzung der x- und z-Coordinaten die Projectionen der Bahnen aller Einzelschwerpunkte (mit rother Farbe) und die einiger Systemschwerpunkte und des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers (mit blauer Farbe) in die Projectionen des Bewegungsvorganges auf die Gangebene für den I. und II. Versuch in $\frac{1}{10}$ natürlicher Grösse eingezeichnet worden. Da die Projectionen der Bewegungsphasen auf dem horizontalen Fussboden an und für sich sehr wenig übersichtlich sind (vgl. Tafel X und XI des I. Theils), so ist davon Abstand genommen worden, für den vorläufigen Ueberblick auch diese Projection der Schwerpunktsbahnen darzustellen.

Aus den Figuren auf Tafel III ist ein sehr bemerkenswerthes Resultat über das Zusammenwirken sowohl der beiden oberen als auch der beiden unteren Extremitäten zu erkennen. Während die Einzelschwerpunkte der Extremitätenabschnitte ohne Ausnahme ziemlich bedeutende Excursionen in verticaler Richtung ausführen, bleibt der Gesammtschwerpunkt beider Beine, dessen Bahn man sich leicht in die Mitte zwischen die Bahnen der beiden Beinschwerpunkte eingeschaltet denken kann, beim Gehen annähernd in einer bestimmten Höhe über dem horizontalen Fussboden. Ferner zeigen die Figuren auf Tafel III, dass die Schwerpunkte des Rumpfes, des Kopfes, des Systems Rumpf + Kopf + beide Arme und endlich des ganzen Körpers Bahnen von ähnlicher Form aufweisen wie die Hüftgelenkmittelpunkte, die Schultergelenkmittelpunkte und der Kopfscheitelpunkt. Dies mag zur vorläufigen Orientirung genügen.

Die Projection der Bahn des Gesammtschwerpunktes des ganzen Körpers auf die zur Gangrichtung senkrechte Verticalebene (YZ-Ebene) muss bei gleichmässigem Gang eine geschlossene Curve sein, welche während eines Doppelschrittes einmal von der Projection des Gesammtschwerpunktes durchlaufen wird. Verschafft man sich diese Projection in natürlicher Grösse, so zeigt sich, dass dieselbe weder beim I. noch beim II. Versuch sich genau schliesst, sondern dass das Ende derselben beim I. Versuch um 0,25 cm, beim II. Versuch um 0,37 cm, in beiden Fällen nach links, vom Anfang abweicht. Uebereinstimmend hiermit findet

man aus der Projection der Schwerpunktsbahn auf den horizontalen Fussboden (XY-Ebene), dass die Punkte derselben, welche um die Länge eines Doppelschrittes von einander entfernt sind, sich nicht in gleichem Abstand von der Gangebene befinden. Daraus geht hervor, dass die mittlere Fortschreitungsrichtung des Gesammtschwerpunktes nicht ganz genau mit der Richtung der X-Axe des Coordinatensystems identisch ist, sondern bei beiden Versuchen von oben betrachtet um einen kleinen Winkel in der umgekehrten Richtung des Uhrzeigers von ihr abweicht. Dieser Winkel ist in beiden Fällen so klein, dass er für die weitere Untersuchung des ganzen Bewegungsvorganges ganz unberücksichtigt bleiben kann; er beträgt beim I. Versuch nur $0^\circ\ 5'\ 31''$ und beim II. Versuch $0^\circ\ 8'\ 17''$. Es kann daher nach wie vor die Richtung der X-Axe des Coordinatensystems als Gangrichtung gelten, um so mehr, als bei Betrachtung der einfachen oder der vierfachen Schrittlängen sicher ein anderer Winkel, vielleicht mit entgegengesetztem Vorzeichen, zum Vorschein gekommen wäre. Der Mensch kann unmöglich beim Gehen die einmal eingeschlagene Richtung bis auf einige Winkelminuten im ganzen Verlaufe der Bewegung genau festhalten.

Für die weitere Untersuchung der Bahn des Gesammtschwerpunktes empfiehlt es sich dagegen, das Coordinatensystem so einzurichten, dass die Projection der Schwerpunktsbahn auf die zur Gangrichtung senkrechte Coordinatenebene sich wirklich schliesst. Dies lässt sich durch eine Drehung des ursprünglichen Coordinatensystems um die verticale Z-Axe in der umgekehrten Richtung des Uhrzeigers um die oben angegebenen Abweichungswinkel erreichen. Hierbei können sich nur die x-Coordinaten und y-Coordinaten etwas ändern, während die z-Coordinaten ihre Werthe beibehalten. Bezeichnet man den Drehungswinkel mit ε und die neuen Coordinaten mit x', y' und z', so ergeben sich aus Figur 14 auf Seite 240 des I. Theils, wenn man beachtet, dass dort die neuen Axen in der Richtung des Uhrzeigers gegen die alten verdreht waren und in Folge dessen ε das entgegengesetzte Vorzeichen besass, die Transformationsformeln:

$$x' = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon$$
$$y' = y \cos \varepsilon + x \sin \varepsilon$$
$$z' = z.$$

Nun ist

$\sin(0^\circ\ 5'\ 31'') = 0{,}00160$ und $\cos(0^\circ\ 5'\ 31'') = 1$ (abgerundet bis auf 5 Decimalstellen)

$\sin(0^\circ\ 8'\ 17'') = 0{,}00241$ und $\cos(0^\circ\ 8'\ 17'') = 1$ (abgerundet bis auf 5 Decimalstellen).

Daher hat man folgende Transformationsformeln zur Berechnung der neuen Coordinaten:

I. Versuch	II. Versuch
$x' = x - 0{,}0016 \cdot y$	$x' = x - 0{,}00241 \cdot y$
$y' = y + 0{,}0016 \cdot x$	$y' = y + 0{,}00241 \cdot x$
$z' = z$	$z' = z$

Die Glieder $0{,}0016 \cdot y$ und $0{,}00241 \cdot y$ der Formeln würden erst dann einen Werth grösser wie 0,005 cm erhalten, wenn y im einen Falle mindestens die Grösse von 3,13 cm und im anderen Falle mindestens die Grösse von 2,07 cm erreichte. Da nun für die ganze Bahn des Gesammtschwerpunktes die y-Coordinaten unter diesen Werthen bleiben, und die neuen Coordinaten natürlich wieder nur bis auf 2 Decimalstellen genau angegeben werden können, so behalten für den Gesammtschwerpunkt bei beiden Versuchen die x-Coordinaten ihre Werthe bei. Es ändern sich daher bei der Drehung des Coordinatensystems um diese kleinen Winkel bis auf 2 Decimalstellen genau nur die y-Coordinaten etwas. Dieselben nehmen, wie man aus den Formeln berechnet, die in nebenstehender Tabelle 3 niedergelegten Werthe an.

Zeichnet man jetzt unter Benutzung dieser y-Coordinaten die Projection der Bahn des Gesammtschwerpunktes auf die zur Gangrichtung senkrechte Ebene auf, so erhält man in der That eine geschlossene

Tabelle 3.

Nr.	I. Versuch	II. Versuch
1	− 1,30	− 0,52
2	− 1,30	− 0,61
3	− 1,24	− 0,71
4	− 1,15	− 0,71
5	− 1,06	− 0,68
6	− 0,98	− 0,69
7	− 0,87	− 0,64
8	− 0,74	− 0,57
9	− 0,60	− 0,48
10	− 0,31	− 0,38
11	+ 0,11	− 0,20
12	+ 0,53	+ 0,07
13	+ 0,91	+ 0,50
14	+ 1,17	+ 0,82
15	+ 1,27	+ 1,15
16	+ 1,26	+ 1,24
17	+ 1,20	+ 1,24
18	+ 1,08	+ 1,21
19	+ 1,00	+ 1,10
20	+ 0,86	+ 0,95
21	+ 0,72	+ 0,91
22	+ 0,46	+ 0,81
23	+ 0,07	+ 0,65
24	− 0,41	+ 0,35
25	− 0,84	− 0,02
26	− 1,10	− 0,37
27	− 1,28	− 0,60
28	− 1,35	− 0,67
29	− 1,27	− 0,71
30	− 1,14	− 0,72
31	− 1,03	− 0,68

Curve (vgl. Tafel VIII und IX das Mittelbild oben). Es sollen daher für die weitere Untersuchung der Bewegung des Gesammtschwerpunktes diese Coordinaten durchweg an Stelle der in den Tabellen 1 und 2 niedergelegten y-Coordinaten verwendet werden, ohne dass jedesmal durch einen dem y beigefügten Strich darauf besonders hingewiesen wird. —

Die Berechnung der Coordinaten des Gesammtschwerpunktes beim III. Versuch war in doppelter Hinsicht umständlicher als bei den beiden anderen. Einmal war man genöthigt, die bei diesem Versuche auf directem Wege nicht gewonnenen Coordinaten des linken Fussschwerpunktes und des linken Handgelenkmittelpunktes (vgl. Tabelle 12 auf den Seiten 262 und 263 des I. Theils) nachträglich auf irgend eine Weise zu ermitteln. Ferner erforderte der Umstand, dass der Gehende beim III. Versuch durch das Militärgepäck belastet war, eine Modification der Berechnung.

Die Coordinaten des linken Fussschwerpunktes wurden auf folgende Weise gewonnen. Bildet man aus den Tabellen 10, 11 und 12 des I. Theils die Differenzen der Coordinaten des Fussschwerpunktes und des Mittelpunktes vom I. Fussgelenk für beide Extremitäten beim I. und II. Versuch, und für die rechte Extremität beim III. Versuch, so zeigt sich grosse Uebereinstimmung in dem Verhalten dieser Differenzen. Man erkennt dies am besten, wenn man sich Diagramme verschafft, welche die Abhängigkeit der betreffenden Differenzen von der Zeit graphisch darstellen. Da die durch die Photographie herausgegriffenen Bewegungsphasen in genau gleichen Zeitintervallen auf einander folgten, so kann man als Abscissen der Diagramme Strecken wählen, deren Längen durch die Nummern der einzelnen Bewegungsphasen gemessen werden. Als Ordinaten kann man die Differenzen der Coordinaten des Fussschwerpunktes und Fussgelenkmittelpunktes in natürlicher Grösse verwenden. Auf Tafel IV sind als Beispiel die fünf Diagramme für die x-Coordinaten aufgezeichnet worden. Dabei ist für die zwei zu dem gleichen Versuch gehörenden Diagramme der rechten und linken Körperseite immer die gleiche Abscissenaxe verwendet worden; natürlich erscheinen dann dieselben um die in Phasennummern ausgedrückte Dauer eines Schrittes gegen einander auf der Abscissenaxe verschoben. Auch die zu verschiedenen Versuchen gehörenden Diagramme für dieselbe Körperseite, welche auf Tafel IV über einander gezeichnet sind, müssen

etwas gegen einander verschoben sein, da die mit gleicher Nummer versehenen Bewegungsphasen der drei Versuche nicht genau einander entsprechende Momente des ganzen Bewegungsvorganges herausgreifen. Ferner müssen sich auch kleine Verschiedenheiten in der Ausdehnung der zu verschiedenen Versuchen gehörenden Diagramme längs der Abscissenaxe herausstellen, da die Schrittdauer nicht bei allen Versuchen absolut dieselbe war. Abgesehen von diesen Unterschieden in der Lage und Breitenausdehnung und kleinen Abweichungen in der Höhe sind aber die fünf Diagramme nahezu identisch. Man ist daher berechtigt, auch dem noch fehlenden Diagramm für die Differenzen der x-Coordinaten der linken Extremität beim III. Versuch die gleiche Form zuzuschreiben. Betreffs der Schrittdauer stimmt der III. Versuch ziemlich genau mit dem I. Versuch überein, wie sich aus den Diagrammen der rechten Seite ergiebt; ferner erkennt man aus den letzteren auch, dass die Ordinaten, namentlich die negativen, beim III. Versuch etwas kleiner sind als beim I. Versuch. Berücksichtigt man dies und beachtet gleichzeitig, dass der Phase III, 1 ziemlich genau die Phase I, $2\frac{1}{3}$ entspricht, so kann man das Diagramm der x-Coordinate für die linke Extremität beim III. Versuch direct aus dem entsprechenden des I. Versuchs ableiten. Das Gleiche gilt natürlich für die zu den beiden anderen Coordinaten gehörenden Diagramme. Von den drei auf diese Weise entstehenden Diagrammen findet sich als Beispiel das für die x-Coordinate auf Tafel IV mit aufgezeichnet. Aus den Diagrammen kann man nun rückwärts die Werthe der Differenzen zwischen den Coordinaten des linken Fussschwerpunktes und den entsprechenden des linken Fussgelenkmittelpunktes für den III. Versuch direct ablesen. Addirt man dann diese Differenzen zu den Coordinaten des Fussgelenkmittelpunktes, so erhält man die in Tabelle 5 auf Seite 63 eingetragenen Coordinaten des Schwerpunktes vom linken Fuss.

Für den linken Handgelenkmittelpunkt waren beim III. Versuch nur für 7 Bewegungsphasen (Nr. 3 und Nr. 8 bis 13) die Coordinaten auf directem Wege gewonnen worden (vgl. Tabelle 12 des I. Theils). Zur Bestimmung der noch fehlenden Coordinaten sind nun zunächst für diese 7 Bewegungsphasen die Differenzen der Coordinaten der Mittelpunkte des Handgelenks und Ellbogengelenks berechnet worden. Mit denselben kann man in der eben ausführlich auseinandergesetzten Weise Bruchstücke der drei Dia-

gramme construiren, welche die Abhängigkeit dieser Differenzen von der Zeit veranschaulichen. Die entsprechenden Diagramme für die rechte Körperseite beim III. Versuch und für beide Körperseiten bei den beiden anderen Versuchen können in diesem Falle nicht zum Vergleich herangezogen werden, weil der linke Unterarm beim III. Versuch das Gewehr zu halten hatte und in Folge dessen nahezu seine Richtung im Raume beibehielt. Dieser letzte Umstand giebt aber nun gerade die Möglichkeit, trotzdem mit einiger Annäherung die noch fehlenden Coordinaten zu reconstruiren. Aus dem Verhalten des belasteten linken Armes folgt nämlich, dass die in Frage stehenden Coordinatendifferenzen während der Bewegung nahezu constant bleiben werden. Man würde daher sich nicht allzuweit von der Wahrheit entfernen, wenn man ihnen übereinstimmend die aus den vorhandenen 7 Coordinatentripeln resultirenden Mittelwerthe zulegte. Es lässt sich aber sogar eine noch etwas grössere Genauigkeit erreichen, wenn man die kleinen Abweichungen näher in's Auge fasst, welche die 7 bekannten Differenzen bei jeder der drei Coordinaten von dem Mittelwerthe zeigen. Berücksichtigt man dabei, dass in den kleinen Schwankungen wie bei allen anderen derartigen Diagrammen jedenfalls der Rhythmus der Gehbewegungen zum Ausdruck kommen muss, so hat man keine grosse Wahl mehr, wenn man aus den bekannten Bruchstücken die Diagramme vervollständigen will. Aus den auf diese Weise hergestellten Diagrammen, welche hier nicht besonders wiedergegeben werden sollen, um die Arbeit nicht mit unwesentlichen Tafeln zu überlasten, gewinnt man dann wieder rückwärts die noch fehlenden Coordinatendifferenzen. Die Addition der letzteren zu den entsprechenden Coordinaten des Mittelpunktes vom linken Ellbogengelenk ergiebt dann schliesslich die in Tabelle 4 auf der folgenden Seite niedergelegten Coordinaten des linken Handgelenkmittelpunktes, welche nachträglich in die Tabelle 12 auf Seite 262 des I. Theils einzutragen sind.

Diese Coordinaten können naturgemäss nicht den gleichen Anspruch auf Genauigkeit machen wie die seiner Zeit direct bestimmten Coordinaten der Gelenkmittelpunkte, selbst nicht wie die auch erst auf Umwegen gewonnenen Coordinaten des linken Fussschwerpunktes. Wenn dieselben trotzdem bis auf Zehntelmillimeter angegeben sind, so ist das nur im Interesse der Gleichmässigkeit

Tabelle 4.
Ergänzungstabelle zu Tabelle 12 auf S. 262 des I. Theils der Untersuchung über den Gang des Menschen.

Coordinaten des Mittelpunktes vom linken Handgelenk.

Nr.	III. Versuch		
	x	*y*	*z*
1	64,11	— 21,67	100,43
2	69,27	— 21,21	101,39
3	74,32	— 20,96	101,71
4	79,34	— 20,67	101,39
5	84,40	— 20,22	100,35
6	89,71	— 19,72	98,90
7	95,31	— 19,26	97,36
8	101,43	— 18,83	96,24
9	107,46	— 18,19	95,58
10	113,57	— 17,66	95,67
11	119,60	— 17,16	96,51
12	125,26	— 16,76	97,53
13	130,39	— 16,79	98,79
14	135,09	— 16,76	99,88
15	139,69	— 16,78	100,37
16	144,29	— 16,81	100,24
17	149,21	— 16,84	99,50
18	154,37	— 17,02	98,37
19	159,75	— 17,27	97,18
20	165,36	— 17,60	96,09
21	171,19	— 18,02	95,58
22	177,29	— 18,60	95,48
23	183,78	— 19,23	96,14
24	190,23	— 19,97	97,44
25	196,51	— 20,65	98,75
26	202,44	— 20,79	99,93
27	207,97	— 20,78	100,82
28	213,12	— 20,90	101,39
29	218,35	— 21,23	101,35
30	223,45	— 21,32	100,60
31	228,52	— 21,41	99,31

der weiteren Berechnungen geschehen. Auf die Bestimmung der Coordinaten des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers werden jedoch die Fehler, welche den Coordinaten dieser Ergänzungstabelle anhaften, einen nur verschwindenden Einfluss ausüben. Denn einmal kommt für die Lage des Gesammtschwerpunktes nur die Richtung der Unterarmlängsaxe, nicht aber die genaue Lage des Handgelenkmittelpunktes, in Betracht; diese wird aber durch kleine Abweichungen in der Lage des Handgelenkmittelpunktes nur in geringem Maasse beeinträchtigt. Dann liefert aber überhaupt der Unterarm bei der Ortsbestimmung des Gesammtschwerpunktes nur einen kleinen Beitrag, für den die sehr kleine proximale Hauptstrecke des Systems Unterarm + Hand das Maass abgiebt, wie im ersten Abschnitt unter B ausführlich auseinandergesetzt worden ist.

Durch die Bestimmung der noch fehlenden Coordinaten des Schwerpunktes vom linken Fuss und des Mittelpunktes vom linken Handgelenk ist man nun in den Stand gesetzt, für den III. Versuch in derselben Weise wie für die beiden anderen zunächst die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers ohne Rücksicht auf das getragene Gepäck zu berechnen; denn die noch fehlenden Coordinaten für die linke Fussspitze werden hierzu nicht gebraucht. Die bei der Rechnung sich ergebenden Coordinaten

der Einzelschwerpunkte und Systemschwerpunkte sind zusammen mit den Coordinaten des Gesammtschwerpunktes in der weiter unten folgenden Tabelle 5 auf den Seiten 61 bis 64 niedergelegt.

Um nun endlich die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers mit der Belastung zu ermitteln, hat man sich zunächst den Schwerpunkt für das ganze Gepäck allein zu verschaffen. Da die einzelnen Gepäckstücke alle mehr oder weniger fest mit dem Rumpfe verbunden waren, so wird ihr gemeinsamer Schwerpunkt bei den Bewegungen des Gehens annähernd seinen Ort im Rumpfe beibehalten haben. Man ist daher im Stande, aus den Bewegungen des Rumpfes die ganze Bahn dieses Gepäckschwerpunktes abzuleiten, wenn man seine Lage relativ zum Rumpfe für eine Stellung des menschlichen Körpers kennt. Diese Kenntniss kann man sich nun leicht aus den in der schon öfter angeführten Schwerpunktsarbeit gemachten Angaben verschaffen. Es findet sich nämlich daselbst (Seite 657 ff.) eine Berechnung der Coordinaten des Gesammtschwerpunktes unseres mit dem vollen Militärgepäck belasteten Versuchsindividuums in militärischer Haltung und mit übergenommenem Gewehr. In dem dort zu Grunde gelegten räumlichen Coordinatensystem besassen die Schwerpunkte der einzelnen Gepäckstücke die folgenden Coordinaten, und die Gepäckstücke selbst die folgenden Gewichte (Seite 658 und 645):

Gepäckstücke	Coordinaten in cm			Gewicht in kg
	x	y	z	
Tornister mit hinterer Patronentasche (gefüllt mit 40 scharfen Patronen)	− 15,5	+ 0,4	114,5	12,25
Vordere Patronentasche (mit 30 scharfen Patronen) rechts	+ 16	+ 12,5	95,5	1,59
Vordere Patronentasche (mit 30 scharfen Patronen) links	+ 16	− 12,5	95,5	1,59
Seitengewehr mit Spaten	− 7,5	− 18	75	1,57
Gefüllter Brodbeutel mit Feldflasche	− 7,5	+ 18	75	1,57
Gewehr	+ 6	− 11,5	143	4,7

Hieraus berechnet man für die drei Coordinaten des gemeinsamen Schwerpunktes sämmtlicher Gepäckstücke:

$$x = -5{,}77; \quad y = -2{,}11 \quad \text{und} \quad z = 112{,}33.$$

Da die drei Coordinaten des Rumpfschwerpunktes waren (Seite 657)

$$x = +1{,}2; \quad y = +0{,}4 \quad \text{und} \quad z = 112,$$

so erkennt man, dass der Gepäckschwerpunkt ganz in die Nähe des Rumpfschwerpunktes zu liegen kam. Es wird daher trotz

der verschiedenen Neigungen des Rumpfes beim Gang, welche im I. Theil dieser Untersuchung ausführlich beschrieben worden sind, der Schwerpunkt des ganzen Gepäcks mit grosser Annäherung eine Bahn beschreiben, welche mit der Bahn des Rumpfschwerpunktes congruent ist und nur etwas nach hinten, links und oben gegen dieselbe verschoben erscheint. Wie ein Vergleich der Coordinaten des Gepäckschwerpunktes und Rumpfschwerpunktes lehrt, beträgt diese Verschiebung nach hinten 6,97 cm, nach links 2,51 cm und nach oben 0,33 cm. Man erhält daher mit grosser Annäherung die Coordinaten des Gepäckschwerpunktes für alle 31 Bewegungsphasen des III. Versuches, wenn man von den in der späteren Tabelle 5 niedergelegten Coordinaten des Rumpfschwerpunktes zu den x-Coordinaten — 6,97, zu den y-Coordinaten — 2,51 und zu den z-Coordinaten + 0,33 addirt. Auf diese Weise sind die ebenfalls in Tabelle 5 in der vorletzten Spalte aufgezeichneten Coordinaten für den Gesammtschwerpunkt des Gepäcks berechnet worden.

Mit Hülfe dieser letzteren Coordinaten lassen sich nun leicht aus den ebenfalls in Tabelle 5 niedergelegten Coordinaten des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers ohne Gepäck die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers mit Gepäck ableiten. Bezeichnet man die letzteren mit X_0, Y_0, Z_0, die ersteren mit x_0, y_0, z_0 und die Coordinaten des Schwerpunktes des ganzen Gepäcks mit x_{13}, y_{13}, z_{13}, so ist nach den früheren Auseinandersetzungen:

$$X_0 = x_0 + \mu\,(x_{13} - x_0)$$
$$Y_0 = y_0 + \mu\,(y_{13} - y_0)$$
$$Z_0 = z_0 + \mu\,(z_{13} - z_0),$$

unter μ das Verhältniss der Masse des ganzen Gepäcks zu der Summe der Massen des menschlichen Körpers und des ganzen Gepäcks verstanden. Da das Gepäck allein 23,27 kg, unser Versuchsindividuum aber 58,7 kg wog, so besitzt demnach dieses Verhältniss den Werth

$$\mu = \tfrac{23,27}{81,97} = 0{,}284.$$

Mit Hülfe dieser Formeln sind nun die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers mit vollem Gepäck berechnet und an letzter Stelle in die folgende Tabelle 5 neben den Coordinaten für alle Einzelschwerpunkte und Systemschwerpunkte des III. Versuchs eingetragen worden.

Nr.	Schwerpunkt des Oberarms rechts			Schwerpunkt des Oberarms links			Schwerpunkt des Unterarms rechts			Schwerpunkt des Unterarms links			Nr
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	36,23	+18,23	120,30	35,91	−22,60	121,98	47,54	+24,60	87,42	54,56	−23,57	103,10	1
2	40,77	+18,69	121,35	41,36	−22,44	123,04	48,47	+26,36	87,68	59,78	−23,23	104,10	2
3	45,22	+19,30	122,09	46,79	−22,37	123,55	49,74	+28,07	88,10	64,94	−23,10	104,50	3
4	49,65	+19,88	122,39	52,14	−22,09	123,46	51,45	+29,77	88,52	70,04	−22,85	104,27	4
5	54,30	+20,42	122,13	57,51	−21,70	122,70	53,89	+31,32	88,55	75,15	−22,39	103,31	5
6	59,37	+20,99	121,34	62,97	−21,15	121,50	57,37	+32,60	88,11	80,47	−21,87	101,94	6
7	64,88	+21,51	120,23	68,55	−20,62	120,15	61,96	+33,77	87,29	86,05	−21,36	100,45	7
8	71,03	+22,08	119,06	74,39	−19,92	118,98	67,88	+34,80	86,26	92,08	−20,84	99,32	8
9	77,61	+22,77	118,20	80,15	−19,14	118,18	75,24	+35,44	85,37	98,00	−20,14	98,60	9
10	84,46	+23,37	117,93	86,11	−18,44	118,02	83,75	+35,69	84,90	104,09	−19,50	98,59	10
11	91,42	+23,92	118,23	91,87	−17,73	118,40	93,42	+35,61	85,22	110,09	−18,90	99,26	11
12	98,13	+24,21	119,33	97,34	−17,21	119,25	103,66	+35,05	86,40	115,69	−18,43	100,20	12
13	104,74	+24,41	120,81	102,44	−16,95	120,51	114,32	+34,12	88,56	120,80	−18,33	101,45	13
14	111,10	+24,54	122,44	107,25	−16,78	121,82	124,65	+32,82	91,51	125,53	−18,24	102,60	14
15	117,54	+24,57	123,76	112,15	−16,65	122,62	134,76	+31,14	94,74	130,20	−18,20	103,19	15
16	123,46	+24,46	124,41	117,06	−16,61	122,77	143,74	+29,35	97,72	134,80	−18,21	103,14	16
17	129,50	+24,34	124,20	122,21	−16,59	122,44	152,18	+27,56	100,12	139,88	−18,22	102,48	17
18	135,45	+24,06	123,71	127,45	−16,71	121,33	159,78	+25,92	101,90	145,09	−18,40	101,42	18
19	141,45	+23,62	122,79	132,87	−16,93	120,27	166,72	+24,57	102,73	150,51	−18,66	100,27	19
20	147,25	+23,06	121,67	138,43	−17,34	119,14	172,79	+23,55	102,42	156,13	−19,02	99,18	20
21	152,98	+22,50	120,72	144,24	−17,90	118,37	178,30	+23,00	100,84	161,94	−19,48	98,60	21
22	158,44	+21,74	119,98	150,13	−18,63	117,96	182,85	+22,64	98,57	167,98	−20,11	98,40	22
23	163,41	+21,03	119,49	156,18	−19,44	118,25	186,40	+22,82	95,71	174,40	−20,82	98,93	23
24	168,28	+20,39	119,43	162,27	−20,25	119,14	188,76	+23,59	92,76	180,80	−21,64	100,13	24
25	172,85	+19,87	119,68	168,09	−21,03	120,22	190,01	+24,47	90,27	186,98	−22,41	101,41	25
26	177,10	+19,35	120,45	173,74	−21,43	121,58	190,49	+25,36	88,85	192,87	−22,64	102,64	26
27	181,02	+19,06	121,31	179,31	−21,84	122,74	190,46	+26,44	88,55	198,41	−22,73	103,63	27
28	184,75	+18,83	122,11	184,66	−22,15	123,56	190,72	+27,38	88,77	203,64	−22,94	104,29	28
29	188,79	+18,73	122,63	190,19	−22,56	123,74	191,56	+28,24	89,04	208,97	−23,35	104,34	29
30	193,12	+18,64	122,53	195,61	−22,81	123,20	193,36	+28,65	89,08	214,14	−23,51	103,64	30
31	197,77	+18,52	121,98	201,00	−22,87	122,09	196,10	+29,45	88,76	219,26	−23,57	102,40	31

Nr	Schwerpunkt des ganzen Arms rechts			Schwerpunkt des ganzen Arms links			Schwerpunkt des Rumpfes			Schwerpunkt des Kopfes			Nr.
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	41,67	+21,29	104,48	44,88	−23,07	112,90	33,65	−2,68	111,26	37,48	−2,02	154,51	1
2	44,47	+22,38	105,15	50,22	−22,82	113,93	38,99	−2,34	112,26	43,15	−1,73	155,37	2
3	47,39	+23,52	105,74	55,52	−22,72	114,39	44,27	−2,03	112,74	48,77	−1,43	155,76	3
4	50,52	+24,64	106,10	60,75	−22,46	114,23	49,55	−1,67	112,73	54,34	−1,03	155,57	4
5	54,10	+25,66	105,98	65,99	−22,03	113,37	54,83	−1,28	112,08	60,07	−0,66	154,84	5
6	58,41	+26,57	105,36	71,39	−21,50	112,09	60,24	−0,86	110,96	65,85	−0,25	153,72	6
7	63,48	+27,41	104,39	76,97	−20,98	110,67	65,76	−0,41	109,69	71,48	+0,26	152,45	7
8	69,51	+28,20	103,28	82,90	−20,36	109,52	71,60	+0,14	108,69	77,26	+0,91	151,38	8
9	76,47	+28,86	102,41	88,74	−19,62	108,76	77,73	+0,81	108,06	83,09	+1,47	150,69	9
10	84,12	+29,30	102,04	94,76	−18,95	108,67	84,11	+1,57	108,03	88,85	+1,98	150,71	10
11	92,38	+29,54	102,35	100,63	−18,29	109,19	90,39	+2,34	108,45	94,47	+2,39	151,25	11
12	100,79	+29,42	103,49	106,17	−17,80	110,09	96,17	+2,87	109,33	99,93	+2,52	152,25	12
13	109,35	+29,08	105,30	111,27	−17,61	111,34	101,69	+3,19	110,62	105,31	+2,60	153,60	13
14	117,62	+28,52	107,56	116,04	−17,48	112,58	106,83	+3,32	111,96	110,53	+2,67	154,83	14
15	125,82	+27,73	109,80	120,83	−17,40	113,27	111,96	+3,36	112,91	115,78	+2,76	155,59	15
16	133,21	+26,81	111,57	125,64	−17,38	113,33	117,02	+3,29	113,13	120,89	+2,77	155,73	16
17	140,41	+25,89	112,66	130,71	−17,37	112,84	122,20	+3,14	112,89	126,05	+2,76	155,33	17
18	147,15	+24,95	113,22	135,93	−17,52	111,75	127,26	+2,98	111,96	131,22	+2,65	154,40	18
19	153,60	+24,08	113,14	141,35	−17,76	110,65	132,56	+2,74	110,83	136,56	+2,39	153,29	19
20	159,53	+23,30	112,41	146,94	−18,15	109,54	138,08	+2,27	109,65	141,92	+2,05	152,22	20
21	165,16	+22,71	111,16	152,75	−18,66	108,86	143,99	+1,73	108,95	147,58	+1,56	151,44	21
22	170,18	+22,17	109,68	158,72	−19,34	108,55	150,05	+0,94	108,63	153,20	+0,96	151,06	22
23	174,47	+21,89	108,05	164,94	−20,10	108,96	156,15	0	108,83	158,80	+0,27	151,29	23
24	178,13	+21,93	106,60	171,18	−20,92	110,00	162,25	−0,87	109,34	164,48	−0,32	151,90	24
25	181,10	+22,08	105,53	177,18	−21,69	111,17	167,97	−1,41	110,05	169,89	−0,72	152,81	25
26	183,54	+22,24	105,25	182,94	−22,01	112,47	173,48	−1,86	111,12	175,27	−1,06	154,05	26
27	185,56	+22,61	105,55	188,50	−22,27	113,55	178,80	−2,14	112,13	180,68	−1,28	155,11	27
28	187,62	+22,94	106,07	193,79	−22,53	114,29	183,86	−2,43	112,91	185,78	−1,41	155,80	28
29	190,12	+23,30	106,47	199,22	−22,94	114,41	189,09	−2,67	113,02	191,09	−1,55	155,91	29
30	193,24	+23,45	106,44	204,52	−23,15	113,79	194,26	−2,86	112,59	196,55	−1,74	155,41	30
31	196,97	+23,75	106,00	209,78	−23,21	112,62	199,39	−3,02	111,74	202,04	−1,85	154,45	31

Nr.	Schwerpunkt von: Rumpf + Kopf			Schwerpunkt beider Arme			Schwerpunkt von: Rumpf + Kopf + beide Arme			Nr.
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	34,19	− 2,59	117,40	43,28	− 0,89	108,69	36,07	− 2,24	115,60	1
2	39,58	− 2,25	118,38	47,35	− 0,22	109,54	41,19	− 1,83	116,55	2
3	44,91	− 1,94	118,85	51,46	+ 0,40	110,07	46,27	− 1,46	117,03	3
4	50,23	− 1,58	118,81	55,64	+ 1,09	110,17	51,35	− 1,03	117,02	4
5	55,57	− 1,19	118,15	60,05	+ 1,82	109,68	56,50	− 0,57	116,40	5
6	61,04	− 0,77	117,03	64,90	+ 2,54	108,73	61,84	− 0,08	115,31	6
7	66,57	− 0,31	115,76	70,23	+ 3,22	107,53	67,33	+ 0,42	114,06	7
8	72,40	+ 0,25	114,75	76,21	+ 3,92	106,40	73,19	+ 1,01	113,02	8
9	78,49	+ 0,90	114,11	82,61	+ 4,62	105,59	79,34	+ 1,67	112,35	9
10	84,78	+ 1,63	114,09	89,44	+ 5,18	105,36	85,74	+ 2,36	112,28	10
11	90,97	+ 2,35	114,53	96,51	+ 5,63	105,77	92,12	+ 3,03	112,72	11
12	96,70	+ 2,82	115,42	103,48	+ 5,81	106,79	98,10	+ 3,44	113,63	12
13	102,20	+ 3,11	116,72	110,31	+ 5,74	108,32	103,88	+ 3,65	114,98	13
14	107,36	+ 3,23	118,05	116,83	+ 5,52	110,07	109,32	+ 3,70	116,40	14
15	112,50	+ 3,27	118,97	123,33	+ 5,17	111,54	114,74	+ 3,66	117,43	15
16	117,57	+ 3,22	119,18	129,43	+ 4,72	112,45	120,03	+ 3,53	117,79	16
17	122,74	+ 3,09	118,92	135,56	+ 4,26	112,75	125,39	+ 3,33	117,64	17
18	127,82	+ 2,93	117,90	141,54	+ 3,72	112,49	130,66	+ 3,09	116,85	18
19	133,13	+ 2,69	116,86	147,48	+ 3,16	111,90	136,10	+ 2,79	115,83	19
20	138,63	+ 2,24	115,69	153,24	+ 2,58	110,98	141,65	+ 2,31	114,72	20
21	144,50	+ 1,71	114,98	158,06	+ 2,04	110,01	147,49	+ 1,78	113,95	21
22	150,50	+ 0,94	114,66	164,45	+ 1,42	109,12	153,39	+ 1,04	113,51	22
23	156,53	+ 0,04	114,86	169,71	+ 0,90	108,51	159,26	+ 0,22	113,55	23
24	162,57	− 0,79	115,38	174,66	+ 0,51	108,30	165,07	− 0,52	113,91	24
25	168,24	− 1,34	116,12	179,14	+ 0,20	108,35	170,48	− 1,02	114,51	25
26	173,73	− 1,75	117,22	183,24	+ 0,12	108,86	175,70	− 1,36	115,49	26
27	179,07	− 2,02	118,23	187,03	+ 0,17	109,55	180,72	− 1,57	116,43	27
28	184,13	− 2,29	119,03	190,71	+ 0,21	110,18	185,49	− 1,77	117,20	28
29	189,37	− 2,51	119,11	194,67	+ 0,18	110,44	190,47	− 1,95	117,32	29
30	194,59	− 2,70	118,67	198,88	+ 0,15	110,12	195,48	− 2,11	116,90	30
31	199,77	− 2,85	117,80	203,38	+ 0,29	109,31	200,52	− 2,20	116,04	31

Nr.	Schwerpunkt des Oberschenkels						Schwerpunkt des Unterschenkels						Nr
	rechts			links			rechts			links			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	31,50	+ 5,81	69,85	35,76	− 11,62	68,75	21,07	+ 6,48	37,06	38,76	− 9,48	31,69	1
2	38,56	+ 6,28	71,32	39,03	− 11,20	69,17	32,63	+ 6,93	37,19	39,43	− 9,19	31,74	2
3	45,30	+ 6,83	72,29	42,30	− 10,77	69,30	44,26	+ 7,62	36,95	40,15	− 8,84	31,75	3
4	51,56	+ 7,20	72,70	45,69	− 10,37	69,23	55,41	+ 8,28	36,42	40,98	− 8,49	31,71	4
5	57,07	+ 7,49	72,15	49,18	− 9,98	68,81	65,72	+ 8,94	35,69	41,93	− 8,22	31,63	5
6	62,27	+ 7,65	70,73	52,88	− 9,67	68,15	74,96	+ 9,63	34,92	43,06	− 7,89	31,57	6
7	67,44	+ 7,74	69,18	57,09	− 9,35	67,37	82,65	+ 10,04	34,45	44,70	− 7,67	31,40	7
8	73,91	+ 8,30	68,45	62,07	− 9,10	66,74	89,66	+ 10,60	33,81	47,69	− 7,84	31,38	8
9	81,06	+ 9,34	68,21	67,92	− 8,92	66,42	95,88	+ 11,48	33,16	51,67	− 8,22	32,14	9
10	86,86	+ 10,20	68,13	74,91	− 8,54	66,16	99,83	+ 12,02	32,54	57,21	− 8,44	32,78	10
11	93,60	+ 11,23	68,92	83,50	− 8,34	65,90	104,24	+ 12,65	32,91	65,97	− 8,90	33,55	11
12	99,18	+ 11,87	69,65	92,10	− 7,64	65,78	107,36	+ 12,90	33,29	76,46	− 8,49	34,57	12
13	102,97	+ 12,07	70,42	100,56	− 7,02	66,91	108,23	+ 12,78	33,41	87,99	− 7,55	35,58	13
14	106,06	+ 12,07	71,21	108,07	− 6,94	68,59	108,54	+ 12,67	33,65	99,22	− 6,96	36,45	14
15	109,34	+ 11,94	71,89	115,29	− 6,93	70,07	109,11	+ 12,43	33,97	110,62	− 6,61	36,70	15
16	112,92	+ 11,74	72,01	121,86	− 6,99	70,94	110,14	+ 12,18	34,10	121,61	− 6,59	36,41	16
17	116,59	+ 11,51	71,89	127,98	− 7,21	71,13	111,18	+ 12,02	34,18	132,34	− 6,94	35,75	17
18	120,05	+ 11,27	71,55	133,24	− 7,33	70,51	112,16	+ 11,83	34,24	142,02	− 7,42	34,81	18
19	124,16	+ 10,99	70,83	138,08	− 7,32	69,01	113,85	+ 11,59	34,16	150,76	− 7,92	33,78	19
20	128,65	+ 10,59	70,26	142,94	− 7,28	67,47	116,01	+ 11,47	34,36	157,68	− 8,41	32,96	20
21	133,87	+ 10,27	70,08	149,06	− 7,75	66,71	119,03	+ 11,51	34,80	163,93	− 8,68	32,17	21
22	140,06	+ 9,71	69,93	155,71	− 8,66	66,75	123,32	+ 11,55	35,51	169,50	− 9,18	31,72	22
23	147,05	+ 8,91	69,91	161,74	− 9,98	67,13	129,22	+ 11,16	36,18	173,68	− 10,05	31,29	23
24	155,03	+ 8,22	69,66	167,97	− 11,02	67,72	137,42	+ 10,83	37,02	177,82	− 10,76	31,84	24
25	163,20	+ 7,57	69,41	173,03	− 11,66	68,31	147,37	+ 10,07	37,60	180,53	− 11,03	32,04	25
26	171,30	+ 6,86	70,09	177,17	− 11,96	68,87	158,48	+ 8,89	38,15	181,65	− 10,98	32,15	26
27	178,56	+ 6,34	71,30	180,56	− 12,02	69,57	169,30	+ 7,36	38,51	182,31	− 10,92	32,25	27
28	185,25	+ 5,94	72,21	183,71	− 12,01	69,68	179,88	+ 6,51	38,23	182,93	− 10,78	32,38	28
29	191,75	+ 5,60	72,68	187,13	− 12,03	69,68	190,80	+ 5,58	37,49	183,79	− 10,63	32,46	29
30	197,72	+ 5,31	72,62	190,52	− 12,04	69,58	201,32	+ 4,86	36,48	184,77	− 10,52	32,44	30
31	203,16	+ 4,92	71,90	194,07	− 12,09	68,85	211,78	+ 4,27	35,39	185,99	− 10,46	32,36	31



Nr.	Schwerpunkt des Fusses, rechts x	y	z	Schwerpunkt des Fusses, links x	y	z	Schwerpunkt von: Unterschenkel + Fuss, rechts x	y	z	Schwerpunkt von: Unterschenkel + Fuss, links x	y	z	Nr.
1	4,70	+ 4,89	14,92	41,83	− 8,57	5,60	16,93	+ 6,08	31,46	39,54	− 9,25	25,09	1
2	20,51	+ 5,41	12,75	41,81	− 8,46	5,59	29,56	+ 6,55	31,01	40,03	− 9,01	25,12	2
3	37,60	+ 6,15	10,34	41,78	− 8,32	5,56	42,58	+ 7,25	30,22	40,56	− 8,71	25,12	3
4	55,06	+ 7,38	8,56	41,74	− 8,16	5,52	55,32	+ 8,05	29,37	41,17	− 8,41	25,08	4
5	72,54	+ 8,96	8,14	41,62	− 8,03	5,49	67,45	+ 8,95	28,72	41,85	− 8,17	25,02	5
6	88,73	+ 10,97	9,55	41,54	− 7,76	5,39	78,44	+ 9,97	28,50	42,68	− 7,86	24,95	6
7	101,14	+ 12,73	12,03	41,31	− 7,40	5,13	87,33	+ 10,72	28,78	43,84	− 7,60	24,75	7
8	107,76	+ 13,44	11,29	41,76	− 7,57	5,19	94,24	+ 11,32	28,11	46,19	− 7,77	24,75	8
9	110,76	+ 13,03	8,72	42,77	− 7,79	6,27	99,64	+ 11,87	26,98	49,42	− 8,11	25,59	9
10	113,19	+ 12,82	6,44	44,07	− 7,35	8,06	103,21	+ 12,22	25,94	53,89	− 8,16	26,53	10
11	113,75	+ 12,05	5,97	47,86	− 7,23	11,64	106,65	+ 12,65	26,09	61,39	− 8,48	28,01	11
12	113,75	+ 12,58	5,98	56,03	− 7,27	15,66	108,98	+ 12,82	26,38	71,29	− 8,18	29,79	12
13	113,75	+ 12,51	6,00	67,75	− 6,19	16,69	109,63	+ 12,71	26,48	82,87	− 7,21	30,80	13
14	113,75	+ 12,45	6,03	81,46	− 4,74	15,93	109,86	+ 12,61	26,66	94,73	− 6,40	31,26	14
15	113,77	+ 12,42	6,06	96,64	− 3,87	13,72	110,29	+ 12,43	26,91	107,08	− 5,92	30,89	15
16	113,77	+ 12,41	6,05	112,86	− 4,23	11,30	111,06	+ 12,24	27,00	119,40	− 5,99	30,06	16
17	113,77	+ 12,37	6,11	129,76	− 5,19	9,57	111,84	+ 12,11	27,08	131,69	− 6,50	29,13	17
18	113,78	+ 12,35	6,14	146,23	− 6,30	8,94	112,57	+ 11,96	27,13	143,09	− 7,14	28,26	18
19	113,79	+ 12,29	6,16	161,84	− 8,11	10,16	113,83	+ 11,77	27,08	153,56	− 7,97	27,80	19
20	114,07	+ 12,34	6,49	173,47	− 10,70	12,05	115,52	+ 11,69	27,31	161,67	− 8,99	27,67	20
21	114,65	+ 12,50	7,09	179,85	− 10,95	11,44	117,92	+ 11,76	27,86	167,96	− 9,25	26,93	21
22	115,69	+ 12,58	8,07	182,99	− 10,70	9,26	121,39	+ 11,81	28,57	172,91	− 9,56	26,04	22
23	117,64	+ 12,05	9,94	184,79	− 10,11	7,34	126,29	+ 11,39	29,54	176,49	− 10,07	25,23	23
24	121,62	+ 11,44	13,23	185,84	− 9,90	6,35	133,42	+ 10,98	31,00	179,85	− 10,54	25,39	24
25	129,39	+ 10,25	16,68	185,63	− 10,13	6,19	142,82	+ 10,12	32,31	181,67	− 10,80	25,50	25
26	140,65	+ 8,37	17,29	185,53	− 10,07	6,29	153,97	+ 8,76	32,87	182,63	− 10,75	25,61	26
27	154,02	+ 6,40	16,16	185,50	− 10,06	6,41	165,43	+ 7,27	32,86	183,12	− 10,70	25,71	27
28	168,19	+ 4,83	13,78	185,49	− 10,04	6,51	176,92	+ 6,08	32,04	183,58	− 10,59	25,83	28
29	184,18	+ 3,45	10,99	185,49	− 10,07	6,64	189,13	+ 5,04	30,79	184,22	− 10,49	25,93	29
30	201,05	+ 2,48	8,66	185,46	− 10,06	6,70	201,40	+ 4,26	29,44	184,94	− 10,40	25,93	30
31	218,22	+ 2,12	7,77	185,53	− 10,01	6,76	213,41	+ 3,73	28,40	185,87	− 10,35	25,88	31

Nr.	Schwerpunkt des ganzen Beins, rechts x	y	z	Schwerpunkt des ganzen Beins, links x	y	z	Schwerpunkt beider Beine x	y	z	Nr.
1	25,98	+ 5,91	55,30	37,19	− 10,72	52,20	31,59	− 2,41	53,75	1
2	35,25	+ 6,38	56,04	39,41	− 10,37	52,48	37,28	− 2,00	54,26	2
3	44,27	+ 6,99	56,35	41,64	− 9,99	52,56	42,96	− 1,50	54,46	3
4	52,99	+ 7,52	56,28	43,98	− 9,63	52,50	48,49	− 1,06	54,39	4
5	61,00	+ 8,04	55,69	46,40	− 9,29	52,21	53,70	− 0,63	53,95	5
6	68,40	+ 8,53	54,72	49,01	− 8,98	51,78	58,71	− 0,23	53,25	6
7	74,98	+ 8,87	53,87	52,07	− 8,69	51,22	63,53	+ 0,09	52,55	7
8	81,62	+ 9,44	53,16	56,05	− 8,60	50,83	68,84	+ 0,42	52,00	8
9	88,10	+ 10,30	52,58	60,91	− 8,61	50,95	74,51	+ 0,85	51,77	9
10	93,06	+ 10,97	52,14	66,94	− 8,40	51,14	80,00	+ 1,29	51,64	10
11	98,55	+ 11,77	52,69	75,12	− 8,39	51,54	86,84	+ 1,69	52,12	11
12	102,89	+ 12,23	53,25	84,21	− 7,84	52,14	93,55	+ 2,20	52,70	12
13	105,49	+ 12,31	53,77	93,86	− 7,09	53,22	99,68	+ 2,61	53,50	13
14	107,50	+ 12,27	54,33	103,01	− 6,74	54,44	105,26	+ 2,77	54,39	14
15	109,70	+ 12,13	54,84	112,18	− 6,55	55,22	110,94	+ 2,79	55,03	15
16	112,22	+ 11,93	54,95	120,93	− 6,61	55,45	116,58	+ 2,66	55,20	16
17	114,79	+ 11,74	54,91	129,30	− 6,94	55,21	122,09	+ 2,40	55,06	17
18	117,22	+ 11,53	54,70	136,97	− 7,26	54,50	127,10	+ 2,14	54,60	18
19	120,24	+ 11,29	54,25	143,95	− 7,57	53,39	132,10	+ 1,86	53,82	19
20	123,67	+ 11,01	53,98	150,04	− 7,93	52,39	136,86	+ 1,54	53,19	20
21	127,82	+ 10,83	54,08	156,22	− 8,32	51,63	142,02	+ 1,26	52,86	21
22	132,98	+ 10,51	54,25	162,23	− 9,00	51,32	147,61	+ 0,76	52,79	22
23	139,18	+ 9,85	54,61	167,33	− 10,01	51,25	153,26	− 0,08	52,93	23
24	146,84	+ 9,27	55,01	172,47	− 10,84	51,68	159,66	− 0,79	53,35	24
25	155,48	+ 8,54	55,35	176,30	− 11,33	52,09	165,89	− 1,40	53,72	25
26	164,73	+ 7,58	55,98	179,24	− 11,50	52,47	171,99	− 1,96	54,23	26
27	173,58	+ 6,69	56,73	181,53	− 11,52	52,82	177,56	− 2,42	54,78	27
28	182,09	+ 5,99	56,99	183,66	− 11,47	53,06	182,88	− 2,74	55,03	28
29	190,76	+ 5,39	56,80	186,03	− 11,45	53,10	188,40	− 3,03	54,95	29
30	199,11	+ 4,91	56,25	188,41	− 11,42	52,91	193,76	− 3,26	54,58	30
31	207,04	+ 4,47	55,41	190,96	− 11,43	52,56	199,00	− 3,48	53,99	31

Tabelle 5. III. Versuch. **Schwerpunktscoordinaten.**

Nr.	Gesammtschwerpunkt des ganzen Körpers ohne Gepäck			Gesammtschwerpunkt des Gepäcks			Gesammtschwerpunkt des ganzen Körpers mit Gepäck			Nr.
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	34,40	− 2,30	92,53	26,68	− 5,19	111,59	32,21	− 3,12	97,94	1
2	39,73	− 1,89	93,32	32,02	− 4,85	112,59	37,54	− 2,73	98,79	2
3	45,04	− 1,47	93,69	37,30	− 4,54	113,07	42,84	− 2,34	99,19	3
4	50,28	− 1,04	93,66	42,58	− 4,18	113,06	48,09	− 1,93	99,17	4
5	55,46	− 0,59	93,11	47,86	− 3,79	112,41	53,30	− 1,50	98,59	5
6	60,67	− 0,14	92,16	53,27	− 3,37	111,29	58,57	− 1,06	97,59	6
7	65,91	+ 0,30	91,12	58,79	− 2,92	110,02	63,89	− 0,61	96,49	7
8	71,57	+ 0,79	90,26	64,63	− 2,37	109,02	69,60	− 0,11	95,59	8
9	77,54	+ 1,36	89,75	70,76	− 1,70	108,39	75,61	+ 0,49	95,04	9
10	83,60	+ 1,96	89,66	77,14	− 0,94	108,36	81,77	+ 1,14	94,97	10
11	90,15	+ 2,53	90,12	83,42	− 0,17	108,78	88,24	+ 1,76	95,42	11
12	96,40	+ 2,98	90,90	89,20	+ 0,36	109,66	94,36	+ 2,24	96,23	12
13	102,31	+ 3,26	92,05	94,72	+ 0,68	110,95	100,15	+ 2,53	97,42	13
14	107,81	+ 3,35	93,27	99,86	+ 0,81	112,29	105,55	+ 2,63	98,67	14
15	113,37	+ 3,34	94,15	104,99	+ 0,85	113,24	110,95	+ 2,63	99,57	15
16	118,74	+ 3,21	94,44	110,05	+ 0,78	113,46	116,27	+ 2,52	99,84	16
17	124,16	+ 2,98	94,30	115,23	+ 0,63	113,22	121,62	+ 2,31	99,67	17
18	129,33	+ 2,74	93,63	120,29	+ 0,47	112,29	126,76	+ 2,10	98,93	18
19	134,61	+ 2,44	92,70	125,59	+ 0,23	111,16	132,05	+ 1,81	97,94	19
20	139,86	+ 2,02	91,77	131,11	− 0,24	109,98	137,37	+ 1,38	96,94	20
21	145,45	+ 1,59	91,16	137,02	− 0,78	109,28	143,06	+ 0,92	96,31	21
22	151,23	+ 0,94	90,86	143,08	− 1,57	108,96	148,92	+ 0,23	96,00	22
23	157,02	+ 0,11	90,94	149,18	− 2,51	109,16	154,79	− 0,63	96,11	23
24	163,05	− 0,62	91,32	155,28	− 3,38	109,67	160,84	− 1,40	96,53	24
25	168,77	− 1,16	91,84	161,00	− 3,95	110,38	166,56	− 1,95	97,11	25
26	174,32	− 1,58	92,64	166,51	− 4,37	111,45	172,10	− 2,37	97,98	26
27	179,54	− 1,89	93,43	171,83	− 4,65	112,46	177,35	− 2,67	98,83	27
28	184,52	− 2,13	94,01	176,89	− 4,94	113,27	182,35	− 2,93	99,48	28
29	189,70	− 2,35	94,06	182,12	− 5,18	113,35	187,55	− 3,15	99,54	29
30	194,84	− 2,54	93,65	187,29	− 5,37	112,92	192,70	− 3,34	99,12	30
31	199,95	− 2,68	92,90	192,42	− 5,53	112,07	197,81	− 3,49	98,34	31

Von einer Projection der einzelnen Schwerpunktsbahnen beim III. Versuch in derselben Weise, wie es für die beiden anderen Versuche auf Tafel III geschehen ist, wurde deshalb abgesehen, weil für den III. Versuch nicht auch die Projection des ganzen Bewegungsvorganges aus dem I. Theil dieser Untersuchung herübergenommen werden konnte. Die Mühe, welche für die Herstellung dieser Projection aufgewendet werden müsste, würde aber in keinem Verhältniss zu dem Nutzen derselben stehen. Die Unterschiede zwischen den Schwerpunktsbahnen beim Gehen des belasteten und beim Gehen des unbelasteten Menschen sind zu gering, als dass sie bei diesen Projectionen in $\frac{1}{10}$ natürlicher Grösse deutlich in die Augen springen könnten. Man würde daher im Grossen und Ganzen wieder dieselben Bilder bekommen wie auf Tafel III. Die charakteristischen Abweichungen von den normalen Gehbewegungen, welche durch die grosse Belastung hervorgerufen werden, treten erst zu Tage, wenn man die Bewegungen der ein-

zelnen mechanisch wichtigen Punkte des menschlichen Körpers nach den verschiedenen Richtungen hin in ihrer natürlichen Ausdehnung genauer untersucht. Ferner wurde auch von einer kleinen Drehung des Coordinatensystems um die Z-Axe, welche die mittlere Fortschreitungsrichtung des Gesammtschwerpunktes mit der Richtung der X-Axe in genauere Uebereinstimmung bringen würde, Abstand genommen. Es hatte sich nämlich herausgestellt, dass die Bestimmung der mittleren Bewegungsrichtung des Schwerpunktes beim III. Versuch viel unsicherer war als bei den beiden anderen Versuchen, da das schwere Gepäck den Gehenden veranlasst hatte, während eines Doppelschrittes nicht unmerklich von der zuerst eingeschlagenen Gangrichtung abzuweichen. —

Wie der Ort eines Punktes im Raume durch die drei rechtwinkligen Coordinaten eindeutig bestimmt wird, so lässt sich auch die Bewegung eines Punktes im Raume in allen Einzelheiten vollständig erkennen, nachdem man die Projectionen dieser Bewegung auf drei zu einander senkrechte Richtungen des Raumes ermittelt hat. Durch die verschiedenen Coordinatentabellen sind die Projectionen der Bewegung aller Gelenkmittelpunkte und Schwerpunkte auf die Gangrichtung, die zur Gangebene senkrechte und die verticale Richtung festgestellt.

Zwischen der Bewegung der einzelnen Punkte in der Gangrichtung einerseits, und in den beiden anderen zur Gangrichtung senkrechten Richtungen andererseits besteht nun ein ganz principieller Unterschied.

In der zur Gangebene senkrechten Richtung (Richtung der y-Coordinaten), welche in Zukunft kurz als Seitenrichtung bezeichnet werden soll, und in verticaler Richtung (Richtung der z-Coordinaten) führen alle Punkte beim Gehen periodische Bewegungen aus. Die Dauer dieser Periode ist im Allgemeinen gleich der Dauer eines Doppelschrittes, in einzelnen Fällen gleich der eines einfachen Schrittes. So schwingt z. B. ein jeder Punkt in der Seitenrichtung um eine zur Gangebene parallele, seiner mittleren Lage entsprechende Verticalebene hin und her, indem er sich theils nach der einen Seite von ihr entfernt, wieder zurückkehrt, durch sie hindurchtritt, und nun auf der anderen Seite von ihr fortgeht, sich ihr wieder nähert, abermals durch sie hindurchtritt und nun sein Spiel von Neuem beginnt. Die in der Medianebene des menschlichen Körpers gelegenen Punkte, wie

unter anderen die Mitten der Hüftlinie und Schulterlinie, der Kopfscheitelpunkt, der Schwerpunkt und ebenso der Hauptpunkt des Rumpfes, der Gesammtschwerpunkt des Körpers, führen diese Bewegung symmetrisch zur Gangebene selbst aus. In ganz analoger Weise schwingen alle Punkte in verticaler Richtung um eine ihrer mittleren Lage entsprechende Horizontalebene hin und her. Wenn auch im Allgemeinen alle diese Schwingungsbewegungen in ihrem Verlaufe durchaus nicht von so einfacher Art sind, wie z. B. die Schwingungen eines Pendels, so haben sie doch mit den letzteren die Eigenschaft gemein, dass sie bei regelmässigem Gange des Individuums sich nach Ablauf eines Doppelschrittes genau wiederholen. Diese Wiederholung tritt für alle in der Medianebene des Körpers gelegenen Punkte, also z. B. für den Gesammtschwerpunkt des Körpers, bei der Schwingung in verticaler Richtung sogar schon nach Ablauf eines einfachen Schrittes ein.

Fasst man dagegen die Bewegung der einzelnen Punkte des Körpers in der Gangrichtung selbst in's Auge, so erkennt man leicht, dass von einer derartigen Schwingung relativ zu einer im Raume festen Ebene, welche hier zur Gangrichtung senkrecht stehen müsste, nicht die Rede sein kann. Alle Punkte schreiten in der Gangrichtung immer weiter fort. Nachdem sie einmal durch eine zur Gangrichtung senkrechte Ebene, welche im Folgenden der Einfachheit halber kurz als eine „Frontalebene des Raumes“ bezeichnet werden soll, hindurchgetreten sind, entfernen sie sich immer mehr von ihr, ohne jemals zu ihr zurückzukehren; sie durchschneiden vielmehr immer nach Ablauf eines Doppelschrittes eine parallele Frontalebene des Raumes, welche von der ersten um die doppelte Schrittlänge absteht. Würde man dagegen diese zur Gangrichtung senkrechte Ebene nicht im Raume festgestellt annehmen, sondern dieselbe in der Gangrichtung mit der mittleren Ganggeschwindigkeit des Körpers gleichförmig und parallel mit sich fortbewegt denken, so würde ein jeder Körperpunkt bei seiner Bewegung in der Gangrichtung nach Ablauf eines Doppelschrittes immer wieder dieselbe Lage zu dieser Frontalebene einnehmen. Bei geeigneter Wahl dieser in Bewegung gedachten Ebene würde dann in der Gangrichtung der Körperpunkt in ähnlicher Weise um dieselbe gleich weit nach vorn und hinten hin- und herschwingen, wie in den beiden anderen Richtungen um Ebenen, welche im Raume feststehen, so dass also auch in diesem Falle die Frontalebene der, allerdings

mit der Geschwindigkeit des Ganges gleichmässig im Raume fortschreitenden, Mittellage des Gesammtschwerpunktes entspricht.

Die mittlere Ganggeschwindigkeit, mit welcher die Frontalebene des Raumes fortbewegt werden müsste, lässt sich leicht berechnen, wenn man sowohl die Länge als auch die Dauer eines einfachen oder eines Doppelschrittes kennt. Von diesen beiden Grössen finden sich für die ersten beiden Versuche auf Seite 272 des I. Theils Näherungswerthe angegeben, welche aus den Projectionen des Bewegungsvorganges in $\frac{1}{10}$ natürlicher Grösse gewonnen worden sind. Zu etwas genaueren Werthen würde man gelangen, wenn man die Projectionen in natürlicher Grösse zu Grunde legen wollte. Immerhin liegt bei dieser Art der Bestimmung eine kleine Fehlerquelle darin, dass man die Grössen an der Bewegung eines einzelnen Körpertheils, etwa des Fusses, messen muss, und nicht die Bewegung des Körpers als Ganzes in Betracht ziehen kann. Es liegt aber im Begriff der mittleren Geschwindigkeit des Ganges, dass man von den Bewegungen der einzelnen Körpertheile absieht, und nur die Fortbewegung der ganzen Masse des Körpers in's Auge fasst, welche in der Bahn des Gesammtschwerpunktes ihren Ausdruck findet. Da nun für die weitere Untersuchung eine möglichst genaue Kenntniss des Werthes der mittleren Ganggeschwindigkeit erforderlich ist, so muss man für ihre Bestimmung die Bewegung des Gesammtschwerpunktes zu Grunde legen. Die Periodicität der Bewegung desselben, welche sowohl in seiner Bahn als auch in Diagrammen für die Abhängigkeit seiner Coordinaten von der Zeit zu erkennen ist, giebt ein ziemlich sicheres Mittel an die Hand, die Länge und Dauer eines Doppelschrittes zu bestimmen. Eine in dieser Richtung angestellte Untersuchung ergab für die drei Versuche folgende Resultate:

	I. Versuch	II. Versuch	III. Versuch
Länge eines Doppelschrittes:	155,75 cm,	153,60 cm,	143,80 cm,
Dauer eines Doppelschrittes:	0,990 sec,	0,970 sec,	0,9895 sec.

Dividirt man nun die Anzahl der Centimeter für die Länge durch die Anzahl der Secunden für die Dauer eines Doppelschrittes, so erhält man die Anzahl der Geschwindigkeitseinheiten ($cm\,sec^{-1}$) für die mittlere Ganggeschwindigkeit. Es ergiebt sich daher als

	I. Versuch	II. Versuch	III. Versuch
Mittlere Ganggeschwindigkeit:	157,32 $cm\,sec^{-1}$,	158,35 $cm\,sec^{-1}$,	145,33 $cm\,sec^{-1}$.

Mit dieser Geschwindigkeit hätte sich also in jedem Falle die Frontalebene des Raumes fortzubewegen, um welche der Gesammtschwerpunkt periodische Schwingungen in der Gangrichtung ausführt. Um die relative Lage des Schwerpunktes zu dieser Ebene für jede der 31 Bewegungsphasen bestimmen zu können, muss man zunächst wissen, um welche Strecke die Ebene in dem Zeitintervall zweier aufeinanderfolgenden Bewegungsphasen in der Gangrichtung fortschreitet. Berücksichtigt man, dass auf eine Secunde 26,09 Bewegungsphasen bei allen drei Versuchen kommen (I. Theil, Seite 187), so hat man die Maasszahl der mittleren Geschwindigkeit nur durch diese Zahl zu dividiren, um die Anzahl der Centimeter zu erhalten, um welche die Ebene zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bewegungsphasen fortrückt. Dies ergiebt beim I. Versuch einen Weg von 6,03 cm, beim II. Versuch einen solchen von 6,07 cm und beim III. Versuch einen Weg von 5,57 cm.

Zur Bestimmung des Ortes dieser Ebene in Bezug auf das im Raume feststehende Coordinatensystem für jede der 31 Bewegungsphasen muss man nun ausserdem ihre Stellung wenigstens für eine Bewegungsphase ermitteln. Da die Ebene bei ihrer Bewegung stets der YZ-Ebene des Coordinatensystems parallel bleibt, so ist ihre Lage im Raume bekannt, sobald man weiss, in welchem Abstande sie sich von der YZ-Ebene befindet, oder mit anderen Worten, welche Strecke sie auf der X-Axe des Coordinatensystems abschneidet. Diese Strecke bedeutet dann zugleich die x-Coordinate für alle ihre Punkte. Würde z. B. beim I. Versuch der Gesammtschwerpunkt gerade in der ersten Bewegungsphase durch die bewegliche Frontalebene hindurchtreten, so wäre nach Tabelle 1 die Lage der Ebene für die erste Bewegungsphase durch die Angabe $x = 39,55$ cm eindeutig bestimmt. In der zweiten Bewegungsphase würde die Ebene sich dann in dem Abstand 39,55 cm + 6,03 cm = 45,58 cm, in der dritten Phase im Abstand 39,55 cm + 2·6,03 cm = 51,61 cm von der YZ-Ebene des Coordinatensystems befinden u. s. f. Ein Vergleich mit den in Tabelle 1 niedergelegten Werthen der x-Coordinate des Gesammtschwerpunktes würde dann ergeben, dass in der zweiten Bewegungsphase der Gesammtschwerpunkt sich in der Entfernung 45,50 cm — 45,58 cm = — 0,08 cm, in der dritten Bewegungsphase dagegen in der Entfernung 51,45 cm — 51,61 cm = — 0,16 cm von der beweglichen Ebene befinden würde, wobei das negative Vorzeichen darauf hindeutet, dass der

Gesammtschwerpunkt in der der Gangrichtung entgegengesetzten Richtung von der beweglichen Ebene absteht. Man wäre auf diese Weise in den Stand gesetzt, die relative Lage des Gesammtschwerpunktes zu der Ebene für jede Bewegungsphase zu ermitteln.

Nun wird allerdings die mittlere Frontalebene, um welche der Gesammtschwerpunkt beim Gehen gleich weit nach vorn und hinten hin- und herschwingt, nicht gerade in der ersten Bewegungsphase den Gesammtschwerpunkt selbst enthalten; dies wäre wenigstens grosser Zufall. Dieselbe wird vielmehr in der ersten Phase im Allgemeinen nach vorn oder hinten von dem Schwerpunkt abstehen. Um nun die genaue Lage der mittleren Ebene in der ersten Phase zu finden, kann man so verfahren, dass man zunächst einmal die relative Lage des Gesammtschwerpunktes zu einer beliebigen mit der mittleren Ganggeschwindigkeit fortbewegten Frontalebene für jede Bewegungsphase bestimmt. Man kann etwa hierzu gerade die Frontalebene des Raumes verwenden, welche in der ersten Phase durch den Gesammtschwerpunkt hindurchgeht. Dann wird der letztere zwar auch im Allgemeinen um diese Ebene hin- und herschwingen, aber er wird dabei auf der einen Seite sich weiter von ihr entfernen als auf der anderen. Hat man nun in der oben angedeuteten Weise die Bewegung des Gesammtschwerpunktes zu dieser willkürlich herausgegriffenen Ebene festgestellt, so lässt sich dann sehr leicht entscheiden, um welche Strecke die der Mittellage entsprechende Frontalebene von dieser in der einen oder anderen Richtung abweicht. Hierdurch ist man aber in den Stand gesetzt, die Lage der Mittelebene für jede der 31 Bewegungsphasen anzugeben. Auf diese Weise sind bei den drei Versuchen die in der umstehenden Tabelle 6 niedergelegten Abstände der bewegten mittleren Frontalebene von der YZ-Ebene für die 31 Bewegungsphasen gewonnen worden.

Die gleichen Abstände würde man auch erhalten, wenn das ursprüngliche Coordinatensystem beim I. und II. Versuch nicht um den kleinen, nur wenige Winkelminuten betragenden Winkel gedreht worden wäre; denn die x-Coordinaten haben sich ja bei dieser Drehung nicht geändert.

Man erhält nun für jede Bewegungsphase den Abstand des Gesammtschwerpunktes von der in Bewegung befindlichen, zur Gangrichtung senkrechten Mittelebene, indem man von seiner

x-Coordinate den entsprechenden, aus Tabelle 6 zu entnehmenden Abstand der Mittelebene von der YZ-Ebene abzieht. Die Resultate dieser Berechnung sind in der folgenden Tabelle 7 niedergelegt.

Abstände der in der Gangrichtung mit der mittleren Ganggeschwindigkeit fortbewegten mittleren Frontalebene des Raumes von der YZ-Ebene (in Centimetern).

Tabelle 6.

Nr.	I. Versuch	II. Versuch	III. Versuch
1	39,25	44,25	31,88
2	45,28	50,32	37,45
3	51,31	56,39	43,02
4	57,34	62,46	48,59
5	63,37	68,53	54,16
6	69,40	74,60	59,73
7	75,43	80,67	65,30
8	81,46	86,74	70,87
9	87,49	92,81	76,44
10	93,52	98,88	82,01
11	99,55	104,95	87,58
12	105,58	111,02	93,15
13	111,61	117,09	98,72
14	117,64	123,16	104,29
15	123,67	129,23	109,86
16	129,70	135,30	115,43
17	135,73	141,37	121,00
18	141,76	147,44	126,57
19	147,79	153,51	132,14
20	153,82	159,58	137,71
21	159,85	165,65	143,28
22	165,88	171,72	148,85
23	171,91	177,79	154,42
24	177,94	183,86	159,99
25	183,97	189,93	165,56
26	190,00	196,00	171,13
27	196,03	202,07	176,70
28	202,06	208,14	182,27
29	208,09	214,21	187,84
30	214,12	220,28	193,41
31	220,15	226,35	198,98

Abstände des Gesammtschwerpunktes von der in der Gangrichtung sich bewegenden mittleren Frontalebene des Raumes (in Centimetern).

Tabelle 7.

Nr.	I. Versuch	II. Versuch	III. Versuch (Gesammtschwerpunkt des Körpers mit Gepäck)
1	+ 0,30	+ 0,64	+ 0,33
2	+ 0,22	+ 0,97	+ 0,09
3	+ 0,14	+ 1,04	− 0,18
4	− 0,13	+ 0,99	− 0,50
5	− 0,41	+ 0,53	− 0,86
6	− 0,75	+ 0,17	− 1,16
7	− 1,15	− 0,01	− 1,41
8	− 1,13	− 0,89	− 1,27
9	− 1,11	− 0,93	− 0,83
10	− 1,03	− 1,18	− 0,24
11	− 0,42	− 0,73	+ 0,66
12	+ 0,44	− 0,34	+ 1,21
13	+ 1,13	+ 0,45	+ 1,43
14	+ 1,09	+ 0,86	+ 1,26
15	+ 1,13	+ 1,18	+ 1,09
16	+ 0,43	+ 1,07	+ 0,84
17	+ 0,28	+ 0,79	+ 0,62
18	− 0,31	+ 0,50	+ 0,19
19	− 0,51	+ 0,33	− 0,09
20	− 0,82	+ 0,12	− 0,34
21	− 0,78	− 0,54	− 0,22
22	− 1,22	− 1,17	+ 0,07
23	− 1,07	− 0,78	+ 0,37
24	− 0,68	− 0,60	+ 0,85
25	− 0,31	− 0,17	+ 1,00
26	+ 0,55	+ 0,29	+ 0,97
27	+ 0,77	+ 0,90	+ 0,65
28	+ 1,15	+ 1,02	+ 0,08
29	+ 0,48	+ 0,91	− 0,29
30	+ 0,01	+ 0,54	− 0,71
31	− 0,68	+ 0,25	− 1,17

Diese Abstände können nun auch als eine besondere Art von Coordinaten aufgefasst werden. Denkt man sich nämlich das rechtwinklige Coordinatensystem, auf welches zuletzt der Gesammtschwerpunkt des menschlichen Körpers bei der Bewegung bezogen worden ist, nicht fest im Raume, sondern mit der mittleren Ganggeschwindigkeit in der Richtung des Ganges gleichmässig fortbewegt, so werden die in Tabelle 7 niedergelegten Abstände die zur Gangrichtung parallelen Coordinaten des Gesammtschwerpunktes in Bezug auf dieses bewegliche Coordinatensystem darstellen, falls man die zur Gangrichtung senkrechte Coordinatenebene von vornherein mit der oben eingeführten mittleren Frontalebene des Raumes zur Deckung gebracht hat. Trotz der Bewegung des ganzen Coordinatensystems werden die beiden anderen Coordinatenebenen bezüglich mit der Gangebene selbst und der Ebene des horizontalen Fussbodens in Deckung bleiben. Es werden daher die y-Coordinaten (bezüglich für die ersten beiden Versuche die in Tabelle 3 angegebenen y'-Coordinaten) und die z-Coordinaten in dem beweglichen Coordinatensystem dieselben Werthe besitzen wie in dem festen; denn die ersteren geben ja die Abstände der Punkte von der Gangebene, die letzteren die Abstände vom horizontalen Fussboden an. Nur die x-Coordinaten ändern sich und nehmen z. B. für den Gesammtschwerpunkt die Werthe der Tabelle 7 an. Zum Unterschied von den bisher verwendeten Coordinaten sollen diese in Zukunft als ξ-Coordinaten bezeichnet sein.

Man kann nun leicht alle anderen Punkte des menschlichen Körpers, deren Coordinaten bekannt sind, auf das neue bewegliche ξyz-Coordinatensystem beziehen. Man braucht nur zur Bestimmung der neuen ξ-Coordinaten, wie beim Gesammtschwerpunkt, die alten x-Coordinaten um die entsprechenden in Tabelle 6 niedergelegten Abstände zu vermindern.

Die Beziehung der Bewegung des Gesammtschwerpunktes auf das bewegliche ξyz-Coordinatensystem hat eine wichtige mechanische Bedeutung. Nachdem der menschliche Körper einmal in der Gangrichtung mit der mittleren Ganggeschwindigkeit in Bewegung gesetzt worden ist, würde er nach dem Gesetz der Trägheit diese Bewegung sowohl der Richtung als auch der Geschwindigkeit nach beibehalten, wenn gar keine äusseren Kräfte, also auch nicht die Schwere, auf ihn einwirkten. Er würde daher in Bezug auf das neue Coordinatensystem, welches genau die gleiche Be-

wegung besitzt, in Ruhe bleiben. Die Wirkung einer äusseren Kraft oder mehrerer äusserer Kräfte, welche sich nicht das Gleichgewicht halten, wird sich in Folge dessen in einer Bewegung des Körpers relativ zu diesem neuen Coordinatensystem äussern. Da das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist, die äusseren Kräfte zu bestimmen, welche beim Gange des menschlichen Körpers noch auf denselben einwirken, sobald er einmal seine mittlere Geschwindigkeit angenommen hat, so kann man für die weiteren Betrachtungen das neue Coordinatensystem zu Grunde legen. Man gewinnt dadurch den grossen Vortheil, dass man es nach allen Richtungen hin mit verhältnissmässig nur geringen Excursionen des Körpers zu thun hat, indem man die Bewegung ausgeschieden hat, welche, nachdem der Körper einmal im Gange ist, nicht mehr von äusseren Kräften abhängt.

Bei gleichmässigem Gange muss der Gesammtschwerpunkt des menschlichen Körpers relativ zu dem ξyz-Coordinatensystem eine geschlossene Raumcurve beschreiben, welche während eines Doppelschrittes gerade einmal durchlaufen wird. Diese Raumcurve ist bei vollkommen regelmässigem Gange zur Gangebene symmetrisch. Dagegen besitzt sie weder eine horizontale noch eine zur Gangrichtung senkrechte Symmetrieebene. Es lässt sich aber natürlich eine Horizontalebene finden, welche die Raumcurve in zwei gleich hohe Stücke zerlegt. Desgleichen kann man eine zur Gangrichtung senkrechte Ebene angeben, von welcher aus sich die Raumcurve ebenso weit nach vorn als nach hinten erstreckt. Diese beiden Ebenen bilden zusammen mit der Gangebene die schon früher eingeführten Mittelebenen für die periodische Bewegung des Gesammtschwerpunktes nach den drei verschiedenen Richtungen. Dieselben schneiden sich in einem Punkte, von dem aus die Raumcurve sich in jeder der drei Hauptrichtungen nach beiden Seiten gleich weit entfernt; er giebt daher die mittlere Lage des Gesammtschwerpunktes in dem beweglichen ξyz-Coordinatenraume an. Dieser Punkt soll im Folgenden kurz als „Kernpunkt der Bahn des Gesammtschwerpunktes" bezeichnet sein. Indem der Gesammtschwerpunkt gleichzeitig nach den drei verschiedenen Richtungen um den Kernpunkt periodische Schwingungen ausführt, entsteht die geschlossene Raumcurve als Bahn.

Der Kernpunkt ist natürlich in dem ξyz-Coordinatensystem ein fester Punkt. Für die Darstellung der Bewegungen des Ge-

sammtschwerpunktes in dem mit der mittleren Ganggeschwindigkeit fortbewegten Raume empfiehlt es sich sogar, ihn unter Beibehaltung der Richtungen der Coordinatenaxen zum Anfangspunkt des beweglichen Coordinatensystems zu machen, wie später noch ausführlich auseinandergesetzt wird. Auf das vorläufig eingeführte bewegliche ξyz-Coordinatensystem bezogen liegt der Kernpunkt beim I. und III. Versuch in der z-Axe. Beim II. Versuch weicht er dagegen, wie aus den späteren Betrachtungen hervorgeht, um 0,25 cm nach rechts von der ξZ-Coordinatenebene ab. Es fällt daher beim II. Versuch die letztere nicht ganz genau mit der Gangebene zusammen, sondern liegt nur parallel zu ihr auf der linken Seite in einem Abstand von 0,25 cm. Diese kleine Abweichung hat zum Theil, gerade so wie die Abweichung der ursprünglichen x-Axe des festen Coordinatensystems von der Gangrichtung, ihren Grund darin, dass man vor der Bestimmung der Coordinaten des Gesammtschwerpunktes die Gangebene und Gangrichtung nur aus der Bewegung bestimmter Gelenkmittelpunkte ableiten konnte; zum grösseren Theil ist sie aber dem Umstande zuzuschreiben, dass die oben erwähnte kleine Drehung des Coordinatensystems um die Z-Axe selbst, und nicht, wie es beim II. Versuch nothwendig gewesen wäre, um eine andere ihr parallele Gerade der XZ-Ebene ausgeführt worden ist. Vor der kleinen Drehung war eher eine Abweichung der XZ-Coordinatenebene von der Gangebene nach der anderen Seite zu constatiren. Endlich befindet sich der Kernpunkt, wie später noch ausführlich bewiesen wird, beim I. und II. Versuch übereinstimmend in einer Höhe von 91,45 cm über dem horizontalen Fussboden. Beim III. Versuch liegt er in Folge des Gepäcks um ca. 6 cm höher; seine Höhe über dem Fussboden beträgt 97,55 cm. Auch ohne das Gepäck liegt der Gesammtschwerpunkt des menschlichen Körpers beim III. Versuch ein wenig, etwa 0,5 cm höher als bei den beiden anderen Versuchen.

Während der Kernpunkt der Schwerpunktsbahn einen festen Punkt des beweglichen ξyz-Coordinatensystems darstellt, führt derselbe im Raume, d. h. im ruhenden xyz-Coordinatensystem, eine Bewegung aus, und zwar bewegt er sich mit der mittleren Ganggeschwindigkeit gleichförmig in der Richtung des Ganges fort. Der Kernpunkt besitzt natürlich ebenso wenig wie der Gesammtschwerpunkt während des Gehens einen bestimmten Ort im menschlichen Körper, sondern er wandert im Bauchraum hin und her.

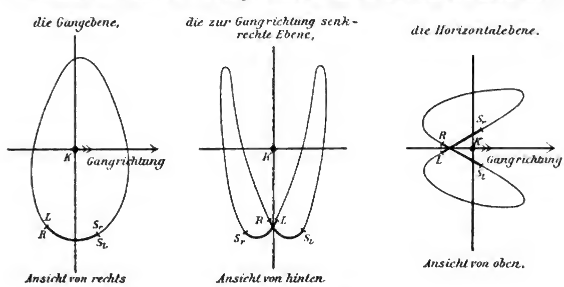
Die Gestalt der doppelt gekrümmten Bahn des Gesammtschwerpunktes im beweglichen Raume kann man sich leicht veranschaulichen, wenn man ihre Projectionen auf die drei Coordinatenebenen in's Auge fasst. Dieselben finden sich für die drei Versuche auf den Tafeln VIII, IX und X aufgezeichnet. Dabei ist, um die Ergebnisse der drei Versuche besser mit einander vergleichen zu können, in allen Fällen das oben schon angedeutete, später einzuführende bewegliche Coordinatensystem verwendet worden, welches den Kernpunkt K der Schwerpunktsbahn als Anfangspunkt besitzt, im Uebrigen aber dem ξyz-Coordinatensystem genau gleichwerthig ist. Das erste Bild jeder Reihe stellt die Projection auf die Gangebene in der Ansicht von rechts, das zweite Bild die Projection auf die zur Gangrichtung senkrechte Ebene in der Ansicht von hinten und das dritte Bild die Projection auf die Horizontalebene in der Ansicht von oben, und zwar in natürlicher Grösse, dar. Die zu den beiden ersten Versuchen gehörenden Bilder, welche sich auf den Gang des unbelasteten Menschen beziehen, stimmen gut mit einander überein. Die kleinen Unregelmässigkeiten in der Projection auf die Gangebene und die Horizontalebene haben, wie sich später herausstellen wird, ihren Grund darin, dass die Schwankungen des menschlichen Körpers in der Gangrichtung sich zwar in ihrer Periode genau dem ganzen Bewegungsvorgang einreihen, in ihrer Ausdehnung aber mehr durch äussere Umstände beeinflusst werden als die Schwankungen in den beiden anderen zur Gangrichtung senkrechten Richtungen. Wie vorauszusehen war, kommt auch in der Bahn des Gesammtschwerpunktes, wie bei den im I. Theil mitgetheilten Bahncurven der Gelenkmittelpunkte, das unserem Versuchsindividuum eigenthümliche unsymmetrische Verhalten in dem Gebrauch der beiden unteren Extremitäten zum Ausdruck.

Aus den Bildern der Tafeln VIII und IX lässt sich nun ohne Weiteres erkennen, wie sich die Projectionen der Bahn des Gesammtschwerpunktes bei vollkommen gleichmässigem und symmetrischem Gange des unbelasteten Menschen gestalten würden. Man erhält für diesen Fall die nebenstehenden Bilder (Figur 2).

Vergleicht man das Mittelbild mit den Bildern der Figur 18 auf Seite 280 des I. Theils, so erkennt man, dass die Bahn des Gesammtschwerpunktes in ihrer Ansicht von hinten der Bahn des Kopfscheitelpunktes am ähnlichsten ist, während sie sehr erheblich

in ihrer Gestalt von der Bahn der Hüftlinienmitte, und noch mehr von der Bahn der Hüftgelenkmittelpunkte abweicht. Dies ist um so mehr zu beachten, als man oft die Bewegung des Gesammtschwerpunktes mit der Bewegung der Hüftlinienmitte oder eines Punktes des Kreuzbeins identificirt findet. Gleichzeitig folgt aus dieser Abweichung, dass der Gesammtschwerpunkt während des Gehens sehr starke Ortsänderungen innerhalb des menschlichen Körpers erleidet. Wenn nun auch die Bahn des Gesammtschwerpunktes in ihrer Projection auf die zur Gangrichtung senkrechte Ebene der Bahn des Kopfscheitelpunktes sehr ähnlich ist, so ist sie doch viel weniger ausgedehnt als diese; sie ist um mehr als

Projection der relativen Schwerpunktsbahn des unbelasteten Menschen auf



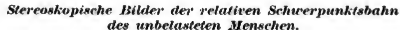
Figur 2 (natürliche Grösse).

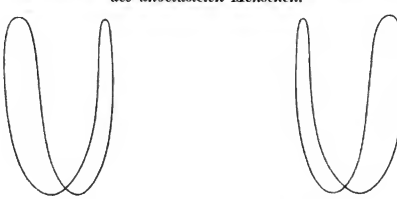
1 cm niedriger und beinahe um 1 cm schmäler. Es ergiebt sich bei näherer Untersuchung überhaupt ganz allgemein, dass der Gesammtschwerpunkt in dem mit der mittleren Ganggeschwindigkeit fortbewegten Raume in jeder Richtung kleinere Excursionen ausführt als irgend ein Punkt des menschlichen Körpers.

Von den drei Projectionen in Figur 2 werden die zweite und dritte während eines Doppelschrittes gerade einmal, dagegen die erste in derselben Zeit zweimal durchlaufen.

Wenn es nun auch nicht schwer ist, sich aus den drei Projectionen eine deutliche Vorstellung des Verlaufes der doppelt gekrümmten Bahn des Gesammtschwerpunktes zu machen, so kann man jedoch mit Hülfe des durch Figur 3 dargestellten stereoskopischen

Doppelbildes zu einer unmittelbaren Anschauung dieser Raumcurve gelangen. Ist es gelungen, die beiden Bilder entweder bei directer Beobachtung mit unbewaffneten Augen oder im Stereoskop zur Vereinigung zu bringen, so hat man die Curve plastisch vor sich, wie sie sich in der Ansicht von hinten darstellt. Man erkennt dann ohne Weiteres, dass sie zweimal an derselben Stelle durch





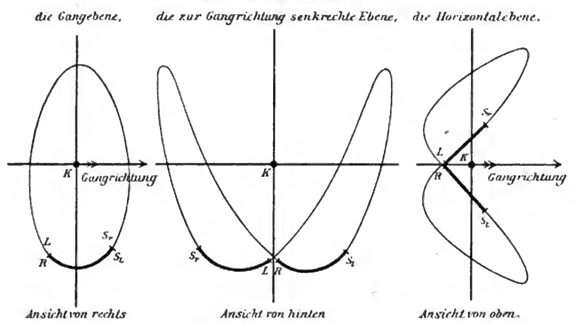
Figur 3. (I. und II. Versuch, ohne Belastung.)

die Gangebene hindurchtritt, und zwar jedesmal kurz bevor sie auf der einen oder anderen Seite ihren tiefsten Punkt erreicht. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchdringungen der Gangebene beschreibt dann der Gesammtschwerpunkt immer auf der Seite, auf welche er herübergetreten ist, ein hoch und etwas schräg nach vorn und aussen gestelltes Oval, so wie es das erste Bild der Figur 2 veranschaulicht.

Die drei zum III. Versuch gehörenden Projectionen der Bahn des Gesammtschwerpunktes auf Tafel X lassen erkennen, dass die Excursionen des Schwerpunktes beim Gang des belasteten Menschen grösser sind als beim Gehen ohne Belastung. Denn wenn auch, von einigen Unregelmässigkeiten und Unsymmetrien abgesehen, die Projectionen auf Tafel X im Grossen und Ganzen dieselbe Form zeigen, wie die entsprechenden auf den Tafeln VIII und IX, so springt doch sehr ihre grössere Breite und Höhe in die Augen. Während das zweite und dritte Bild auf den beiden früheren Tafeln geschlossene Curven darstellen, was durch die oben erwähnte kleine Drehung des Coordinatensystems um die z-Axe erreicht worden ist, sind die Bilder auf Tafel X nicht vollkommen geschlossen. Dies hätte sich in dem vorliegenden Falle auch

nicht durch geeignete Drehung des ursprünglichen Coordinatensystems erreichen lassen, weil, wie schon oben erwähnt, unser Versuchsindividuum in Folge des schweren Militärgepäcks im Verlauf des für die Untersuchung herausgegriffenen Doppelschrittes seine Gangrichtung nicht streng beibehalten hatte. Endlich ist in den zum III. Versuch gehörenden Projectionen noch mehr als in den anderen der Einfluss des asymmetrischen Verhaltens beider Beine wahrzunehmen. Sieht man von allen diesen Unregelmässigkeiten ab, so erhält man für den vollkommen gleichmässigen Gang mit Belastung durch das Militärgepäck folgende Typen für die drei Projectionen der Bahn des Gesammtschwerpunktes:

Projection der relativen Schwerpunktsbahn des durch das Militärgepäck belasteten Menschen auf

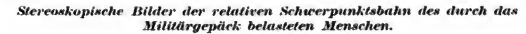


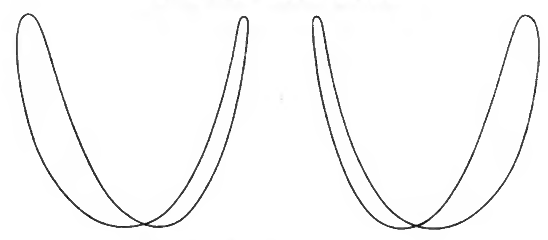
Figur 4 (natürliche Grösse).

Dabei ist wieder zu beachten, dass die erste Projection zweimal, die beiden anderen dagegen nur einmal während eines Doppelschrittes durchlaufen werden. Abgesehen von der Vergrösserung der Dimensionen ist der Verlauf der Raumcurve für den III. Versuch genau entsprechend dem für die beiden ersten Versuche. Dies bestätigt ein Vergleich der Figur 4 mit der früheren Figur 2.

Man kann sich auch hier wieder eine unmittelbare Anschauung von der Gestalt der doppelt gekrümmten Schwerpunktsbahn mit Hülfe eines stereoskopischen Doppelbildes verschaffen, so wie es durch umstehende Figur 5 dargestellt ist.

Für das Verständniss der Entstehung, sowie überhaupt der Bedeutung der durch die Figuren 2 bis 5 dargestellten Bahn des Gesammtschwerpunktes ist es nun noch nöthig, festzustellen, in welcher Beziehung die Bewegung des Schwerpunktes auf seiner doppelt gekrümmten Curve zu dem ganzen Bewegungsvorgang steht. Man muss wissen, an welcher Stelle seiner Bahn sich der Gesammtschwerpunkt im Moment des Aufsetzens eines Beins befindet, welches Curvenstück er während der Periode des Aufstützens beider Beine, und welches er während der Schwingung eines Beins durchläuft u. s. w. Um dies entscheiden zu können, muss man zunächst die Momente so genau wie möglich feststellen, in denen ein Bein sich auf den Boden aufsetzt, in denen ein Bein


Stereoskopische Bilder der relativen Schwerpunktsbahn des durch das Militärgepäck belasteten Menschen.



Figur 5. (III. Versuch mit Belastung)

seine Schwingung beginnt u. s. w. Im I. Theil finden sich auf Seite 272 für den I. und II. Versuch die Bewegungsphasen angegeben, denen alle diese Momente am nächsten stehen; hierdurch sind die letzteren bis auf einen Fehler von abgerundet 0,02 sec bestimmt, da zwei aufeinanderfolgende Bewegungsphasen um 0,038 sec auseinander liegen. Die Genauigkeit dieser Bestimmung lässt sich nun aber bedeutend weiter treiben, fast auf das Zehnfache erhöhen, so dass der Fehler nicht viel mehr als 0,002 sec beträgt.

Um z. B. die Momente R und L, in denen das rechte bezüglich linke Bein sich gerade auf den Boden aufsetzt, möglichst genau zu bestimmen, kann man folgender Maassen verfahren. Man zeichnet sich in natürlicher Grösse für jede Extremität die

Projection des Mittelpunktes vom I. Fussgelenk auf die Gangebene in einer Anzahl von Phasen auf, welche kurz vor und kurz nach dem zu bestimmenden Moment des Aufsetzens eines Beins liegen. Man kann dann sehr wohl das Curvenstück der Bahn des I. Fussgelenkmittelpunktes, welches vor dem Aufsetzen liegt, von dem auf das Aufsetzen folgenden unterscheiden. Das letztere ist nämlich nahezu ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in die zuerst aufgesetzte hintere Kante des Stiefelabsatzes fällt. Beide Curvenstücke gehen nun nicht stetig in einander über, sondern schneiden sich unter einem Winkel. Der Schnittpunkt entspricht dem Moment des Aufsetzens. Es lässt sich leicht bis etwa auf $\frac{1}{10}$ die Nummer abschätzen, welche diesem Moment zukommen würde, indem man sich zwischen zwei aufeinanderfolgende der vorhandenen Bewegungsphasen noch andere zu gleichen Zeitintervallen gehörende Phasen eingeschaltet denkt. Auf diese Weise findet man, dass den beiden Momenten R und L folgende Phasennummern bei den drei Versuchen zukommen:

	I. Versuch	II. Versuch	III. Versuch
Nummer des Moments R, in welchem das rechte Bein sich auf den Boden aufsetzt	10,0	$11\frac{1}{3}$	8,9
Nummer des Moments L, in welchem das linke Bein sich auf den Boden aufsetzt	23,0	24,0	$21\frac{3}{4}$

Die Angaben auf Seite 272 des I. Theils der Gangarbeit waren also schon ziemlich richtig.

Zur genaueren Bestimmung der Momente S_r und S_l, in denen das rechte, bezüglich linke Bein seine Schwingung beginnt, verwendet man zweckmässiger Weise den früher als Fussspitze bezeichneten Punkt der Fusslängsaxe. An der Curve desselben markirt sich der Moment, in welchem das Bein sich vom Fussboden ganz ablöst, besser als an der Bahn des Fussgelenkmittelpunktes, da der letztere noch während des Abwickelns des Fusses vom Boden in deutlicher Vorwärtsbewegung begriffen ist, während der als Fussspitze bezeichnete Punkt gleichzeitig nur geringe Ortsänderung erfährt. Es ist daher das Curvenstück der Bahn der Fussspitze, welches vor dem Anfang der Schwingung liegt, wiederum deutlich zu unterscheiden von dem darauffolgenden im ersten Stadium der Schwingung. Jenes fällt nach unten und vorn ab, und die zu den aufeinanderfolgenden Phasen gehörenden Punkte

der Curve befinden sich dicht neben einander, dieses steigt nach oben und vorn an, und die Curvenpunkte liegen gleich zu Anfang viel weiter aus einander. Demnach schneiden sich die beiden Curvenstücke unter einem Winkel, dessen Scheitelpunkt den Beginn der Schwingung anzeigt.

Mit Ausnahme der linken Extremität beim III. Versuch, für welche die Curve der Fussspitze nicht ermittelt worden ist, liessen sich auf diesem Wege für beide Beine die Momente sehr genau feststellen, in denen die Schwingung beginnt. Gleichzeitig brachte diese Untersuchung einen kleinen Fehler an's Tageslicht, der in der Tabelle 10 des I. Theils untergelaufen war. Die z-Coordinate der linken Fussspitze ist dort für die Bewegungsphase Nr. 12 zweifellos etwas zu gross angegeben; denn das vor dem Scheitelpunkt des Winkels liegende Stück erwies sich als zu klein und das folgende als zu flach im Vergleich zu dem Verlauf der entsprechenden Curve beim II. Versuch und den zu den rechten Extremitäten gehörenden Curven. Beides ändert sich, und es stellt sich vollkommene Uebereinstimmung ein, wenn statt 3,78 cm die um 3 mm kleinere Länge von 3,48 cm eingesetzt wird. Bei der im Uebrigen stattfindenden grossen Uebereinstimmung beider Versuche ist diese Correctur nicht willkürlich, sondern geradezu nothwendig. Auf welche Weise diese Ungenauigkeit entstanden ist, lässt sich natürlich jetzt nicht mehr leicht constatiren. Es ist ebenso gut möglich, dass bei der Uebertragung der betreffenden Tabelle aus der 4 eine 7 geworden ist, als dass sich vorher bei der Berechnung ein Fehler eingeschlichen hat. Unter Berücksichtigung dieser Verbesserung der z-Coordinate erhält man für die Momente S_r und S_l bei den drei Versuchen folgende Phasennummern:

	I. Versuch	II. Versuch	III. Versuch
Nummer des Moments S_r, in welchem das rechte Bein seine Schwingung beginnt	25,0	26,0	23,9
Nummer des Moments S_l, in welchem das linke Bein seine Schwingung beginnt	12,1	$13\frac{1}{3}$	—

Beachtet man, dass beim III. Versuch der Nummerunterschied zwischen dem Moment des Aufsetzens des linken Beins und des Ablösens des rechten Beins vom Fussboden abgerundet 2,1 beträgt, und dass bei den beiden ersten Versuchen diese

Differenzen fast genau mit den Nummerunterschieden der Momente R und S_l übereinstimmen, so kann man ohne Kenntniss der Curve der linken Fussspitze mit ziemlicher Genauigkeit als Nummer von S_l für den III. Versuch 11,0 angeben.

Nachdem ein Bein sich auf den Fussboden aufgesetzt hat, dreht der Fuss sich zunächst um die Hacke, bis er mit der ganzen Sohle auf dem Boden aufsteht, dann verweilt er einige Zeit in dieser Stellung und dreht sich zuletzt, bevor das Bein seine Schwingung beginnt, um eine allmählich immer weiter nach vorn wandernde Stelle des Fussballens. Es sind daher ausser den Momenten des Aufsetzens und Ablösens eines Beins noch für den ganzen Bewegungsvorgang die Momente von Wichtigkeit, welche den Zeitraum begrenzen, innerhalb dessen der Fuss mit der ganzen Sohle auf dem Boden aufsteht. Die Bestimmung dieser Momente lässt sich auf ganz ähnliche Weise wie die der bisher betrachteten mit Hülfe der in natürlicher Grösse aufgezeichneten Projectionen der Bahnen des Fussgelenkmittelpunktes und der Fussspitze auf die Gangebene bewirken.

Bezeichnet man den Anfang dieses Zeitraums mit A_r oder A_l und das Ende mit E_r oder E_l, je nachdem es sich um die rechte oder linke untere Extremität handelt, so erhält man folgende Nummern der zugehörigen Bewegungsphasen:

	I. Versuch	II. Versuch	III. Versuch
A_r	13,0	$14\frac{1}{3}$	$11\frac{1}{2}$
E_r	20,0	21,0	19,0
A_l	25,9	27,0	$24\frac{1}{2}$
E_l	7,0	$8\frac{1}{2}$	6,0

Mit Hülfe dieser Angaben ist man nun in der Lage, die einzelnen für den Bewegungsvorgang wichtigen Momente an der Bahn des Gesammtschwerpunktes zu markiren, so wie es in den Bildern auf den Tafeln VIII, IX und X geschehen ist.

Da bei dem vorliegenden Theil der Untersuchung nicht allein die Curve betrachtet werden soll, welche der Gesammtschwerpunkt beim Gehen beschreibt, sondern auch der Ablauf der Bewegung in der Zeit berücksichtigt werden soll, so weit er durch Geschwindigkeit und Beschleunigung der Bewegung charakterisirt ist, so macht es sich noch nöthig, die Zeit einzuführen, welche

von einem bestimmten Moment an bis zu den einzelnen Bewegungsphasen verflossen ist. Rechnet man bei jedem der drei Versuche die Zeit vom Moment der ersten Bewegungsphase an und beachtet, dass auf jede Secunde 26,09 Schwingungen der die einzelnen Phasen herausgreifenden Unterbrechungsstimmgabel kommen, so wird bis zur zweiten Bewegungsphase die Zeit von $\frac{1}{26,09}$ sec, und allgemein bis zur n^{ten} Bewegungsphase eine Zeit von $\frac{n-1}{26,09}$ sec verflossen sein (vgl. Seite 187 des I. Theils). Es kommen in Folge dessen den einzelnen Bewegungsphasen folgende Zeiten zu:

Tabelle 8.

Nummer der Bewegungsphase	Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Zeit in sec.
1	0,000	9	0,307	17	0,613	25	0,920
2	0,038	10	0,345	18	0,652	26	0,958
3	0,077	11	0,383	19	0,690	27	0,997
4	0,115	12	0,422	20	0,728	28	1,035
5	0,153	13	0,460	21	0,767	29	1,073
6	0,192	14	0,498	22	0,805	30	1,112
7	0,230	15	0,537	23	0,843	31	1,150
8	0,268	16	0,575	24	0,882		

Durch Interpolation kann man leicht aus dieser Tabelle 8 die zu jeder Zwischenphase gehörende Zeit ableiten. Man erhält dann für die einzelnen in Betracht gezogenen Momente die in die folgende Tabelle 9 der Reihe nach eingeordneten Zeitangaben:

Tabelle 9.

Bezeichnung des Momentes	I. Versuch		II. Versuch		III. Versuch	
	Phasennummer	Zeit in sec.	Phasennummer	Zeit in sec.	Phasennummer	Zeit in sec.
E_l	7,0	0,230	$8\frac{1}{2}$	0,287	6,0	0,192
R	10,0	0,345	$11\frac{1}{3}$	0,396	8,9	0,303
S_l	12,1	0,426	$13\frac{1}{3}$	0,473	11,0	0,383
A_r	13,0	0,460	$14\frac{1}{3}$	0,511	$11\frac{1}{2}$	0,402
E_r	20,0	0,728	21,0	0,767	19,0	0,690
L	23,0	0,843	24,0	0,882	$21\frac{3}{4}$	0,796
S_r	25,0	0,920	26,0	0,958	23,9	0,878
A_l	25,9	0,955	27,0	0,997	$24\frac{1}{2}$	0,901

Aus dieser Tabelle kann man nun ohne Weiteres die Dauer wichtiger Abschnitte der Bewegung der unteren Extremitäten ablesen. So erkennt man, dass zwischen dem Moment des Aufsetzens des rechten Beins und dem darauf folgenden Moment des Aufsetzens des linken Beins bei den drei Versuchen bezüglich eine Zeit von 0,498 sec; 0,486 sec und 0,493 sec verstreicht. Ferner ergibt sich, dass das rechte Bein bei den drei Versuchen bezüglich 0,494 sec; 0,485 sec und 0,495 sec später als das linke seine Schwingung beginnt. Bei absolut gleichmässigem Gange müssten diese beiden Zeiten für jeden Versuch gleich gross ausfallen und mit der einfachen Schrittdauer übereinstimmen, welche nach dem Früheren (vgl. Seite 67) für die drei Versuche bezüglich 0,495 sec; 0,485 sec und 0,494₈ sec beträgt. Wenn nun auch keine vollkommene Uebereinstimmung vorhanden ist, so sieht man doch, dass selbst bei asymmetrischem Verhalten beider Beine, wie es unserem Individuum eigenthümlich ist, die Unterschiede zwischen diesen drei zu demselben Versuche gehörenden Zeiten nur sehr gering sind; sie betragen im höchsten Falle beim I. Versuch $\frac{4}{1000}$ Secunden, bleiben aber bei den anderen Versuchen noch unter dieser kleinen Zeitgrösse. Würde man ohne Kenntniss der Bahn des Gesammtschwerpunktes das arithmetische Mittel der beiden ersten Zeitangaben als einfache Schrittdauer auffassen, so würde man im höchsten Falle nur einen Fehler von $\frac{1}{1000}$ Secunde begehen. So gross kann aber schon an und für sich der Fehler bei der Ermittelung der Schrittdauer mit Hülfe der Schwerpunktsbahn gewesen sein. Es befinden sich daher die beiden ganz von einander unabhängigen Bestimmungen der einfachen Schrittdauer in Anbetracht der überhaupt bei unseren Versuchen erreichten Genauigkeit in vollständiger Uebereinstimmung und controliren sich gegenseitig. Man hat daher die Sicherheit, dass auch die übrigen aus Tabelle 9 abzuleitenden Zeitdauern bis auf ungefähr $\frac{1}{1000}$ Secunde genau sind, so dass also die Angabe bis auf drei Decimalstellen ihre volle Berechtigung hat.

Durch Subtraction der Zeiten von S_r und R erhält man die Dauer des Aufstützens des rechten Beins; auch die Dauer des Aufstützens des linken Beins kann man aus Tabelle 9 ableiten, indem man zuerst die in der Tabelle angegebene Zeit für S_l um die doppelte Schrittdauer vermehrt und dann um die Zeit von L vermindert. Die Dauer der Drehung des aufgesetzten Fusses um

die Hacke ist die Zeit zwischen R und A_r, bezüglich L und A_l. Die zwischen A_r und E_r liegende Zeit gibt die Dauer des Aufstehens des rechten Fusses mit der ganzen Sohle an; auch für den linken Fuss kann man diese Zeit bestimmen, nachdem man vorher die Zeit von E_l um die doppelte Schrittdauer vermehrt hat. Die Zeitstrecken $E_r S_r$ bezüglich $E_l S_l$ geben die Zeit an, während welcher der Fuss sich um eine allmählich nach vorn rückende Stelle des Fussballens dreht. Die zwischen S_l und L liegende Zeit ist gleich der Schwingungsdauer des linken Beins; die Schwingungsdauer des rechten Beins erhält man, indem man die in Tabelle 9 angegebene Zeit für R zunächst wieder um die doppelte Schrittdauer vermehrt und davon die Zeit von S_r abzieht. Endlich erhält man in den Zeitstrecken RS_l und LS_r die Dauer des gleichzeitigen Aufstehens beider Beine auf dem Boden. In der folgenden Tabelle finden sich alle auf diese Weise berechneten Zeitdauern und die schon früher angegebenen Schrittdauern zusammengestellt.

Tabelle 10.

		I. Versuch		II. Versuch		III. Versuch	
		Zeit in sec.	Arithm. Mittel	Zeit in sec.	Arithm. Mittel	Zeit in sec.	Arithm. Mittel
Dauer eines Doppelschrittes . .		0,990		0,970		$0,989_5$	
Dauer eines einfachen Schrittes .		0,495		0,485		$0,494_8$	
Aufstehen eines Beins auf dem Fussboden . . .	rechts	0,575	0,574	0,562	$0,561_5$	0,575	$0,575_8$
	links .	0,573		0,561		$0,576_5$	
Drehen des aufgesetzten Fusses um die Hacke	rechts	0,115	$0,113_5$	0,115	0,115	0,099	0,102
	links .	0,112		0,115		0,105	
Aufstehen eines Beins mit der ganzen Fusssohle .	rechts	0,268	$0,266_5$	0,256	0,258	0,288	$0,284_3$
	links .	0,265		0,260		$0,280_5$	
Drehen des aufgesetzten Fusses um den Ballen	rechts	0,192	0,194	0,191	$0,188_5$	0,188	$0,189_5$
	links .	0,196		0,186		0,191	
Schwingen eines Beins .	rechts	0,415	0,416	0,408	$0,408_5$	$0,414_5$	$0,413_8$
	links .	0,417		0,409		0,413	
Aufstehen beider Beine auf dem Fussboden . . .	RS_l	0,081	0,079	0,077	$0,076_5$	0,080	0,081
	LS_r	0,077		0,076		0,082	

Die Angaben dieser Tabelle sind im Gegensatz zu denen von Tabelle 9 ganz unabhängig von der Wahl des Nullpunktes für die Zeit; sie besitzen daher absolute Gültigkeit.

III. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gesammtschwerpunktes.

Wenn man die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, mit denen ein Punkt seine Bewegung ausführt, ableiten will, so muss man das Gesetz kennen, nach welchem die im Raume von dem Punkte in den verschiedenen Richtungen zurückgelegten Wegstrecken von der Zeit abhängen. Hat man, wie im vorliegenden Falle, die Bahn des Punktes auf ein rechtwinkliges räumliches Coordinatensystem bezogen, so handelt es sich demnach darum, die drei Coordinaten des bewegten Punktes in ihrer Abhängigkeit von der Zeit darzustellen. In manchen Fällen, besonders wenn die Bedingungen für die Bewegung genau bekannt sind, gelingt es, Formeln aufzufinden, welche die Beziehungen zwischen den drei Coordinaten einerseits und der von einem bestimmten Moment an verflossenen Zeit andererseits mathematisch präcisiren. Es läuft dann die Bestimmung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen auf die rein mathematische Aufgabe wiederholter Differentiation bestimmter Ausdrücke hinaus. Das Gesetz der Bewegung des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers beim Gehen ist nun viel zu complicirt, als dass es sich in verhältnissmässig einfachen Formeln ausdrücken liess. Das Gleiche gilt wohl im Allgemeinen für alle Bewegungen von Organismen. Alle mathematischen Formeln werden nur mit gewisser Annäherung die wirkliche Bewegung treffen. Daher werden auch die aus ihnen auf dem Wege der Differentiation abgeleiteten Geschwindigkeiten, und in noch stärkerem Maasse die Beschleunigungen, so ungenau sein, dass sie unmöglich zu einer richtigen Vorstellung von dem gesetzmässigen Verlauf der Bewegung und den dabei thätigen Kräften führen können.

Man muss in Folge dessen in der physiologischen Mechanik einen anderen Weg zur Ableitung der Geschwindigkeiten und Be-

schleunigungen einschlagen, welcher eine Genauigkeit zu erzielen gestattet, die zur Genauigkeit der empirischen Bestimmung der Bewegungsbahn in keinem Missverhältniss steht. Dieser Weg ist rein geometrischer Natur. Man geht nämlich von Diagrammen aus, welche in der schon früher beschriebenen Weise die Abhängigkeit der Coordinaten des Gesammtschwerpunktes von der Zeit darstellen. Diese Diagramme, welche in der Mechanik den Namen „Wegcurven“ führen, lassen sich bei einer genügenden Anzahl directer Coordinatenbestimmungen mit grosser Genauigkeit aufzeichnen und sind überhaupt ein viel treffenderer Ausdruck für das Bewegungsgesetz als irgend eine Näherungsformel.

Die Wegcurven des Gesammtschwerpunktes, welche nicht mit der Bahncurve desselben zu verwechseln sind, haben als Ordinaten die Werthe der Coordinaten des Gesammtschwerpunktes und als Abscissen der Zeit proportionale Strecken, wobei die Zeit vom Moment der ersten Bewegungsphase an gemessen werden soll. Mit Rücksicht auf die erzielte Genauigkeit ist es zweckmässig, 1 Secunde durch die Länge von 1 Decimeter darzustellen; dann entspricht z. B. einem jeden Centimeter der Abscisse eine Zeitdauer von 0,1 Secunde und einem Millimeter die von 0,01 Secunde. Man kann nun nicht zu jedem Millimeter der Abscisse die zugehörige Ordinate aufzeichnen; dies würde nur dann möglich sein, wenn die durch die Momentphotographie fixirten Bewegungsphasen in dem kurzen Zeitraume von 0,01 Secunde auf einander folgten. Da in jeder Secunde nicht 100, sondern nur 26,09 Phasen abgebildet worden sind, so kann man nur für die Abscissen die Ordinaten angeben, deren Längen durch die Zahlen der Tabelle 8 auf Seite 82 in Decimetern ausgedrückt sind. Die 31 Punkte, welche man auf diese Weise von jeder Wegcurve gewinnen kann, genügen nun vollständig, um die ganze Wegcurve in ihrem Verlauf aufzeichnen zu können. Man hat hierbei nur zu beachten, dass es in der Natur der Sache liegt, dass dieser Verlauf ein gleichmässiger und stetiger ist; denn Buckel und directe Unstetigkeiten könnten nur dann auftreten, wenn der menschliche Körper beim Gehen der Einwirkung heftiger Stösse unterworfen wäre. Daraus folgt aber weiter, dass man an den Curven nicht nur grobe Fehler der Coordinatenbestimmung auf den ersten Blick erkennen würde, sondern dass man sogar in vielen Fällen in der Lage ist, die Wegcurven mit grösserer Genauigkeit aufzuzeichnen

als selbst die einzelnen auf empirischem Wege gewonnenen Punkte derselben, so dass man also unter Umständen rückwärts mit Hülfe der Wegcurven die Coordinaten noch etwas verbessern kann.

Ein Blick auf die obersten Figurenreihen der Tafeln V, VI und VII bestätigt diese Thatsache. Es finden sich daselbst die zu den drei Coordinaten des Gesammtschwerpunktes gehörenden Wegcurven für alle drei Versuche in der beschriebenen Weise aufgezeichnet. Die zur z-Coordinate gehörenden Wegcurven (Figuren am weitsten rechts), welche die Bewegung des Gesammtschwerpunktes in verticaler Richtung veranschaulichen, sind vollkommen genau durch die in der Figur mit angegebenen empirisch gefundenen Punkte bestimmt; es lag fast an keiner Stelle Veranlassung vor, das Diagramm im Interesse der Stetigkeit auch nur um einen Millimeter an den vorher in das Millimeternetz eingetragenen Punkten vorüberzuziehen. Auch die zu der y-Coordinate gehörenden Wegcurven (mittlere Figuren), welche die Bewegung des Gesammtschwerpunktes in der Seitenrichtung graphisch darstellen, mussten nur an wenig Stellen etwas an den direct bestimmten Punkten vorbeigehen, um nicht kleine, in Wirklichkeit sicher nicht vorhandene Buckelchen aufzuweisen. Dagegen erforderten die zur Bewegung des Gesammtschwerpunktes in der Gangrichtung relativ zum beweglichen Coordinatenraume gehörenden Wegcurven (Figuren am weitsten links) an vielen Stellen ein nicht unbeträchtliches Abweichen von den empirisch gefundenen Punkten. Man erkennt ohne Weiteres, dass die Curven, welche diese Punkte streng mit einander verbinden, viel zu viel Unebenheiten aufweisen würden, als dass sie einen genauen Ausdruck für das Gesetz der Bewegung in der Gangrichtung abgeben könnten. Denn, würden die Buckel Berechtigung haben, so müssten sie sich zunächst an derselben Figur periodisch wiederholen, und ausserdem müssten sie nothwendiger Weise bei den beiden ersten, unter vollkommen gleichen Bedingungen angestellten Versuchen in übereinstimmender Weise auftreten. Beides ist nicht der Fall. Zieht man dagegen für jeden Versuch unabhängig von dem anderen eine stetig und ohne Buckel verlaufende Curve, welche sich möglichst eng den vorhandenen Punkten anschliesst, so stellt sich nicht nur periodische Wiederholung bei jeder der beiden Curven ein, sondern es tritt auch eine ganz überraschende Uebereinstimmung beider zu Tage. Man kann daher mit grosser Annäherung diese Curven

als den wahren Ausdruck für das betreffende Bewegungsgesetz auffassen.

Mit Hülfe der Wegcurven kann man sich nun leicht eine deutliche Anschauung von dem ganzen Verlauf der Bewegung des Gesammtschwerpunktes in der Richtung der betreffenden Coordinate machen. Man braucht sich zu diesem Zwecke nur vorzustellen, dass ein Punkt die Wegcurve in der Weise durchläuft, dass seine Projection auf die horizontale Abscissenaxe oder, wenn man will, sein senkrecht auf diese Axe geworfener Schatten dabei mit constanter Geschwindigkeit in jeder Secunde um 1 dm fortschreitet, dann wird seine Projection auf die verticale Ordinatenaxe, oder sein senkrecht auf diese Axe oder eine zu ihr parallele Gerade geworfener Schatten, sowohl der Geschwindigkeit als auch der Beschleunigung nach genau die Bewegung des Gesammtschwerpunktes in der Richtung der betreffenden Coordinate ausführen. Daraus geht aber hervor, dass eine Wegcurve thatsächlich das ganze Bewegungsgesetz für die in Frage kommende Richtung zum Ausdruck bringt. Es müssen sich daher auch in ihrem Verlauf alle Einzelheiten des Bewegungsvorganges ausprägen, und es muss gelingen, nicht nur die Geschwindigkeiten, sondern auch die Beschleunigungen des bewegten Punktes aus der Form der Wegcurve abzuleiten.

Was zunächst die Geschwindigkeiten anlangt, so finden dieselben ihren Ausdruck in der im Allgemeinen fortwährend wechselnden Richtung der Wegcurve; die Geschwindigkeit ist nämlich für jeden Moment proportional der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die Tangente an den entsprechenden Punkt der Wegcurve mit der Abscissenaxe bildet. Da bei den Wegcurven auf den Tafeln V, VI und VII 1 Secunde durch die Länge von 1 Decimeter dargestellt ist, so würde die trigonometrische Tangente dieses Winkels direct die Maasszahl der Geschwindigkeit angeben, wenn man als Einheit der Geschwindigkeit diejenige auffassen wollte, bei welcher im Falle gleichförmiger Bewegung der bewegte Punkt in 1 Secunde gerade einen Weg von 1 Decimeter zurücklegt. Da im Verlaufe der vorliegenden Untersuchung durchweg die Längen in Centimetern ausgedrückt worden sind, so empfiehlt es sich indessen, als Geschwindigkeitseinheit diejenige einzuführen, welche einem Weg von 1 Centimeter pro Secunde entspricht; es ist in der Mechanik gebräuchlich, dies durch die

Benennung cm sec^{-1} zum Ausdruck zu bringen. Dann muss man aber alle trigonometrischen Tangenten, die zu den einzelnen Punkten der 9 Wegcurven gehören, noch mit dem Factor 10 multipliciren.

Praktisch lässt sich die Bestimmung der auf die Einheit cm sec^{-1} bezogenen Geschwindigkeit an den Wegcurven im vorliegenden Falle für jeden Moment so ausführen, dass man an den betreffenden Punkt der Wegcurve die Tangente construirt und dann dieselbe unter Beibehaltung ihrer Richtung zu der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit horizontaler und verticaler Kathete macht, dessen horizontale Kathete die Länge von 1 dm besitzt. Die Anzahl der Centimeter für die Länge der verticalen Kathete gibt direct die Anzahl der Geschwindigkeitseinheiten an. Diese Art der Messung der Geschwindigkeit ist dadurch sehr vereinfacht, dass man die Wegcurve in ein Millimeternetz eingezeichnet hat. Nach der Construction der Tangente, welche sehr sorgfältig ausgeführt werden muss, läuft die Messung dann nur noch auf ein Abzählen von Centimetern hinaus. Man zählt von einem beliebigen Punkte der Tangente aus zuerst 10 cm in horizontaler Richtung auf dem Millimeternetz ab und bestimmt darauf die Anzahl der Centimeter, welche zwischen dem Endpunkt dieser horizontalen Strecke und dem in verticaler Richtung darüber oder darunter befindlichen Punkte der Tangente liegen. Natürlich muss man für diesen Zweck die Wegcurve auf ein genügend ausgedehntes und ausserdem sehr genau construirtes Millimeternetz aufgezeichnet haben.

In dieser Weise sind für eine genügende Anzahl von Punkten der 9 Wegcurven die Geschwindigkeiten ermittelt worden. Die Resultate dieser Messungen kann man wieder in sehr anschaulicher Weise durch Diagramme darstellen, welche ganz ähnlich wie die Wegcurven construirt sind. Die Abscissen dieser Diagramme geben die seit dem Moment der ersten Bewegungsphase verflossene Zeit an, in der Weise, dass, wie bei den Wegcurven, jedem Millimeter ein Zeitintervall von 0,01 Secunde entspricht. Die zugehörigen Ordinaten sind den Geschwindigkeiten proportional. Wollte man dabei die Einheit der Geschwindigkeit durch 1 cm darstellen, so würden die Diagramme in verticaler Richtung eine unverhältnissmässig grosse Ausdehnung erhalten und daher wenig übersichtlich werden. Es empfiehlt sich daher, die Einheit cm sec^{-1} der Geschwindigkeit durch eine Länge von 1 mm wiederzugeben.

Dies entspricht auch mehr der Genauigkeit, welche man bei der Bestimmung der Geschwindigkeit im vorliegenden Falle überhaupt erreichen kann. Derartige Diagramme, welche die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit graphisch darstellen, nennt man „Geschwindigkeitscurven“.

Auf den Tafeln V, VI und VII finden sich entsprechend den Bewegungen in den drei Hauptrichtungen für jeden der drei Versuche die Geschwindigkeitscurven unter den zugehörigen Wegcurven aufgezeichnet. Man erkennt ohne Mühe, dass zwischen den beiden unter einander stehenden Curven in jedem Falle sehr enge Beziehungen bestehen. Die Geschwindigkeitscurve durchkreuzt immer in demselben Moment die Abscissenaxe, in welchem die zugehörige Wegcurve ein Maximum oder ein Minimum besitzt. Dies hat darin seinen Grund, dass in jedem Maximum oder Minimum die Tangente an die Wegcurve der Abscissenaxe parallel läuft; sie bildet dann mit derselben einen Winkel von 0^0, für welchen die trigonometrische Tangente den Werth 0 besitzt. Damit stimmt auch die Thatsache überein, dass die Geschwindigkeit immer in demselben Momente Null ist, in welchem die Richtung der Bewegung sich umkehrt; denn eine solche Umkehrung der Bewegungsrichtung prägt sich an der Wegcurve als Maximum oder Minimum aus. Ferner besitzt eine jede Geschwindigkeitscurve immer dann selbst ein Maximum oder Minimum, wenn die zugehörige Wegcurve aus einer nach unten convexen Krümmung in concave Krümmung übergeht, oder umgekehrt. Ein solcher Punkt der Wegcurve, den man „Wendepunkt“ nennt, ist nämlich dadurch charakterisirt, dass die Tangente, welche beim Durchlaufen der Wegcurve kurz vor dem Wendepunkte ihre Richtung gegen die Abscissenaxe so änderte, dass sie sich in einem bestimmten Sinne zu drehen schien, im Wendepunkte gerade ihren Drehungssinn umkehrt. Wurden vorher die Winkel mit der Abscissenaxe immer grösser, so nehmen sie nun nach dem Durchschreiten des Wendepunktes fortwährend ab, und umgekehrt. Da die trigonometrischen Tangenten gleichzeitig mit den Winkeln an Grösse zunehmen und abnehmen, so wird demnach die Geschwindigkeit in jedem, einem Wendepunkt der Wegcurve entsprechenden Moment entweder einen relativ grössten oder kleinsten Werth besitzen.

Man kann also aus der Gestalt einer Wegcurve auf den ersten

Blick erkennen, wann die Geschwindigkeit des Gesammtschwerpunktes in der betreffenden Richtung durch den Werth o hindurchgeht und infolgedessen die Bewegung ihre Richtung ändert, und in welchem Momente die Geschwindigkeit in der einen oder anderen Richtung relativ am grössten ist. Da diese Momente von ganz besonderer Bedeutung für die Bewegung des Gesammtschwerpunktes sind, so empfiehlt es sich, bei der Bestimmung der Geschwindigkeitscurve zuerst sein Augenmerk auf diese Stellen der Wegcurve zu richten und die zugehörigen Abscissen, und bei den Wendepunkten ausserdem die Richtungen der Tangenten, so genau wie nur irgend möglich zu messen. Damit hat man einige wesentliche Punkte der Geschwindigkeitscurve festgelegt, durch welche schon im Grossen und Ganzen der Verlauf derselben charakterisirt ist. Dann erst geht man zur genaueren Ermittelung von zwischen diesen Momenten liegenden Werthen der Geschwindigkeit über. Wie viel derartige Messungen man ausführen muss, um den genauen Verlauf der Geschwindigkeitscurve festzustellen, das richtet sich ganz nach der Gestalt der Wegcurve. Ist dieselbe so regelmässig wie bei der Bewegung des Gesammtschwerpunktes in der verticalen Richtung, so braucht man weniger Bestimmungen auszuführen als für die Bewegung in den beiden anderen Hauptrichtungen. Die meisten Messungen erforderte im vorliegenden Falle die Bewegung in der Seitenrichtung. Jedenfalls ist es zweckmässig, sich hierbei gar nicht mehr an die ursprünglich bei den Versuchen festgelegten Bewegungsphasen zu halten; denn es liegt ja ein Hauptvortheil der graphischen Darstellung gerade darin, dass man für jeden beliebigen Moment den zugehörigen Werth der Geschwindigkeit erhält, gleichgültig, ob dieser Moment vorher beim Versuch durch die Photographie festgelegt war oder nicht.

Für die Bestimmung der Beschleunigung, welche der Gesammtschwerpunkt bei seiner Bewegung in einer der drei mit den Richtungen der Coordinatenaxen übereinstimmenden Hauptrichtungen in jedem Moment besitzt, geht man zweckmässiger Weise von den Geschwindigkeitscurven aus. Es lassen sich zwar einige charakteristische Werthe der Beschleunigung auch ohne Weiteres direct aus den Wegcurven erkennen, im Allgemeinen kommt man aber bei Verwendung der Geschwindigkeitscurven viel schneller zum Ziele. Dies ist dem Umstande zu danken, dass die Beschleunigungen in derselben Beziehung zu den Geschwindigkeiten

stehen, wie die letzteren zu den Werthen der Coordinaten selbst. Wie die Geschwindigkeiten ein Maass für das Wachsthum der Coordinaten abgeben, so können die Beschleunigungen als Maass für das Wachsthum der Geschwindigkeiten aufgefasst werden. Stellt man sich vor, dass ein Punkt die Geschwindigkeitscurve in der Weise durchläuft, dass dabei seine Projection auf die horizontale Abscissenaxe mit constanter Geschwindigkeit in jeder Secunde um 1 dm fortschreitet, so wird seine Projection auf die verticale Ordinatenaxe eine Bewegung ausführen, deren Geschwindigkeit in jedem Moment genau die Beschleunigung des Gesammtschwerpunktes in der Richtung der betreffenden Coordinate angibt. Daraus geht aber hervor, dass die Beschleunigung ihren Ausdruck in der im Allgemeinen fortwährend wechselnden Richtung der Geschwindigkeitscurve finden muss. Wie die Geschwindigkeit durch die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Tangente an die Wegcurve und der Abscissenaxe gemessen wurde, so ist die Beschleunigung für jeden Moment proportional der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die Tangente an den entsprechenden Punkt der Geschwindigkeitscurve mit der Abscissenaxe bildet. Da bei den Geschwindigkeitscurven auf den Tafeln V, VI und VII 1 Secunde durch die Länge von 1 Decimeter, die Geschwindigkeitseinheit $cm\,sec^{-1}$ dagegen durch die Länge von 1 Millimeter dargestellt ist, so wird die erwähnte trigonometrische Tangente immer nur den hundertsten Theil der Beschleunigung angeben, wenn man consequenter Weise als Einheit der Beschleunigung diejenige auffasst, bei welcher im Falle gleichförmig beschleunigter Bewegung die Geschwindigkeit in jeder Secunde um die Geschwindigkeitseinheit $cm\,sec^{-1}$ vermehrt wird. Diese Beschleunigungseinheit deutet man in der Mechanik durch die Benennung $cm\,sec^{-2}$ an. Man hat daher im vorliegenden Falle alle trigonometrischen Tangenten, welche zu den einzelnen Punkten der 9 Geschwindigkeitscurven gehören, noch mit dem Faktor 100 zu multipliciren, um die Beschleunigungen in $cm\,sec^{-2}$ ausgedrückt zu erhalten.

Es sind nun in derselben Weise, wie es weiter oben für die Bestimmung der Geschwindigkeiten aus einander gesetzt worden ist, aus einer genügenden Anzahl von Punkten der 9 Geschwindigkeitscurven die Beschleunigungen ermittelt worden. Man kann sich auch hier wieder mit Hülfe dieser Messungsresultate Diagramme

construiren, welche die Abhängigkeit der Beschleunigung von der Zeit graphisch veranschaulichen. Natürlich wird man die der Zeit proportionalen Abscissen wieder so bestimmen, dass 1 Secunde einer Länge von 1 Decimeter entspricht. Dagegen empfiehlt es sich bei diesen Diagrammen, die Einheit cm sec^{-2} der Beschleunigung nur durch eine Länge von $\frac{1}{10}$ mm darzustellen, wenn die Curven nicht zu unübersichtlich werden sollen. Dies entspricht auch etwa der Genauigkeit, welche sich überhaupt bei der Ableitung der Beschleunigungen erreichen lässt. Denn man hat wohl zu beachten, dass bei fortgesetzter Ableitung neuer Diagramme durch Bestimmung der Tangentenrichtungen voraufgehender Diagramme die unvermeidlichen Constructionsfehler sich immer mehr häufen werden. Derartige Diagramme, welche die Abhängigkeit der Beschleunigung von der Zeit graphisch darstellen, nennt man „Beschleunigungscurven".

Man findet für jeden der drei Versuche die zu den Bewegungen in den drei Hauptrichtungen gehörenden Beschleunigungscurven ebenfalls auf den Tafeln V, VI und VII unter den zugehörigen Wegcurven und Geschwindigkeitscurven aufgezeichnet. Da dieselben in gleicher Weise aus den Geschwindigkeitscurven hervorgehen als die letzteren aus den Wegcurven, so werden auch zwischen ihnen und den Geschwindigkeitscurven dieselben engen Beziehungen bestehen wie zwischen den beiden ersten Curvenarten. Eine Beschleunigungscurve durchschneidet stets in demselben Moment die Abscissenaxe, in welchem die zugehörige Geschwindigkeitscurve durch ein Maximum oder Minimum hindurchgeht. Da diese Stellen der Geschwindigkeitscurven aber andererseits den Wendepunkten der zugehörigen Wegcurven entsprechen, so kann man schon aus den letzteren erkennen, in welchen Momenten die Beschleunigung der Bewegung des Gesammtschwerpunktes den Werth 0 besitzt. Ferner hat die Beschleunigung relativ grösste oder kleinste Werthe in allen Momenten, für welche die entsprechende Geschwindigkeitscurve durch einen Wendepunkt hindurchläuft. An den Wegcurven sind diese Momente nicht besonders auffällig in der Gestalt ausgeprägt. —

In den Wegcurven, Geschwindigkeitscurven und Beschleunigungscurven für jede der drei Bewegungscomponenten hat man nun das ganze Bewegungsgesetz für den Gesammtschwerpunkt anschaulich vor Augen. Um zu erkennen, in welcher Weise sich

die Bewegung des Gesammtschwerpunktes der Bewegung der unteren Extremitäten einreiht, hat man nur noch nöthig, an den Diagrammen die Momente R, L und S_r, S_l zu markiren, in denen ein Bein sich auf den Fussboden aufsetzt oder denselben verlässt, um seine Schwingung um den Hüftgelenkmittelpunkt zu beginnen. Es ist ferner nicht unzweckmässig, auch die Momente A_r, A_l und E_r, E_l anzudeuten, in denen der jeweils auf dem Fussboden allein aufstehende Fuss die Periode anfängt oder beendet, in welcher er längs der ganzen Sohle mit dem Fussboden in Berührung ist. Dies ist auf den Tafeln V, VI und VII für jeden der drei Versuche in der Weise geschehen, dass die Verticalen, welche nach Tabelle 9 auf Seite 82 den betreffenden Momenten entsprechen, durch stärkere Zeichnung vor den Verticalen des Millimeternetzes hervorgehoben sind, und zwar für die weniger wichtigen Momente A und E mittelst einer unterbrochenen Linie. Die Bezeichnung des einer jeden dieser Verticalen entsprechenden Momentes findet sich am oberen Ende derselben angeschrieben.

Durch diese Verticalen hat man nun neben der Bewegung des Gesammtschwerpunktes mit seinen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ausserdem den ganzen Bewegungsvorgang des Gehens in seinen wichtigsten Etappen anschaulich vor Augen. Man erkennt ohne Weiteres, dass bei allen drei Versuchen der Moment der ersten Bewegungsphase zufällig in die Periode hineinfällt, in welcher das linke Bein allein auf dem Fussboden aufsteht, während das rechte Bein von hinten nach vorn schwingt. Der linke Fuss hat sich beim I. und III. Versuch kurz vorher mit der ganzen Sohle aufgesetzt; denn es vergeht noch eine verhältnissmässig lange Zeit, beim I. Versuch 0,230 sec und beim III. Versuch 0,192 sec, bis der linke Fuss beginnt, sich vom Boden abzuwickeln, indem er sich um einen Punkt seines Ballens dreht (Moment E_l). Die ganze Periode des Aufstehens des linken Beins mit ganzer Fusssohle dauert aber nach Tabelle 10 auf Seite 84 bei den beiden Versuchen bezüglich nur 0,265 sec und 0,2805 sec. Beim II. Versuch ist im Moment der ersten Bewegungsphase der aufgesetzte linke Fuss jedenfalls noch in Drehung um seine Hacke begriffen; denn da die doppelte Schrittdauer bei diesem Versuch 0,970 sec betrug, und der später folgende Moment A_l, in welchem der linke Fuss sich mit der ganzen Sohle auf den Fussboden aufsetzt, nach Tabelle 9 erst 0,997 sec nach dem Moment der

ersten Bewegungsphase eintritt, so müsste bei vollkommen gleichmässigem Gange zu dem vorhergehenden Moment A_l die Zeit von 0,027 sec gehören. In Wirklichkeit wird vielleicht die Zeit etwas kleiner sein; der genaue Moment A_l liess sich aber nach der früher angegebenen Methode hier nicht feststellen, da er zu nahe dem Moment der ersten Bewegungsphase liegt. Deshalb ist derselbe auch nicht in den Diagrammen des II. Versuchs auf Tafel VI durch eine Verticale markirt worden. Zwischen den nun folgenden Momenten E_l und S_l wickelt sich der linke Fuss vom Boden ab und verlässt ihn im Moment S_l ganz, um nach vorn zu schwingen. Dazwischen, im Moment R, setzt sich der rechte Fuss mit der Hacke auf den Fussboden auf. Er dreht sich dann zunächst um die Hacke, bis er im Moment A_r mit der ganzen Sohle auf dem Boden auftrifft, nachdem kurz vorher das linke Bein seine Schwingung begonnen hat. Zwischen A_r und E_r befindet der rechte Fuss sich dann längs der ganzen Fusssohle mit dem Boden in Berührung und wickelt sich von E_r an von demselben ab, indem er sich dabei um eine allmählich nach vorn wandernde Stelle des Ballens dreht. In S_r beginnt der rechte Fuss seine Schwingung, so dass er also von R bis S_r auf dem Boden aufgesetzt war. In dem vor S_r liegenden Moment L hat sich unterdess der linke Fuss mit der Hacke, und in dem späteren Moment A_l mit der ganzen Sohle auf den Boden aufgesetzt u. s. f. Wenn man sich mit Hülfe der eingetragenen Verticalen den ganzen Verlauf des Bewegungsvorganges klar gemacht hat, und sich ihn bei dem Studium der Diagramme immer wieder vergegenwärtigt, so kann man dann ohne Mühe jede einzelne Phase der Bewegung des Gesammtschwerpunktes in die richtige Beziehung zu den einzelnen Momenten des Ganges setzen.

Betrachtet man zunächst die zu den beiden ersten, unter gleichen Verhältnissen angestellten Versuchen gehörenden Diagramme auf Tafel V und VI, so erkennt man auf den ersten Blick wieder eine grosse Uebereinstimmung bei allen einander entsprechenden Curven. Trotzdem die beiden Versuche vollkommen unabhängig von einander angestellt worden sind, und trotzdem bei der Berechnung der Schwerpunktscoordinaten und der Ableitung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des II. Versuchs nicht die mindeste Rücksicht auf die entsprechenden Resultate des I. Versuchs genommen wurde, nimmt sich die Tafel VI bei-

nahe wie eine nach dem Augenmaass hergestellte Copie der Tafel V aus. Allerdings hat man dabei in Rücksicht zu ziehen, dass die Anfangsmomente nicht genau übereinstimmen, sondern dass der Nullpunkt für die Zeit beim I. Versuch innerhalb des Bewegungsvorganges um ca. 0,05 sec später angenommen ist wie beim II. Versuch; es werden daher bei ersterem alle Abscissen um abgerundet 5 mm kleiner sein als bei letzterem. Durch die eingetragenen Verticalen wird man aber von diesem zufälligen Unterschiede in der Wahl des Anfangspunktes ganz unabhängig. Bei genauerem Vergleich erkennt man nur eine geringe Ungleichmässigkeit in dem Verhalten der Beschleunigungscurven. So hat der letzte Gipfel der zu der verticalen Bewegungscomponente gehörenden Beschleunigungscurve beim I. Versuch eine etwas andere Form wie beim II. Versuch, und es liegen die Minima bei ersterem tiefer als bei letzterem. Immerhin befinden sich aber sowohl die Maxima als auch die Minima bei beiden Curven an relativ gleichen Stellen. Das Gleiche gilt für die zur Bewegung in der Seitenrichtung gehörenden Beschleunigungscurven, wenn auch hier an den beiden Enden sich kleine Ungleichmässigkeiten in der Form einstellen. Dagegen findet man bei den zur Bewegung in der Gangrichtung gehörenden Beschleunigungscurven auch geringe Abweichungen in der zeitlichen Lage der höchsten Erhebungen. Beim I. Versuch fällt der erste Gipfel in den Moment des Aufsetzens des rechten Beins, der zweite in die Periode des gleichzeitigen Aufstehens beider Beine. Beim II. Versuch liegen beide Maxima noch vor dem Aufsetzen des jeweils schwingenden Beins auf den Fussboden. Man geht demnach gewiss nicht fehl, wenn man die Gipfel in die Momente des Aufsetzens eines Beins verlegt. Diese kleinen Unterschiede können gerade bei der Bewegung in der Gangrichtung nicht überraschen, wenn man beachtet, dass hierbei die Wegcurven durch die direct bestimmten Punkte nicht so sicher festgelegt waren als für die beiden anderen Bewegungscomponenten. Ausserdem ist im Allgemeinen bei den Beschleunigungscurven von vornherein eine geringere Genauigkeit zu erwarten als bei den Geschwindigkeits- und Wegcurven.

Sieht man von den geringen Differenzen ab, so kann man aus den Curven der Tafeln V und VI folgende Gesetze der Bewegung des Gesammtschwerpunktes in den drei Hauptrichtungen für den Gang des unbelasteten Menschen ablesen.

Bewegung des Gesammtschwerpunktes in der Gangrichtung: Der Gesammtschwerpunkt des menschlichen Körpers schwingt während der Dauer eines einfachen Schrittes in der Gangrichtung um eine zur Gangrichtung senkrechte und mit der mittleren Ganggeschwindigkeit sich gleichmässig selbst in der Gangrichtung fortbewegende Ebene hin und her. Seine grösste Entfernung nach hinten und vorn von dieser Ebene betrug bei unserem Individuum im Durchschnitt 12 mm. Kurz vor dem Aufsetzen des jeweils schwingenden Beins, während das andere Bein schon seinen Fuss vom Boden abwickelt, befindet sich der Schwerpunkt am weitsten hinter dieser bewegten Ebene. Er besitzt dabei relativ zu der bewegten Ebene die Geschwindigkeit Null und in Folge dessen im ruhenden Raume die mittlere Ganggeschwindigkeit. Gleichzeitig erfährt er in demselben Moment eine Beschleunigung nach vorn. In Folge dessen vergrössert er jetzt seine relative Geschwindigkeit und rückt der bewegten Ebene von hinten her näher. Er erreicht sie jedoch noch nicht in dem Moment, in welchem das schwingende Bein sich nun auf den Boden aufsetzt, sondern erst kurz vor dem Moment, in welchem das bisher auf dem Boden aufstehende Bein seine Schwingung beginnt. Dabei hat er fortwährend an Geschwindigkeit zugenommen, so dass er nun mit der Maximalgeschwindigkeit durch die Ebene von hinten nach vorn hindurchtritt. Diese Zunahme der Geschwindigkeit ist nicht gleichmässig, wie man aus dem Verhalten der Beschleunigungscurve erkennt. Die Beschleunigung wächst nämlich zunächst ziemlich stark bis zum Moment des Aufsetzens des bisher schwingenden Beins und nimmt dann in der Periode des Aufstehens beider Beine sehr rasch wieder ab, so dass sie im Moment des Ablösens oder noch kurz vor dem Ablösen des anderen Beins vom Boden zu Null geworden ist, und zwar in demselben Moment, in welchem der Gesammtschwerpunkt die bewegte Ebene von hinten her eingeholt hat. Das Verhalten der beiden Beine ist hierbei nicht ganz gleichmässig, wie ja auch nach dem schon früher erwähnten asymmetrischen Verhalten derselben zu erwarten stand. Das rechte Bein beginnt seine Schwingung ziemlich genau in dem Moment, in welchem der Gesammtschwerpunkt die bewegte Ebene passirt. Das linke Bein löst sich dagegen erst vom Boden ab, nachdem der Gesammtschwerpunkt auf die Vorderseite der bewegten Ebene hinübergetreten und die

Geschwindigkeit schon wieder im Abnehmen begriffen ist, indem nunmehr die Beschleunigung die Richtung von vorn nach hinten besitzt oder, mit anderen Worten, in Verzögerung übergegangen ist. Da die absolute Geschwindigkeit aber immer noch grösser als die mittlere Ganggeschwindigkeit bleibt, so entfernt sich der Schwerpunkt immer weiter nach vorn von der bewegten Ebene, bis er kurz nach dem Anfange der Periode des Aufstehens des Beins mit ganzer Fusssohle seine grösste Entfernung erreicht und die mittlere Ganggeschwindigkeit angenommen hat. Die Verzögerung hat dabei zunächst sehr stark zugenommen und kurz vor dem Maximum der Entfernung des Schwerpunktes von der bewegten Ebene ihren grössten Werth erreicht. Der Schwerpunkt nähert sich nun der bewegten Ebene von vorn her, indem er relativ zu derselben eine negative Geschwindigkeit oder, was damit gleichbedeutend ist, im ruhenden Raume eine Geschwindigkeit annimmt, die kleiner als die mittlere Ganggeschwindigkeit ist. Unterdess hat sich die Verzögerung immer mehr vermindert. Etwa zu Anfang des letzten Drittels der Periode, in welcher der Fuss mit der ganzen Sohle auf dem Boden aufsteht, tritt der Schwerpunkt wieder hinter die bewegte Ebene. Fast gleichzeitig mit diesem zweiten Durchgang durch die Ebene besitzt er die grösste relative Geschwindigkeit in der Richtung von vorn nach hinten, bezüglich die geringste Geschwindigkeit im ruhenden Raume, so dass in demselben Moment die Verzögerung wieder in Beschleunigung übergeht. Während nun der Schwerpunkt mit abnehmender relativer Geschwindigkeit sich nach hinten von der Ebene entfernt, nimmt die Beschleunigung immer mehr zu. In Folge dessen erreicht die relative Geschwindigkeit bald den Werth Null, und die auf den ruhenden Raum bezogene Geschwindigkeit ist wieder bis zur mittleren Ganggeschwindigkeit angewachsen. In diesem Moment, der, wie schon oben erwähnt, kurz vor dem Aufsetzen des bisher schwingenden Beins eintritt, kehrt der Schwerpunkt die Richtung seiner zu der bewegten Ebene relativen Bewegung um und beginnt nun sich derselben von hinten her zu nähern. Damit beginnt aber das geschilderte Spiel von Neuem. Die Dauer dieser Schwingung des Gesammtschwerpunktes relativ zu der mit der mittleren Ganggeschwindigkeit fortbewegten Frontalebene stimmt daher mit der Dauer eines einfachen Schrittes überein.

Bewegung des Gesammtschwerpunktes in der Seiten-

richtung: Senkrecht zu der Gangebene, d. h. der durch die Gangrichtung gehenden Verticalebene, führt der Gesammtschwerpunkt folgende Schwingungsbewegung aus. Während des Aufstehens eines einzigen Beins befindet er sich stets auf der Seite der Gangebene, welcher das betreffende Bein angehört. Der Moment des Uebertretens von einer Seite auf die andere ist für beide Beine bei unserem Individuum etwas verschieden. Der Uebertritt von rechts nach links fällt genau mit dem Aufsetzen des linken Beins auf den Boden zusammen. Dagegen durchschreitet der Schwerpunkt die Gangebene von links nach rechts erst, nachdem das rechte Bein sich auf den Boden aufgesetzt hat, und zwar in einem Moment, welcher ungefähr die zeitliche Mitte der Periode des Aufstehens beider Beine darstellt. Die Geschwindigkeit erreicht in beiden Fällen erst kurz nach dem Passiren der Gangebene in der einen oder anderen Richtung ihr Maximum, und gleichzeitig die Beschleunigung dementsprechend den Werth Null. Die grösste Entfernung von der Gangebene besitzt der Schwerpunkt sowohl rechts wie links etwa am Ende des ersten Drittels der Periode des Aufstehens des Fusses mit der ganzen Sohle. Da hier eine Aenderung der Bewegungsrichtung eintritt, so besitzt natürlich die Geschwindigkeit in diesem Moment immer den Werth Null. Dieselbe hat dabei von der Mitte der Periode des Aufstützens beider Beine fortwährend an Grösse abgenommen, und zwar nicht gleichmässig, sondern im Anfang mit zunehmender, und dann mit abnehmender Verzögerung. Das Maximum der Verzögerung liegt für beide Seiten merklich verschieden. Befindet sich der Schwerpunkt auf der rechten Seite der Gangebene, so tritt dasselbe erst kurz vor dem Moment der grössten Ausweichung nach rechts ein. Liegt dagegen der Schwerpunkt auf der linken Seite der Gangebene, so fällt das Maximum der Verzögerung bei beiden Versuchen übereinstimmend mit dem Moment zusammen, in welchem das rechte Bein seine Schwingung beginnt. Während nun der Schwerpunkt sich auf der einen oder anderen Seite der Gangebene wieder nähert, vergrössert er seine Geschwindigkeit nur allmählich. Er hält sogar einmal, etwa am Anfang des letzten Drittels der Periode des Aufstehens des Fusses mit ganzer Sohle, seine Geschwindigkeit für eine kurze Zeit nahezu constant, indem die Beschleunigung annähernd auf Null heruntergesunken ist; er vergrössert aber dann wieder die Geschwindigkeit, und

zwar mit wachsender Beschleunigung, bis zum Durchtritt durch die Gangebene, und auch noch kurze Zeit auf der anderen Seite der Gangebene, aber dann mit abnehmender Beschleunigung. Endlich erreicht die Geschwindigkeit in der zweiten Hälfte der Periode des Aufstehens beider Beine ihr Maximum, und die Beschleunigung geht von da an in Verzögerung über. Zu beachten ist noch, dass die Dauer der Schwingung des Gesammtschwerpunktes senkrecht zur Gangebene nicht, wie bei der Bewegung in der Gangrichtung, gleich der Dauer eines einfachen Schrittes, sondern gleich der eines Doppelschrittes ist.

Bewegung des Gesammtschwerpunktes in der verticalen Richtung: Endlich führt der Gesammtschwerpunkt des menschlichen Körpers sehr regelmässige Schwingungen in verticaler Richtung um eine Horizontalebene aus, welche bei den beiden ersten Versuchen übereinstimmend eine Höhe von 91,45 cm über dem Fussboden besitzt. Er passirt diese Ebene in der Richtung von oben nach unten, nachdem der allein auf dem Boden aufstehende Fuss begonnen hat, sich durch Drehung um einen Punkt des Fussballens vom Boden abzuwickeln. Dabei ist kurz vorher seine Geschwindigkeit in der Richtung von oben nach unten maximal und die Beschleunigung Null gewesen. Er bewegt sich darauf mit abnehmender Geschwindigkeit nach unten, bis er etwa in der Mitte der Periode des Aufstehens beider Beine seinen tiefsten Stand und die Geschwindigkeit Null erreicht hat. Die Geschwindigkeit nimmt dabei nicht erst allmählich, sondern gleich von vornherein ziemlich rasch ab, denn die Verzögerung für die Bewegung nach unten (Beschleunigung nach oben) besitzt im Moment des Hindurchtretens des Schwerpunktes durch die Horizontalebene schon einen beträchtlichen Werth. Darauf kehrt dann der Schwerpunkt die Richtung seiner Bewegung um und nähert sich der Horizontalebene mit zunehmender Geschwindigkeit von unten, bis er sie etwa am Ende des ersten Viertels der Periode des Aufstehens des anderen Fusses mit ganzer Sohle wieder erreicht hat. Kurz vor diesem Moment hat die Geschwindigkeit und noch einen Augenblick vorher die nach oben gerichtete Beschleunigung ein Maximum erreicht. Die letztere ist aber gleich darauf fast momentan auf Null herabgesunken, wie es für das Maximum der Geschwindigkeit erforderlich ist; sie geht dann ebenso rasch in negative Beschleunigung, d. h. Beschleunigung

nach unten, über, so dass sich also im Moment des Hindurchtretens des Schwerpunktes durch die Horizontalebene von unten nach oben die Geschwindigkeit schon wieder etwas verringert hat. Der Schwerpunkt erhebt sich nun mit weiter abnehmender Geschwindigkeit über die Horizontalebene, bis er gegen Ende des zweiten Drittels der Periode des Aufstehens des Fusses mit ganzer Sohle seinen höchsten Stand und wiederum die Geschwindigkeit Null erreicht hat. Die Beschleunigung nach unten (Verzögerung der Aufwärtsbewegung) hat dabei zunächst schnell, dann etwas langsamer und dann wieder schneller an Grösse zugenommen und bei der höchsten Erhebung des Schwerpunktes ihren grössten Werth erreicht, der beim II. Versuch bedeutend kleiner ist als beim I. Versuch. Darauf kehrt der Schwerpunkt die Richtung seiner Bewegung um. Während der nun folgenden Abwärtsbewegung des Schwerpunktes verringert sich die nach unten gerichtete Beschleunigung wieder, und zwar so schnell, dass sie den Werth Null angenommen hat, bevor der Schwerpunkt von oben her wieder an der Horizontalebene angelangt ist. Dementsprechend hat gleichzeitig die Geschwindigkeit der Abwärtsbewegung schnell zugenommen und bald ihren grössten Werth in dieser Richtung erreicht. Kurz darauf tritt nun der Schwerpunkt abermals in der Richtung von oben nach unten durch die Horizontalebene hindurch, und das Spiel beginnt von Neuem. Die Dauer dieser eben geschilderten verticalen Schwingung des Schwerpunktes ist, wie bei der Schwingung in der Gangrichtung, gleich der Dauer eines einfachen Schrittes. —

Vergleicht man nun mit dieser Bewegung des Schwerpunktes in den drei Hauptrichtungen diejenige beim Gang mit Belastung durch das Militärgepäck (Tafel VII), so erkennt man im Wesentlichen Unterschiede in der Ausdehnung der einzelnen Bewegungscomponenten und kleine zeitliche Verschiebungen der Maxima und Minima an den drei Curvenarten. Ausserdem zeigen die Beschleunigungen in verticaler Richtung ein etwas unstetes Verhalten; dies ist jedenfalls eine Folge der grossen, ungewöhnten Last, indem die Muskeln nicht gleich im ersten Moment die richtige Spannung angenommen haben. Im Uebrigen zeigen die Curven des III. Versuchs dieselben charakteristischen Merkmale wie die der beiden ersten Versuche. —

Will man nun nicht bloss einen Ueberblick über den gesetzmässigen Ablauf der Bewegung des Gesammtschwerpunktes ge-

winnen, sondern die letztere zum Ausgangspunkt für die weitere Untersuchung nehmen, so muss man sich die genauen Werthe der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen verschaffen. Dieselben lassen sich aus den entsprechenden Diagrammen der Tafeln V, VI und VII für jeden beliebigen Moment ablesen.

Es ist zweckmässig, diese Werthe für die 31 Bewegungsphasen festzustellen, da für dieselben auch die Coordinaten der Gelenkmittelpunkte und der Einzelschwerpunkte, und damit die ganze Haltung des Körpers genau bekannt sind. Man braucht zu diesem Zwecke nur die Tabelle 8 auf Seite 82 zu Hülfe zu nehmen, in welcher die zu den einzelnen Bewegungsphasen gehörenden Zeiten (Abscissen der Diagramme) angegeben sind. Gleichzeitig empfiehlt es sich, die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem, welche zwar schon bekannt sind, noch einmal aus den Wegcurven für die 31 Bewegungsphasen abzulesen, da man auf diese Weise die genaueren Werthe bekommt, welche der Ableitung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu Grunde gelegen haben. Nimmt man als Anfangspunkt des beweglichen Coordinatensystems nicht einen Punkt des horizontalen Fussbodens, wie es bisher geschehen war, sondern den Kernpunkt der Bahn des Gesammtschwerpunktes, d. h. also den Schnittpunkt der drei zu einander senkrechten mittleren Ebenen, um welche der Gesammtschwerpunkt in den drei Hauptrichtungen innerhalb des mit der mittleren Ganggeschwindigkeit fortschreitenden Raumes nach beiden Seiten hin- und herschwingt, so stellen die drei mittleren Ebenen selbst die Coordinatenebenen dar. Der Coordinatenanfangspunkt fällt also dann zusammen mit dem Mittelpunkt für die Schwingungen des Gesammtschwerpunktes in den drei Hauptrichtungen.

Die auf dieses System bezogenen Coordinaten können ohne Weiteres für jeden Versuch aus den drei Wegcurven als verticale Abstände von der in den Diagrammen durch stärkere Zeichnung markirten mittleren Horizontalen gewonnen werden. Diese mittlere Horizontale ist bei den Wegcurven für die Bewegung in der Gangrichtung identisch mit der ursprünglich verwendeten Abscissenaxe der Diagramme. Das Gleiche gilt auch beim I. und III. Versuch für die zu der Bewegung in der Seitenrichtung gehörende mittlere Horizontale; nur beim II. Versuch hat man dieselbe $2\frac{1}{2}$ mm unter der ursprünglich verwendeten Abscissenaxe anzunehmen, da sonst die grösste Ausweichung des Gesammtschwer-

punktes nach rechts grösser als die grösste Ausweichung nach links ausfallen würde. Bei den Wegcurven für die Bewegung in verticaler Richtung waren zunächst die Abstände des Schwerpunktes von dem horizontalen Fussboden als Diagrammordinaten verwendet worden, so dass die Abscissenaxe der Diagramme gar nicht mit auf den Tafeln aufgezeichnet werden konnte. Die mittlere Horizontale verläuft beim I. und II. Versuch übereinstimmend in einer Höhe von 91,45 cm und beim III. Versuch in Folge der Belastung in der grösseren Höhe von 97,55 cm über dem horizontalen Fussboden, wie man ohne Weiteres aus den Diagrammen ableiten kann. Es liegt daher der Anfangspunkt des beweglichen Coordinatensystems beim I. Versuch in der XZ-Ebene des ruhenden Coordinatensystems in einer Entfernung von 91,45 cm über der X-Axe; beim II. Versuch liegt er 0,25 cm nach rechts von der XZ-Ebene des ruhenden Coordinatensystems, ebenfalls in einer Höhe von 91,45 cm über der X-Axe, und endlich beim III. Versuch wiederum in der XZ-Ebene des ruhenden Coordinatensystems, aber in der grösseren Höhe von 97,55 cm über der X-Axe. Ausserdem besitzt der Anfangspunkt des beweglichen Coordinatensystems in der Bewegungsphase Nr. 1 von der YZ-Ebene des ruhenden Coordinatensystems nach Tabelle 6 auf Seite 70 bei den drei Versuchen bezüglich den Abstand von 39,25 cm, 44,25 cm und 31,88 cm; dieser Abstand vergrössert sich für jede folgende der 31 Bewegungsphasen bezüglich um 6,03 cm, 6,07 cm und 5,57 cm (vgl. Seite 68). Sind ξ, η und ζ die Coordinaten des beweglichen Systems, welche in Zukunft kurz als *„relative Coordinaten“* bezeichnet sein sollen, so kann man hieraus für jede Bewegungsphase leicht die entsprechenden Coordinaten x, y' und z für das ruhende System, wie sie sich nach der auf Seite 53 erwähnten geringen Drehung um die Z-Axe gestalten, ableiten.

Führt man dann endlich beim I. und II. Versuch die kleine Drehung um die Z-Axe im umgekehrten Drehungssinne wieder aus, so erhält man schliesslich die Coordinaten x, y, z des Gesammtschwerpunktes in Bezug auf das im I. Theil dieser Untersuchung verwendete ruhende Coordinatensystem, in welchem auch in dem vorliegenden Theile die Einzelschwerpunkte und der Gesammtschwerpunkt (Tabelle 1, 2 und 5) zunächst ausgedrückt sind. Die auf diese Weise rückwärts noch einmal abgeleiteten *„absoluten*

Tabelle 11.

I. Versuch.

Nr.	Coordinaten des Gesammtschwerpunktes in cm.						Geschwindigkeiten des Gesammtschwerpunktes in cm sec^{-1}				Beschleunigungen des Gesammtschwerpunktes in cm sec^{-2}			Nr.
	Relative Coordinaten			Absolute Coordinaten			Gangrichtung		Seitenrichtung	Verticale Richtung	Gangrichtung	Seitenrichtung	Verticale Richtung	
	ξ	η	ζ	x	y	z	relativ	absolut						
1	+0,30	−1,29	−1,21	39,55	−1,35	90,24	+ 2,0	159,3	− 1,0	+29,1	−125	+ 13	+140	1
2	+0,27	−1,29	−0,05	45,55	−1,36	91,40	− 2,5	154,8	− 0,2	+28,2	− 92	+ 33	−142	2
3	+0,10	−1,26	+1,03	51,41	−1,34	92,48	− 5,7	151,6	+ 1,5	+22,0	− 59	+ 44	−208	3
4	−0,15	−1,20	+1,77	57,19	−1,29	93,22	− 7,7	149,6	+ 2,6	+11,7	− 23	+ 14	−340	4
5	−0,46	−1,10	+1,98	62,91	−1,20	93,43	− 8,0	149,3	+ 2,7	− 5,9	+ 7	− 10	−452	5
6	−0,73	−1,00	+1,58	68,67	−1,11	93,03	− 7,3	150,0	+ 2,1	−19,7	+ 32	− 8	−287	6
7	−0,97	−0,90	+0,69	74,46	−1,02	92,14	− 5,6	151,7	+ 2,4	−29,7	+ 59	+ 26	−170	7
8	−1,16	−0,77	−0,46	80,30	−0,90	90,99	− 2,9	154,4	+ 3,8	−26,0	+101	+ 48	+197	8
9	−1,23	−0,57	−1,31	86,26	−0,71	90,14	+ 2,9	160,2	+ 5,9	−18,1	+189	+ 67	+200	9
10	−1,02	−0,31	−1,88	92,50	−0,46	89,57	+12,0	169,3	+ 8,5	−10,6	+328	+ 78	+201	10
11	−0,39	+0,08	−2,15	99,16	−0,08	89,30	+19,5	176,8	+10,9	− 2,0	+ 61	+ 33	+205	11
12	+0,40	+0,54	−1,99	105,98	+0,37	89,46	+18,4	175,7	+11,0	+ 6,8	−118	− 23	+214	12
13	+0,99	+0,89	−1,57	112,60	+0,71	89,88	+11,2	168,5	+ 9,0	+15,4	−268	− 67	+237	13
14	+1,22	+1,16	−0,76	118,86	+0,97	90,69	0	157,3	+ 5,2	+25,0	−230	−120	+294	14
15	+1,03	+1,27	+0,43	124,70	+1,07	91,88	− 7,0	150,3	+ 0,6	+26,6	−123	− 84	−140	15
16	+0,70	+1,26	+1,37	130,40	+1,05	92,82	−10,2	147,1	− 1,1	+20,6	− 60	− 38	−190	16
17	+0,28	+1,18	+1,98	136,01	+0,96	93,43	−11,5	145,8	− 1,9	+11,0	− 22	− 17	−390	17
18	−0,17	+1,11	+1,94	141,59	+0,88	93,39	−11,4	145,9	− 2,3	−10,0	+ 12	− 10	−355	18
19	−0,56	+1,02	+1,35	147,23	+0,78	92,80	−10,4	146,9	− 2,8	−20,2	+ 44	− 18	−223	19
20	−0,90	+0,87	+0,47	152,92	+0,63	91,92	− 8,2	149,1	− 3,9	−25,3	+ 74	− 35	− 25	20
21	−1,14	+0,69	−0,49	158,71	+0,44	90,96	− 4,2	153,1	− 5,7	−21,3	+105	− 57	+137	21
22	−1,23	+0,43	−1,16	164,65	+0,17	90,29	+ 0,9	158,2	− 7,9	−15,5	+136	− 83	+150	22
23	−1,07	+0,05	−1,65	170,84	−0,22	89,80	+ 6,4	163,7	−11,0	− 9,5	+174	− 90	+157	23
24	−0,68	−0,39	−1,86	177,26	−0,67	89,59	+13,8	171,1	−12,5	− 1,9	+202	+ 12	+186	24
25	−0,07	−0,84	−1,73	183,90	−1,13	89,72	+17,4	174,7	− 9,3	+ 5,3	− 23	+110	+201	25
20	+0,53	−1,09	−1,34	190,53	−1,39	90,11	+13,4	170,7	− 4,9	+13,0	−177	+ 67	+211	26
27	+0,88	−1,28	−0,71	196,91	−1,60	90,74	+ 2,0	159,3	− 3,3	+21,9	−305	+ 74	+238	27
28	+0,79	−1,35	+0,29	202,85	−1,67	91,74	− 6,5	150,8	0	+24,4	−160	+ 76	− 72	28
29	+0,47	−1,28	+1,15	208,56	−1,61	92,60	−10,9	146,4	+ 2,2	+19,5	− 90	+ 44	−190	29
30	−0,01	−1,15	+1,79	214,11	−1,49	93,24	−13,9	143,4	+ 3,3	+ 8,9	− 28	+ 20	−335	30
31	−0,52	−1,03	+1,84	219,63	−1,38	93,29	−13,5	143,8	+ 3,7	− 8,2	+ 23	+ 6	−444	31

Coordinaten" des Gesammtschwerpunktes, wie sie kurz zum Unterschied von den auf das bewegliche System bezogenen relativen Coordinaten ξ, η, ζ heissen mögen, sind genauer als die in den

Tabelle 11.

II. Versuch.

Nr.	Coordinaten des Gesammtschwerpunktes in cm.						Geschwindigkeiten des Gesammtschwerpunktes in cm sec−1				Beschleunigungen des Gesammtschwerpunktes in cm sec−2			Nr.
	Relative Coordinaten			Absolute Coordinaten			Gangrichtung		Seitenrichtung	Verticale Richtung	Gangrichtung	Seitenrichtung	Verticale Richtung	
	ξ	η	ζ	x	y	z	relativ	absolut						
1	+0,67	−0,74	−1,90	44,92	−0,60	89,55	+13,2	171,6	−4,4	+14,7	−136	+50	+166	1
2	+1,06	−0,89	−1,26	51,38	−0,76	90,19	+5,0	163,4	−2,7	+21,5	−243	+41	+220	2
3	+1,11	−0,96	−0,20	57,50	−0,85	91,25	−2,5	155,9	−0,9	+26,1	−163	+30	+13	3
4	+0,94	−0,97	+0,72	63,40	−0,87	92,17	−7,2	151,2	+0,3	+23,1	−109	+20	−136	4
5	+0,63	−0,96	+1,54	69,16	−0,88	92,99	−10,4	148,0	+1,1	+16,2	−66	+12	−218	5
6	+0,17	−0,94	+1,93	74,77	−0,87	93,38	−12,0	146,4	+1,3	+2,2	−17	+7	−430	6
7	−0,29	−0,90	+1,71	80,38	−0,84	93,16	−11,7	146,7	+1,6	−12,5	+32	+6	−345	7
8	−0,67	−0,83	+1,07	86,07	−0,79	92,52	−9,6	148,8	+1,9	−23,2	+81	+11	−210	8
9	−1,00	−0,75	0	91,81	−0,72	91,45	−5,7	152,7	+2,5	−25,9	+146	+21	+160	9
10	−1,13	−0,63	−0,88	97,75	−0,62	90,57	+1,8	160,2	+3,5	−19,4	+226	+41	+177	10
11	−0,83	−0,45	−1,56	104,12	−0,48	89,80	+10,0	168,4	+5,5	−12,3	+218	+81	+194	11
12	−0,33	−0,15	−1,92	110,69	−0,17	89,53	+15,3	173,7	+9,5	−4,1	+79	+78	+216	12
13	+0,33	+0,24	−1,90	117,42	+0,21	89,55	+15,4	173,8	+10,3	+4,3	−45	−20	+235	13
14	+0,87	+0,57	−1,52	124,03	+0,52	89,93	+11,1	169,5	+8,7	+12,8	−167	−62	+260	14
15	+1,18	+0,85	−0,79	130,41	+0,79	90,66	+3,0	161,4	+5,6	+22,9	−245	−95	+306	15
16	+1,11	+1,00	+0,25	136,41	+0,92	91,70	−4,5	153,9	+1,5	+27,2	−151	−90	−190	16
17	+0,84	+1,01	+1,14	142,21	+0,92	92,59	−8,2	150,2	−0,8	+18,0	−86	−39	−250	17
18	+0,52	+0,95	+1,64	147,96	+0,84	93,09	−9,8	148,6	−1,7	+8,8	−38	−12	−283	18
19	+0,14	+0,87	+1,72	153.65	+0,75	93,17	−10,4	148,0	−2,0	−2,9	0	−7	−420	19
20	−0,22	+0,81	+1,27	159,36	+0,68	92,72	−9,6	148,8	−2,4	−15,7	+39	−13	−250	20
21	−0,56	+0,69	+0,50	164,09	+0,54	91,95	−7,6	150,8	−3,2	−22,2	+80	−26	−105	21
22	−0,81	+0,55	−0,35	170,91	+0,39	91,10	−3,9	154,5	−4,4	−21,1	+122	−41	+155	22
23	−0,83	+0,35	−1,04	176,96	+0,17	90,41	+1,3	159,7	−6,1	−15,5	+163	−62	+162	23
24	−0,60	+0,08	−1,50	183,26	−0,11	89,95	+7,8	166,2	−8,7	−8,8	+157	−74	+163	24
25	−0,19	−0,25	−1,70	189,74	−0,46	89,75	+12,3	170,7	−10,0	−2,3	+85	−2	+175	25
26	+0,36	−0,59	−1,59	196,36	−0,81	89,86	+14,1	172,5	−7,6	+4,0	−20	+104	+203	26
27	+0,92	−0,83	−1,22	202,99	−1,07	90,23	+10,3	168,7	−4,3	+14,3	−185	+67	+295	27
28	+1,11	−0,94	−0,44	209,25	−1,19	91,01	−1,1	157,3	−2,0	+28,2	−205	+49	+385	28
29	+0,79	−0,97	+0,70	215,00	−1,22	92,15	−6,3	152,1	−0,4	+27,5	−95	+40	−200	29
30	+0,55	−0,97	+1,57	220,83	−1,25	93,02	−8,9	149,5	+1,0	+17,8	−39	+27	−256	30
31	+0,22	−0,93	+2,12	226,57	−1,23	93,57	−9,5	148,9	+1,3	+7,9	−2	+13	−284	31

Tabellen 1, 2 und 5 angegebenen. Da sie bei allen späteren Untersuchungen an Stelle der früher angegebenen zu Grunde gelegt werden sollen, so sind sie in der Tabelle 11 (S. 104—106)

Tabelle 11.

III. Versuch (mit Gepäck).

Nr	Coordinaten des Gesammtschwerpunktes in cm.						Geschwindigkeiten des Gesammtschwerpunktes in cm sec−1				Beschleunigungen des Gesammtschwerpunktes in cm sec−2			Nr.
	Relative Coordinaten			Absolute Coordinaten			Gangrichtung		Seitenrichtung	Verticale Richtung	Gangrichtung	Seitenrichtung	Verticale Richtung	
	ξ	η	ζ	x	y	z	relativ	absolut						
1	+0,32	−3,12	+0,38	32,20	−3,12	97,93	− 3,5	141,8	+ 9,9	+23,5	−110	0	−185	1
2	+0,10	−2,73	+1,23	37,55	−2,73	98,78	− 6,8	138,5	+10,0	+15,7	− 73	+ 1	−222	2
3	−0,19	−2,34	+1,65	42,83	−2,34	99,20	− 8,9	136,4	+10,1	+ 6,2	− 39	+ 3	−308	3
4	−0,55	−1,92	+1,64	48,04	−1,92	99,19	− 9,7	135,6	+10,3	−10,3	− 3	+ 5	−350	4
5	−0,89	−1,51	+1,02	53,27	−1,51	98,57	− 8,8	136,5	+10,7	−21,0	+ 41	+ 10	−230	5
6	−1,19	−1,06	+0,04	58,54	−1,06	97,59	− 6,5	138,8	+11,2	−28,0	+ 93	+ 18	−110	6
7	−1,39	−0,59	−1,06	63,91	−0,59	96,49	− 1,1	144,2	+12,1	−27,0	+152	+ 31	+150	7
8	−1,28	−0,12	−1,97	69,59	−0,12	95,58	+ 5,9	151,2	+13,7	−20,0	+205	+ 49	+220	8
9	−0,84	+0,49	−2,51	75,60	+0,49	95,04	+14,6	159,0	+16,2	− 9,1	+200	+ 70	+370	9
10	−0,21	+1,13	−2,58	81,80	+1,13	94,97	+20,6	165,9	+17,6	+ 5,9	+ 70	− 20	+350	10
11	+0,66	+1,75	−2,13	88,24	+1,75	95,42	+18,8	164,1	+14,7	+14,5	−155	− 95	+180	11
12	+1,17	+2,22	−1,32	94,32	+2,22	96,23	+ 9,0	154,3	+11,0	+25,0	−250	−140	+390	12
13	+1,34	+2,52	−0,13	100,06	+2,52	97,42	+ 1,0	146,3	+ 5,1	+37,0	−156	−115	0	13
14	+1,27	+2,64	+1,14	105,56	+2,64	98,69	− 3,0	142,3	+ 1,2	+26,5	−102	− 90	−350	14
15	+1,10	+2,63	+2,02	110,96	+2,63	99,57	− 5,9	139,4	− 1,7	+15,1	− 71	− 67	−290	15
16	+0,88	+2,52	+2,32	116,31	+2,52	99,87	− 7,9	137,4	− 3,8	+ 2,1	− 41	− 53	−375	16
17	+0,54	+2,33	+2,12	121,54	+2,33	99,67	− 9,1	136,2	− 5,8	−11,9	− 9	− 49	−370	17
18	+0,19	+2,10	+1,38	126,76	+2,10	98,93	− 9,1	136,2	− 7,3	−24,0	+ 31	− 49	−280	18
19	−0,10	+1,80	+0,35	132,04	+1,80	97,90	− 6,9	138,4	− 9,3	−27,0	+ 93	− 54	+100	19
20	−0,30	+1,42	−0,59	137,41	+1,42	96,96	− 1,1	144,2	−11,5	−20,5	+165	− 70	+202	20
21	−0,21	+0,90	−1,24	143,07	+0,90	96,31	+ 4,8	150,1	−14,9	−13,0	+128	−107	+200	21
22	+0,04	+0,23	−1,54	148,89	+0,23	96,01	+ 9,0	154,3	−20,0	− 3,0	+ 77	−193	+262	22
23	+0,38	−0,63	−1,45	154,80	−0,63	96,10	+10,9	156,2	−22,9	+ 6,1	+ 16	+150	+240	23
24	+0,77	−1,40	−1,03	160,76	−1,40	96,52	+ 9,1	154,4	−16,0	+13,2	−104	+131	+147	24
25	+1,01	−1,95	−0,42	166,57	−1,95	97,13	+ 2,4	147,7	−12,0	+17,8	−210	+ 95	+116	25
26	+0,97	−2,37	+0,42	172,10	−2,37	97,97	− 4,9	140,4	− 8,9	+22,4	−155	+ 68	+ 81	26
27	+0,64	−2,67	+1,29	177,34	−2,67	98,84	− 9,7	135,6	− 6,8	+20,2	− 90	+ 46	−195	27
28	+0,21	−2,93	+1,94	182,48	−2,93	99,49	−12,3	133,0	− 5,4	+ 9,9	− 49	+ 27	−400	28
29	−0,27	−3,15	+2,01	187,57	−3,15	99,56	−13,3	132,0	− 4,9	− 6,4	− 19	+ 16	−360	29
30	−0,75	−3,34	+1,55	192,66	−3,34	99,10	−13,4	131,9	− 4,2	−16,2	+ 11	+ 9	−160	30
31	−1,21	−3,49	+0,79	197,77	−3,49	98,34	−12,3	133,0	− 4,0	−21,2	+ 39	+ 5	−106	31

neben den direct aus den Wegcurven abgelesenen relativen Coordinaten mit niedergelegt.

In derselben Tabelle finden sich auch die auf das bewegliche Coordinatensystem bezogenen *„relativen Geschwindigkeiten“* und

die Beschleunigungen des Gesammtschwerpunktes angegeben. Die auf den ruhenden Raum bezogenen *„absoluten Geschwindigkeiten“* sind für die Bewegung in der Seitenrichtung und der verticalen Richtung genau dieselben wie die relativen; in der Gangrichtung sind dagegen die absoluten Geschwindigkeiten, welche sich auch in Tabelle 11 angeführt finden, alle um die constante mittlere Ganggeschwindigkeit grösser als die relativen. Da eine constante Geschwindigkeitsdifferenz keinen Einfluss auf die Werthe der Beschleunigungen ausüben kann, so gelten alle in Tabelle 11 niedergelegten Beschleunigungen auch ohne Weiteres für die gleichen Richtungen des ruhenden Raumes.

Ausserdem sind nun noch von besonderem Interesse die Momente, in denen entweder der Abstand von der Mittelebene oder die Geschwindigkeit, oder endlich die Beschleunigung für irgend eine Bewegungscomponente nach der einen oder anderen Richtung ein Maximum besitzt. Auch diese lassen sich ohne Mühe aus den Curven auf Tafel V, VI und VII ablesen. Man hat dabei insbesondere zu beachten, dass allen Maxima resp. Minima der Wegcurven Nullstellen bei den Geschwindigkeitscurven, und allen Maxima resp. Minima der letzteren Nullstellen bei den Beschleunigungscurven entsprechen. Die Diagramme geben für diese Momente direct die Zeit an, welche seit der ersten Bewegungsphase verstrichen ist. Will man nun aber wissen, zwischen welche der 31 Bewegungsphasen ein jeder derartiger Moment fällt, so muss man die Zeit in Nummern der Bewegungsphasen umrechnen. Dies lässt sich mit Hülfe der umstehenden Tabelle 12, in welcher mit zeitlichen Abständen von 0,01 sec die zu allen Zeiten von 0 sec bis 1,15 sec gehörenden Nummern aufgezeichnet sind. Die Decimalstellen an den einzelnen Nummern deuten an, zu welcher Zwischenphase die betreffende Zeit gehören würde, wenn man sich zwischen je zwei aufeinanderfolgende der 31 durch die Photographie festgelegten Bewegungsphasen noch 99 in gleichen Zeitabständen eingeschaltet denkt. Die Tabelle, welche gewissermassen die Umkehrung der Tabelle 8 auf Seite 82 darstellt, wird jedesmal zur Verwendung kommen müssen, wenn man irgend ein Ereigniss, für welches die von der ersten Bewegungsphase an verstrichene Zeit bekannt ist, in den durch die 31 Bewegungsphasen veranschaulichten Bewegungsvorgang auf den Tafeln X und XI des I. Theils dieser Untersuchung richtig einreihen will.

Tabelle zur Umrechnung der von der ersten Bewegungsphase an verstrichenen Zeiten in Nummern der Bewegungsphasen.

Tabelle 12.

Secunden	Nr.	Secunden	Nr.	Secunden	Nr.	Secunden	Nr.	Secunden	Nr.
0	1,00	0,25	7,52	0,50	14,05	0,75	20,57	1,00	27,09
0,01	1,26	0,26	7,78	0,51	14,31	0,76	20,83	1,01	27,35
0,02	1,52	0,27	8,04	0,52	14,57	0,77	21,09	1,02	27,61
0,03	1,78	0,28	8,31	0,53	14,83	0,78	21,35	1,03	27,87
0,04	2,04	0,29	8,57	0,54	15,09	0,79	21,61	1,04	28,13
0,05	2,30	0,30	8,83	0,55	15,35	0,80	21,87	1,05	28,39
0,06	2,57	0,31	9,09	0,56	15,61	0,81	22,13	1,06	28,66
0,07	2,83	0,32	9,35	0,57	15,87	0,82	22,39	1,07	28,92
0,08	3,09	0,33	9,61	0,58	16,13	0,83	22,65	1,08	29,18
0,09	3,35	0,34	9,87	0,59	16,39	0,84	22,92	1,09	29,44
0,10	3,61	0,35	10,13	0,60	16,65	0,85	23,18	1,10	29,70
0,11	3,87	0,36	10,39	0,61	16,91	0,86	23,44	1,11	29,96
0,12	4,13	0,37	10,65	0,62	17,18	0,87	23,70	1,12	30,22
0,13	4,39	0,38	10,91	0,63	17,44	0,88	23,96	1,13	30,48
0,14	4,65	0,39	11,18	0,64	17,70	0,89	24,22	1,14	30,74
0,15	4,91	0,40	11,44	0,65	17,96	0,90	24,48	1,15	31,00
0,16	5,17	0,41	11,70	0,66	18,22	0,91	24,74		
0,17	5,44	0,42	11,96	0,67	18,48	0,92	25,00		
0,18	5,70	0,43	12,22	0,68	18,74	0,93	25,26		
0,19	5,96	0,44	12,48	0,69	19,00	0,94	25,52		
0,20	6,22	0,45	12,74	0,70	19,26	0,95	25,79		
0,21	6,48	0,46	13,00	0,71	19,52	0,96	26,05		
0,22	6,74	0,47	13,26	0,72	19,78	0,97	26,31		
0,23	7,00	0,48	13,52	0,73	20,05	0,98	26,57		
0,24	7,26	0,49	13,78	0,74	20,31	0,99	26,83		
0,25	7,52	0,50	14,05	0,75	20,57	1,00	27,09		

P. P.

Secunden	Nr
0,001	0,03
0,002	0,05
0,003	0,08
0,004	0,10
0,005	0,13
0,006	0,16
0,007	0,18
0,008	0,21
0,009	0,23
0,010	0,26

In der folgenden Tabelle 13 finden sich nun die Momente für die Maxima der Abstände von der Mittelebene, der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für die verschiedenen Bewegungsrichtungen niedergelegt, und neben jeder Zeitangabe die mit Hülfe der voraufgehenden Tabelle 12 gewonnene Nummer der Bewegungsphase aufgeführt. Die letztere Angabe ist immer nur bis auf eine Decimalstelle gemacht, weil dies ungefähr der bei allen Versuchen erreichten Genauigkeit entspricht. Man hat sich demnach zwischen zwei auf einander folgende der 31 Bewegungsphasen nur 9 Zwischenphasen in gleichen Zeitabständen eingeschaltet zu denken; dann giebt die Decimalstelle die Nummer dieser Zwischenphase an.

Tabelle 13.

I. Versuch.

Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Abstand von der Mittelebene in cm.	Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Relative Geschwindigkeit in cm sec^{-1}	Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Beschleunigung in cm sec^{-2}
Bewegung in der Gangrichtung.								
Vordere Maxima.								
0,015	1,4	+ 0,33	0,396	11,3	+ 20,0	0,347	10,1	+ 330
0,498	14,0	+ 1,23	0,916	24,9	+ 17,4	0,880	24,0	+ 202
1,003	27,2	+ 0,91						
Hintere Maxima.								
0,291	8,6	− 1,23	0,144	4,8	− 18,0	0,478	13,5	− 303
0,800	21,9	− 1,23	0,638	17,7	− 21,6	0,990	26,8	− 365
			1,130	30,5	− 24,3			
Bewegung in der Seitenrichtung.								
Rechte Maxima.								
0,547	15,3	+ 1,27	0,402	11,5	+ 11,3	0,345	10,0	+ 78
						0,918	25,0	+ 110
Linke Maxima.								
0,045	2,2	− 1,31	0,878	23,9	− 12,6	0,509	14,3	− 129
1,036	28,0	− 1,35				0,835	22,8	− 92
Bewegung in der verticalen Richtung.								
Obere Maxima.								
0,141	4,7	+ 2,01	0,019	1,5	+ 30,1	0,505	14,2	+ 301
0,634	17,5	+ 2,07	0,513	14,4	+ 29,1	0,997	27,0	+ 239
1,130	30,5	+ 1,91	1,020	27,6	+ 25,3			
Untere Maxima (Minima).								
0,391	11,2	− 2,15	0,240	7,3	− 29,9	0,140	4,7	− 620
0,891	24,3	− 1,87	0,731	20,1	− 25,3	0,635	17,6	− 727
						1,137	30,7	− 500

Tabelle 13.

II. Versuch.

Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Abstand von der Mittelebene in cm.	Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Relative Geschwindigkeit in cm sec^{-1}	Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Beschleunigung in cm sec^{-2}
Bewegung in der Gangrichtung.								
Vordere Maxima.								
0,063	2,7	+ 1,15	0,495	13,9	+ 15,2	0,363	10,5	+ 241
0,550	15,4	+ 1,19	0,950	25,8	+ 14,3	0,862	23,5	+ 173
1,030	27,9	+ 1,13						
Hintere Maxima.								
0,338	9,8	− 1,13	0,205	6,4	− 12,0	0,030	1,8	− 250
0,834	22,8	− 0,88	0,690	19,0	− 10,4	0,532	14,9	− 250
			1,150	31,0	− 9,4	1,015	27,5	− 372
Bewegung in der Seitenrichtung.								
Rechte Maxima.								
0,593	16,5	+ 1,02	0,447	12,7	+ 10,4	0,407	11,6	+ 113
						0,959	26,0	+ 105
Linke Maxima.								
0,105	3,7	− 0,98	0,921	25,0	− 10,1	0,561	15,6	− 114
1,080	29,2	− 0,99				0,873	23,8	− 78
Bewegung in der verticalen Richtung.								
Obere Maxima.								
0,197	6,1	+ 1,93	0,080	3,1	+ 26,1	0,043	2,1	+ 232
0,680	18,7	+ 1,73	0,563	15,7	+ 28,7	0,545	15,2	+ 312
			1,050	28,4	+ 31,0	1,030	27,9	+ 393
Untere Maxima (Minima).								
0,441	12,5	− 1,95	0,297	8,8	− 27,0	0,193	6,0	− 430
0,934	25,4	− 1,71	0,784	21,5	− 23,3	0,698	19,2	− 442

Tabelle 13.

III. Versuch.

Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Abstand von der Mittelebene in cm.	Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Relative Geschwindigkeit in cm sec^{-1}	Zeit in sec.	Nummer der Bewegungsphase	Beschleunigung in cm sec^{-2}
Bewegung in der Gangrichtung.								
Vordere Maxima.								
0,467	13,2	+ 1,34	0,359	10,4	+ 21,0	0,290	8,6	+ 229
0,932	25,3	+ 1,03	0,849	23,2	+ 11,1	0,723	19,9	+ 166
Hintere Maxima.								
0,237	7,2	− 1,40	0,118	4,1	− 9,7	0,410	11,7	− 280
0,735	20,2	− 0,30	0,622	17,2	− 9,4	0,916	24,9	− 211
			1,097	29,6	− 13,5			
Bewegung in der Seitenrichtung.								
Rechte Maxima.								
0,515	14,4	+ 2,66	0,338	9,8	+ 17,7	0,303	8,9	+ 72
						0,852	23,2	+ 199
Linke Maxima.								
—	—	—	0,833	22,7	− 23,5	0,424	12,1	− 139
						0,809	22,1	− 297
Bewegung in der verticalen Richtung.								
Obere Maxima.								
0,094	3,5	+ 1,74	0,461	13,0	+ 37,0	0,322	9,4	+ 486
0,582	16,2	+ 2,33	0,970	26,3	+ 23,4	0,823	22,5	+ 282
1,058	28,6	+ 2,04						
Untere Maxima (Minima).								
0,329	9,6	− 2,63	0,207	6,4	− 29,4	0,100	3,6	− 520
0,819	22,4	− 1,58	0,679	18,7	− 32,8	0,587	16,3	− 380
						1,055	28,5	− 480

In den Tabellen 11 und 13 ist die Bewegung des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers in allen ihren Einzelheiten festgelegt. Diese Tabellen werden daher für alle weitergehenden Untersuchungen, welche sich auf die Bewegung des Gesammtschwerpunktes beim Gehen stützen, den Ausgangspunkt bilden müssen.

Zunächst sind dieselben dazu verwendet worden, die Projectionen der relativen Schwerpunktsbahn auf die drei Hauptebenen aufzuzeichnen. Für die Projection auf die Gangebene braucht man die ξ- und ζ-Coordinaten, während man zur Projection auf die zur Gangrichtung senkrechte Ebene die η- und ζ-Coordinaten, und endlich zur Projection auf die Horizontalebene die ξ- und η-Coordinaten zu verwenden hat. In dieser Weise sind die schon früher (Seite 73 ff.) genauer beschriebenen Bilder der oberen Reihe auf den Tafeln VIII, IX und X entstanden. Es ist hier nur noch zu erwähnen, dass sowohl an diesen Projectionen als an den entsprechenden Figuren 2 und 4 auf den Seiten 75 und 77 die Momente, in denen entweder ein Bein sich auf den Boden aufsetzt oder seine Schwingung beginnt, in der bisher üblichen Weise durch die Buchstaben R, L, S_r, S_l, und das Bogenstück, welches der Schwerpunkt während der Periode des gleichzeitigen Aufstehens beider Beine durchläuft, durch stärkere Zeichnung markirt worden sind. Ferner sind auch wieder der Anfang und das Ende der Periode des Aufstehens eines Fusses mit ganzer Sohle durch die Buchstaben A und E auf den Tafeln angedeutet worden.

Eine weitere Anwendung der Tabellen 11 und 13 besteht darin, dass mit ihrer Hülfe eine besonders zweckmässige Veranschaulichung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gesammtschwerpunktes erzielt werden kann. Denkt man sich von einem beliebigen Punkte O des Raumes aus Strecken abgetragen, welche den auf einander folgenden Geschwindigkeiten des Gesammtschwerpunktes parallel sind und durch ihre Länge deren Grösse veranschaulichen, so liegen alle diese Strecken auf einer Kegelfläche, und ihre Endpunkte bilden eine Curve auf dem Kegelmantel. Diese Curve, welche nach Hamilton den Namen „Hodograph“ führt, giebt nun nicht nur im Verein mit dem festen Punkte O des Raumes ein deutliches Bild von dem Verlaufe der relativen Geschwindigkeiten des Gesammtschwerpunktes, sondern sie ermöglicht auch eine genaue Orientirung über die Beschleuni-

gungen, welche der Schwerpunkt an den verschiedenen Stellen seiner Bahn im Raume besitzt.

Während nämlich der Gesammtschwerpunkt seine relative Bahn beschreibt, wird gleichzeitig der Endpunkt der Geschwindigkeitsstrecke den Hodographen mit bestimmter, im Allgemeinen fortwährend wechselnder Geschwindigkeit durchlaufen. Die Geschwindigkeit, welche dieser Punkt an jeder Stelle des Hodographen aufweist, giebt nun direct sowohl der Richtung als auch der Grösse nach die Beschleunigung an, die der Schwerpunkt an der entsprechenden Stelle seiner Bahncurve besitzt. Wäre die Bahn des Schwerpunktes eben, so würde auch der Hodograph eine ebene Curve darstellen. Der Umstand, dass die Schwerpunktsbahn doppelt gekrümmt ist, bedingt es dagegen, dass auch der Hodograph als Raumcurve erscheint. Der Hodograph kann daher, ebenso wie die Schwerpunktsbahn, hier nur durch seine Projectionen auf Ebenen zur Darstellung gebracht werden. Es liegt nun in der Natur der Sache, dass die Projection des Hodographen auf irgend eine Ebene den Hodographen für die Projection der Bewegung des Schwerpunktes auf dieselbe Ebene darstellt. Verschafft man sich daher die Projectionen des Hodographen auf die drei Hauptebenen, so geben dieselben im Verein mit den entsprechenden Projectionen der relativen Schwerpunktsbahn ein noch anschaulicheres Bild von dem Ablauf der ganzen Bewegung des Schwerpunktes als es die auf den Tafeln V, VI und VII aufgezeichneten Wegcurven, Geschwindigkeitscurven und Beschleunigungscurven vermögen; denn die Geschwindigkeit, mit welcher der Hodograph in einer Projection durchlaufen wird, giebt natürlich auch für diese Projection an jeder Stelle die Beschleunigung des Schwerpunktes sowohl der Richtung als der Grösse nach an.

Auf den Tafeln VIII, IX und X findet sich nun unter jeder Projection der relativen Bahn des Gesammtschwerpunktes die entsprechende Projection des Hodographen aufgezeichnet und mit den Marken R, L, S_r, S_l, A_r, A_l, E_r und E_l versehen. Bei absolut gleichmässigem Gange müsste der Hodograph der relativen Bewegung des Schwerpunktes eine geschlossene Raumcurve sein, welche während eines Doppelschrittes gerade einmal durchlaufen wird. Es würden sich daher in diesem idealen Falle auch die Projectionen des Hodographen auf die drei Hauptebenen nicht nur annähernd, wie es auf den Tafeln VIII, IX, X der Fall ist, sondern vollkommen genau

schliessen. Insbesondere würde die Projection auf die Gangebene nahezu die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit abgestumpften Ecken und verticaler Hypotenuse besitzen, welches während eines Doppelschrittes zweimal durchlaufen wird.

An den Hodographenprojectionen bestätigt man nun zunächst ohne Weiteres, dass die Verbindungsstrecke irgend eines Punktes des Hodographen mit dem festen Punkt O parallel der Tangente in dem entsprechenden Punkte der darüberstehenden Bahnprojection läuft. So ist z. B. die Verbindungsstrecke OR in der Projection des Hodographen auf die Gangebene nach vorn und unten gerichtet; dementsprechend verläuft auch die Projection der relativen Bahn des Schwerpunktes auf die Gangebene im Moment R nach vorn und unten. In der Projection auf die zur Gangrichtung senkrechte Ebene ist dieselbe Strecke des Hodographen nach rechts und unten gerichtet; in Folge dessen besitzt auch die Tangente im Punkte R der darüberstehenden Bahnprojection die Richtung nach rechts und unten. Man kann daher unter Benutzung der Hodographenprojectionen noch deutlicher als aus den Projectionen der Bahncurve erkennen, dass im Moment des Aufsetzens des rechten Beins auf den Fussboden der Schwerpunkt in seiner relativen Bewegung die Richtung nach vorn, rechts und unten besitzt. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass der Schwerpunkt im Moment des Aufsetzens des linken Beins gerade in der Bewegung nach vorn, links und unten begriffen ist. Eine rein horizontale, aber auf der einen oder anderen Seite nach aussen und vorn gehende Richtung besitzt der Schwerpunkt ungefähr in der Mitte der Periode des Aufstehens beider Beine auf dem Fussboden. Im Moment S_l verläuft die Richtung der Bewegung des Schwerpunktes nach vorn, rechts und oben, und im Moment S_r entsprechend nach vorn, links und oben. Alles dies wird ohne Weiteres aus den beiden ersten Projectionen des Hodographen erkannt und durch die dritte Projection auf die Horizontalebene bestätigt. Es wird an diesen Thatsachen auch nichts durch die Belastung des Menschen geändert, wie ein Blick auf Tafel X lehrt.

Weiterhin kann man nun an den Projectionen des Hodographen erkennen, dass in der Projection auf die Gangebene die Geschwindigkeit der Bewegung des Schwerpunktes im Moment des Aufsetzens eines Beins auf den Fussboden relativ klein ist. Sie ist vorher relativ gross geweseu im Moment 7 resp. 20 beim

I. Versuch, $8\frac{1}{2}$ resp. 21 beim II. Versuch und 6 resp. 19 beim III. Versuch. Dies sind aber nach Tabelle 9 auf Seite 82 gerade die Momente E, in denen das allein auf dem Boden aufstehende Bein beginnt, sich um eine Stelle des Fussballens abzuwickeln. Von da an nimmt die Geschwindigkeit in der Projection auf die Gangebene fortwährend an Grösse ab bis zum Aufsetzen des anderen Beins, und wächst dann wieder bis nach dem Moment des Aufsetzens des Fusses mit der ganzen Fusssohle. Dann nimmt die Geschwindigkeit in dieser Projection wieder ab, bis sie etwa am Ende des zweiten Drittels der Periode des Aufstehens mit ganzer Sohle wieder ein relatives Minimum erreicht hat, und darauf wieder bis zum Ende dieser Periode zunimmt. Dieses Beispiel möge genügen, um zu zeigen, wie man bei eingehendem Studium der Tafeln VIII, IX und X einen Ueberblick über das Verhalten der Geschwindigkeiten des Schwerpunktes in der Projection der Bewegung desselben auf die drei Hauptebenen gewinnen kann.

Von noch grösserem Interesse als die Geschwindigkeiten der projicirten Bewegung sind die absoluten Werthe der Gesammtgeschwindigkeit, welche der Gesammtschwerpunkt bei seiner relativen Bewegung an jeder Stelle seiner doppelt gekrümmten, geschlossenen Bahncurve besitzt. Auch diese Werthe lassen sich leicht aus Tabelle 11 für die 31 Bewegungsphasen ableiten. Man hat nur zu beachten, dass die Geschwindigkeiten in den drei Hauptrichtungen, welche sich in Tabelle 11 aufgezeichnet finden, drei zu einander rechtwinklige Componenten der Gesammtgeschwindigkeit darstellen. Man erhält daher nach dem für den Raum verallgemeinerten Satz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten die Gesammtgeschwindigkeit, indem man sich die Summe der Quadrate der drei Componenten für jede Bewegungsphase verschafft und daraus die Quadratwurzel zieht; denn die Gesammtgeschwindigkeit kann als Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds aufgefasst werden, bei welchem die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten bezüglich gleich den Geschwindigkeiten in der Gangrichtung, der Seitenrichtung und der verticalen Richtung sind. Führt man diese Rechnung bei den drei Versuchen für jede der 31 Bewegungsphasen aus, so ergiebt sich die Tabelle 14 (S. 116).

Mit Hülfe dieser Tabelle kann man sich nun wiederum durch ein Diagramm die Werthe der Geschwindigkeiten des Gesammt-

Absolute Werthe der Gesammtgeschwindigkeit der relativen Bewegung des Gesammtschwerpunktes in cm sec^{-1}.

Tabelle 14.

Nr.	I. Versuch	II. Versuch	III. Versuch
1	29,2	20,2	25,7
2	28,3	22,2	19,8
3	22,8	26,2	14,8
4	14,2	24,2	17,5
5	10,3	19,3	25,1
6	21,1	12,3	30,8
7	30,3	17,2	29,6
8	26,4	25,2	24,9
9	19,2	26,6	23,6
10	18,1	19,8	27,7
11	22,4	16,8	27,9
12	22,5	18,5	28,8
13	21,1	19,0	37,0
14	25,5	19,0	26,7
15	27,5	23,8	16,3
16	23,0	27,6	9,0
17	16,0	19,8	16,1
18	15,3	13,3	26,7
19	22,9	11,0	29,4
20	26,9	18,6	23,5
21	22,4	23,7	20,3
22	17,4	21,9	22,1
23	15,9	16,7	26,1
24	18,7	14,6	22,7
25	20,4	16,0	21,6
26	19,3	16,5	24,6
27	22,2	18,1	23,4
28	25,4	28,3	16,7
29	22,4	28,2	15,5
30	16,8	19,9	21,4
31	16,2	12,4	24,8

schwerpunktes für den ganzen Verlauf seiner relativen Bewegung veranschaulichen. Dies ist auf der linken Seite von Tafel XI geschehen. Gleichzeitig finden sich auch hier wieder die wichtigeren Momente des ganzen Bewegungsvorganges durch stärkere Verticalen hervorgehoben, damit man ohne Mühe die zu verschiedenen Versuchen gehörenden Diagramme mit einander vergleichen kann. Da die Werthe der Zeit hierbei von geringerem Interesse sind als die Zugehörigkeit der Geschwindigkeitswerthe zu den 31 Bewegungsphasen, so sind durch verticale, oben und unten nummerirte gerade Linien des Millimeternetzes in Abständen von je $^1/_2$ cm die Nummern der Bewegungsphasen auf den Abscissenaxen der Diagramme markirt, und an jeder Stelle der zugehörige Werth der Gesammtgeschwindigkeit als Ordinate in der Weise aufgetragen worden, dass der Geschwindigkeit von 1 cm sec^{-1} eine Länge von 1 mm entspricht.

Diese Diagramme vermitteln nun im Verein mit den Projectionen der Bahncurve und des Hodographen auf den Tafeln VIII, IX und X eine klare Anschauung von den Geschwindigkeiten des Gesammtschwerpunktes. Während die letzteren Tafeln eine genaue Orientirung über die Richtung der Geschwindigkeiten und die Werthe ihrer Projectionen auf die drei Hauptebenen ermöglichen, geben die Diagramme auf Tafel XI Kenntniss von den Grössen der Gesammtgeschwindigkeit. Man erkennt z. B. aus diesen Diagrammen, welche wiederum für die beiden ersten Versuche ziemlich genau übereinstimmen, dass das Wachsthum der absoluten Werthe der Geschwindigkeiten eine Periode besitzt, deren Dauer gleich der eines einfachen Schrittes ist;

denn von E_r an nimmt das Diagramm wieder denselben Verlauf wie von E_l an. Berücksichtigt man dagegen noch die Richtung der Geschwindigkeit, so wiederholen sich die gleichen Verhältnisse erst nach Ablauf eines Doppelschrittes. Innerhalb einer jeden Periode besitzt das Diagramm zwei sehr ausgesprochene Maxima und Minima. Das eine Maximum fällt genau mit dem Moment E zusammen, während das andere etwa am Ende des ersten Drittels der Periode des Aufstehens eines Fusses mit ganzer Sohle liegt. Das eine Minimum deckt sich ziemlich genau mit dem Moment des Aufsetzens eines Beins auf den Fussboden; das andere fällt an das Ende des zweiten Drittels der Periode des Aufstehens eines Fusses mit ganzer Sohle. Man sieht also, die Verhältnisse sind für die Gesammtgeschwindigkeit annähernd die gleichen wie für die Projection derselben auf die Gangebene. Ausserdem findet sich nun noch ein weniger ausgesprochenes Maximum vor, welches in die Periode des Aufstehens beider Beine nahe an das Ende desselben fällt. Und endlich lässt sich auch noch ein ebenfalls nur schwach ausgeprägtes Minimum erkennen, welches entweder direct am Anfang oder kurz vor dem Anfang der Periode des Aufstehens eines Beins mit ganzer Fusssohle liegt. Vergleicht man hiermit die Bilder auf Tafel VIII, IX und X, so erkennt man, dass der Schwerpunkt verhältnissmässig geringe Geschwindigkeit in seiner Bahn besitzt, wenn er sich entweder in der Nähe der höchsten oder der tiefsten Punkte derselben befindet und sich demnach annähernd horizontal bewegt. Dagegen nimmt er eine verhältnissmässig grosse Geschwindigkeit an, wenn seine Bewegung entweder nahezu vertical nach oben oder vertical nach unten gerichtet ist.

Für den Gang des belasteten Menschen gelten annähernd die gleichen Verhältnisse; es liegen hier nur die Grenzen, zwischen denen sich die absoluten Werthe der Gesammtgeschwindigkeit bewegen, etwas weiter aus einander.

Da die Diagramme auf Tafel XI eine sehr deutliche Sprache reden und viel schneller über alle Einzelheiten des Verhaltens der Geschwindigkeitswerthe Aufschluss geben, als es Worte vermögen, so soll an dieser Stelle nicht weiter auf die Deutung der Curven eingegangen werden, sondern vielmehr das Studium derselben empfohlen sein. —

Ausser über die Geschwindigkeiten geben nun die Projectionen der Hodographen auf den Tafeln VIII, IX und X Aufschluss über

die Beschleunigungen. Aus der Richtung der Hodographenprojectionen an den verschiedenen Stellen kann man unmittelbar die Richtung der Beschleunigung für die Projection der Bewegung des Schwerpunktes auf die betreffende Ebene erkennen.

Die Beschleunigung besitzt im Allgemeinen nicht die Richtung der Bewegung, wie es bei der Geschwindigkeit der Fall ist; dies findet nur dann statt, wenn die Bewegung geradlinig ist. Bei gekrümmter Bahn eines im Raume vollständig frei beweglichen Punktes weicht dagegen die Beschleunigung immer nach der Seite von der Bahntangente ab, nach welcher die Bahn concave Krümmung zeigt. Dies lässt sich ohne Weiteres aus den Figuren auf den Tafeln VIII, IX und X erkennen. Im Punkte R z. B. ist in der Projection auf die Gangebene die Bahntangente nach vorn und unten gerichtet; dabei zeigt die Bahncurve selbst eine nach vorn und oben gerichtete concave Krümmung. Dementsprechend verläuft die Tangente an die zugehörige Hodographenprojection, welche die Richtung der Beschleunigung angiebt, nach vorn und oben. Im Raume ist die Bahncurve des Schwerpunktes im Punkte R nach vorn, unten und rechts gerichtet und zeigt nach oben concave Krümmung. In Folge dessen weicht auch die Tangente an den Hodographen im Raume an der Stelle R nach oben von der Tangente an die Bahncurve ab. Diese Abweichung ist im Allgemeinen nicht so, dass die Richtung der Beschleunigung auf der Tangente der Bahn senkrecht steht, sondern beide durchkreuzen sich gewöhnlich unter einem spitzen oder stumpfen Winkel.

Man kann sich die Beschleunigung immer in zwei Componenten zerlegt denken, von denen die eine in die Tangente der Bahn fällt, während die andere darauf senkrecht steht. Dann geht die letztere stets durch den Krümmungsmittelpunkt der Bahn für die betreffende Stelle. Die erstere Componente nennt man „Tangentialbeschleunigung“, die letztere „Normalbeschleunigung“. Es stellt sich nun heraus, dass einer jeden der beiden Componenten eine bestimmte Rolle bei der Bewegung zufällt.

Die Tangentialbeschleunigung verändert allein die Geschwindigkeit der Bewegung des Schwerpunktes in seiner Bahn. Die Normalbeschleunigung dagegen ruft allein die Krümmung der Bahn hervor. Ist die letztere Componente gross, so wird auch die Krümmung an der betreffenden Stelle der Bahn verhältnissmässig stark sein; ist dagegen diese letztere Componente klein, so ist

die Bahn verhältnissmässig gestreckt. Bei geradliniger Bahn würde die Normalbeschleunigung den Werth Null besitzen. Natürlich hängt die Krümmung der Bahn ausserdem noch von der Grösse der Geschwindigkeit ab. Bei sehr grosser Geschwindigkeit wird dieselbe Normalbeschleunigung nur eine geringere Krümmung der Bahn hervorrufen können, als bei kleiner Geschwindigkeit. Ist die Geschwindigkeit constant, so ist die Tangentialbeschleunigung Null, und es besitzt dann die gesammte Beschleunigung eine zur Tangente an die Bahn senkrechte Richtung. Ist dagegen die Bewegung in der Bahn beschleunigt, so besitzt die Tangentialbeschleunigung eine endliche Grösse und verläuft in der Richtung der Bewegung. Ist dann gleichzeitig eine Normalbeschleunigung vorhanden, und also die Bahn gekrümmt, so bildet die gesammte Beschleunigung mit der Tangente einen nach der Seite der Bewegung hin spitzen Winkel. Findet dagegen Verzögerung der Bewegung statt, so verläuft die Tangentialbeschleunigung entgegengesetzt wie die Bewegung, und es bildet dann, sofern die Normalbeschleunigung nicht den Werth Null hat, die Gesammtbeschleunigung einen stumpfen Winkel mit der Tangente. Kennt man die Richtung der Gesammtbeschleunigung, so kann man schon allein hieraus das Grössenverhältniss zwischen Tangential- und Normalbeschleunigung bestimmen. Die Richtung der Gesammtbeschleunigung des Schwerpunktes lässt sich nun aus dem Verlauf der Hodographenprojectionen leicht erkennen. Man ist daher in der Lage, bei eingehendem Studium des durch die Projectionen auf die drei Hauptebenen vollkommen bekannten Hodographen

Absolute Werthe der Gesammtbeschleunigung der Bewegung des Gesammtschwerpunktes in cm sec^{-2}.

Tabelle 15.

Nr.	I. Versuch	II. Versuch	III. Versuch
1	188	220	215
2	172	330	234
3	221	166	310
4	341	175	350
5	452	228	234
6	289	430	145
7	182	346	216
8	227	225	305
9	283	218	426
10	393	290	358
11	216	303	256
12	245	243	484
13	364	240	194
14	392	315	376
15	204	403	306
16	203	259	381
17	391	267	373
18	355	286	286
19	228	420	147
20	86	253	270
21	182	135	260
22	219	201	334
23	251	238	283
24	275	238	223
25	230	195	258
26	283	229	188
27	394	355	220
28	191	439	404
29	215	225	361
30	337	260	161
31	445	284	109

das Grössenverhältniss der beiden Componenten der Beschleunigung anzugeben.

Es mag vorläufig an dieser Stelle nicht weiter hierauf eingegangen werden; es sollte nur damit auf eine weitere Verwendung des Hodographen hingewiesen sein.

Die Grösse der Gesammtbeschleunigung kann man nun ebenso wie die der Gesammtgeschwindigkeit aus den drei in Tabelle 11 angegebenen, zu einander rechtwinkligen, Componenten ableiten. Man hat zu diesem Zwecke wieder nur die Summe der Quadrate der Beschleunigungen in der Gangrichtung, Seitenrichtung und verticalen Richtung zu bilden und aus derselben die Quadratwurzel zu ziehen. Dies ist bei jedem der drei Versuche für die 31 Bewegungsphasen ausgeführt worden. Die Resultate dieser Berechnung finden sich in der Tabelle 15 (S. 119) niedergelegt.

Auch diese Grössen sind durch ein Diagramm auf der rechten Seite von Tafel XI in der gleichen Weise wie die absoluten Werthe der Gesammtgeschwindigkeit veranschaulicht worden. Dabei entspricht wie auf den Tafeln V, VI und VII der Beschleunigung von 1 cm sec^{-2} eine Länge von $\frac{1}{10}$ mm. Aus den Diagrammen, welche wieder für sich selbst sprechen, ist ersichtlich, dass die Gesammtbeschleunigung fast genau an allen den Stellen Maxima besitzt, an denen die Gesammtgeschwindigkeit relativ klein ist, und umgekehrt.

Während die Geschwindigkeiten, welche in Tabelle 14 niedergelegt sind, nur für die relative Bewegung des Gesammtschwerpunktes gelten, indem bei der absoluten Bewegung noch die mittlere Ganggeschwindigkeit als Componente in der Gangrichtung hinzutritt, haben diese Werthe der Gesammtbeschleunigung Geltung sowohl für die relative als auch für die absolute Bewegung des Schwerpunktes.

IV. Ueber die äusseren Kräfte.

Die äusseren Kräfte, welche während des Gehens auf den menschlichen Körper einwirken, sind, wie schon in der Einleitung aus einander gesetzt worden ist, den Beschleunigungen des Gesammtschwerpunktes proportional. Misst man die Kräfte durch Gewichte, drückt sie also im terrestrischen Maasssystem aus, so würde eine äussere Kraft dann gleich dem Gewicht des menschlichen Körpers zu setzen sein, wenn sie dem Gesammtschwerpunkt eine Beschleunigung von 981,11 $\text{cm}\,\text{sec}^{-2}$ ertheilte; denn dies ist die für Leipzig geltende Beschleunigung der Schwere. Ist dagegen die Beschleunigung des Schwerpunktes grösser oder kleiner als die Beschleunigung der Schwere, so wird auch die äussere Kraft, von welcher diese Beschleunigung verursacht ist, grösser oder kleiner als das Gewicht des Körpers sein. Bezeichnet man die Maasszahl für die äussere Kraft mit K, die für die zugehörige Beschleunigung mit γ und die Maasszahl für das Gewicht des Körpers mit G, so hat man zur Bestimmung von K die Proportion

$$K : G = \gamma : 981{,}11,$$

woraus folgt

$$K = \frac{G}{981{,}11} \cdot \gamma.$$

Das Gewicht unseres Versuchsindividuums betrug 58,7 kg und das Gewicht des Militärgepäcks 23,27 kg. Drückt man auch die äusseren Kräfte in kg aus, so ist beim I. und II. Versuch für G die Zahl 58,7, beim III. Versuch dagegen die Zahl 81,97 einzusetzen. Man erhält daher im vorliegenden Falle zur Bestimmung der äusseren Kräfte aus den Beschleunigungen γ des Gesammtschwerpunktes die Formeln

für den I. und II. Versuch: $K = 0{,}05983 \cdot \gamma$

und für den III. Versuch: $K = 0{,}08355 \cdot \gamma$

Diese Formeln gelten sowohl für die Resultante der sämmtlichen äusseren Kräfte als auch für die Componentensummen in

den drei Hauptrichtungen; man hat nur im ersten Falle für γ die in Tabelle 15 auf Seite 119 niedergelegten Werthe der Gesammtbeschleunigung, im letzten Falle dagegen die in Tabelle 11 auf Seite 104 bis 106 angegebenen Componenten der Gesammtbeschleunigung für die drei Hauptrichtungen einzusetzen.

Es empfiehlt sich nicht, direct die Grösse der Resultante der äusseren Kräfte zu ermitteln, da man dann noch nicht über die Richtung derselben orientirt ist. Der Umstand, dass, wie schon in der Einleitung angeführt worden ist, die wirksamen äusseren Kräfte sich gerade auf die drei Hauptrichtungen in bestimmter Weise vertheilen, legt es vielmehr nahe, die drei Componentensummen der äusseren Kräfte für die Gangrichtung, die Seitenrichtung und die verticale Richtung auszurechnen, zumal man mit Hülfe derselben auch zugleich die Richtung der Resultante der äusseren Kräfte ermitteln kann.

Diese Berechnung ist nun unter Zugrundelegung der Tabelle 11 für die 31 Bewegungsphasen sämmtlicher Versuche nach den umstehenden Formeln ausgeführt worden. Die Resultate derselben finden sich in Tabelle 16 auf der folgenden Seite niedergelegt.

In der Gangrichtung kommen in Frage die in diese Richtung fallende Componente der Reibungskraft und der Luftwiderstand. Während die Reibungskraft in manchen Bewegungsphasen in der Gangrichtung selbst, in anderen in der entgegengesetzten Richtung wirkt, besitzt der Luftwiderstand in unserem Falle stets die Richtung von vorn nach hinten. Der Effect des letzteren ist daher ein solcher, dass die Componentensummen für die Gangrichtung einen kleineren absoluten Werth als die Reibungskraft besitzen, wenn sie positives Vorzeichen haben, dass sie dagegen einen grösseren absoluten Werth aufweisen, wenn sie mit negativem Vorzeichen versehen sind. So lange noch keine genaueren Untersuchungen über die Grösse des Luftwiderstandes angestellt sind, ist es jedoch nicht möglich, den Antheil der Componentensummen festzustellen, welcher der in der Gangrichtung wirkenden Reibungskraft zufällt. Man wird aber nicht fehl gehen, wenn man den Luftwiderstand im vorliegenden Falle, wo das Versuchsindividuum im geschlossenen Raume ging, im Verhältniss zu den anderen äusseren Kräften überhaupt als sehr gering anschlägt. Man kann daher wenigstens mit gewisser Annäherung die für die Gangrichtung berechneten Componentensummen direct als Maass für

Tabelle 16. **Componentensummen der äusseren Kräfte in kg.**

Nr.	I. Versuch			II. Versuch			III. Versuch			Nr.
	Gangrichtung[1]	Seitenrichtung[2]	Verticale Richtung[3]	Gangrichtung	Seitenrichtung	Verticale Richtung	Gangrichtung	Seitenrichtung	Verticale Richtung	
1	− 7,48	+ 0,78	+ 8,38	− 8,14	+ 2,99	+ 9,93	− 9,19	0	− 15,46	1
2	− 5,50	+ 1,97	− 8,50	− 14,54	+ 2,45	+ 13,16	− 6,10	+ 0,08	− 18,55	2
3	− 3,53	+ 2,63	− 12,44	− 9,75	+ 1,79	+ 0,78	− 3,26	+ 0,25	− 25,73	3
4	− 1,38	+ 0,84	− 20,34	− 6,52	+ 1,20	− 8,14	− 0,25	+ 0,42	− 29,24	4
5	+ 0,42	− 0,60	− 27,04	− 3,95	+ 0,72	− 13,04	+ 3,43	+ 0,84	− 19,22	5
6	+ 1,91	− 0,48	− 17,17	− 1,02	+ 0,42	− 25,73	+ 7,77	+ 1,50	− 9,19	6
7	+ 3,53	+ 1,56	− 10,17	+ 1,91	+ 0,36	− 20,64	+ 12,70	+ 2,59	+ 12,53	7
8	+ 6,04	+ 2,87	+ 11,79	+ 4,85	+ 0,66	− 12,56	+ 17,13	+ 4,09	+ 18,38	8
9	+ 11,32	+ 4,01	+ 11,97	+ 8,74	+ 1,26	+ 9,57	+ 16,71	+ 5,85	+ 30,91	9
10	+ 19,62	+ 4,67	+ 12,03	+ 13,52	+ 2,45	+ 10,59	+ 5,85	− 1,67	+ 29,24	10
11	+ 3,65	+ 1,97	+ 12,27	+ 13,04	+ 4,85	+ 11,61	− 12,95	− 7,94	+ 15,04	11
12	− 7,06	− 1,38	+ 12,80	+ 4,73	+ 4,67	+ 12,92	− 20,88	− 11,70	+ 32,58	12
13	− 16,03	− 4,01	+ 14,18	− 2,69	− 1,20	+ 14,06	− 13,03	− 9,61	0	13
14	− 13,76	− 7,18	+ 17,59	− 9,99	− 3,71	+ 15,56	− 8,52	− 7,52	− 29,24	14
15	− 7,36	− 5,03	− 8,38	− 14,66	− 5,68	+ 18,31	− 5,93	− 5,60	− 24,23	15
16	− 3,59	− 2,27	− 11,37	− 9,03	− 5,38	− 11,37	− 3,43	− 4,43	− 31,33	16
17	− 1,32	− 1,02	− 23,33	− 5,15	− 2,33	− 14,96	− 0,75	− 4,09	− 30,91	17
18	+ 0,72	− 0,60	− 21,24	− 2,27	− 0,72	− 16,93	+ 2,59	− 4,09	− 23,39	18
19	+ 2,63	− 1,08	− 13,34	0	− 0,42	− 25,13	+ 7,77	− 4,51	+ 8,36	19
20	+ 4,43	− 2,09	− 1,50	+ 2,33	− 0,78	− 14,96	+ 13,79	− 5,85	+ 16,88	20
21	+ 6,28	− 3,41	+ 8,20	+ 4,79	− 1,56	− 6,28	+ 10,69	− 8,94	+ 16,71	21
22	+ 8,14	− 4,97	+ 8,97	+ 7,30	− 2,45	+ 9,27	+ 6,43	− 16,13	+ 21,89	22
23	+ 10,41	− 5,38	+ 9,39	+ 9,75	− 3,71	+ 9,69	+ 1,34	+ 12,53	+ 20,05	23
24	+ 12,09	+ 0,72	+ 11,13	+ 9,39	− 4,43	+ 9,75	− 8,69	+ 10,95	+ 12,28	24
25	− 1,38	+ 6,58	+ 12,03	+ 5,09	− 0,12	+ 10,47	− 17,55	+ 7,94	+ 9,69	25
26	− 10,59	+ 4,01	+ 12,62	− 1,20	+ 6,22	+ 12,15	− 12,95	+ 5,68	+ 6,77	26
27	− 18,25	+ 4,43	+ 14,24	− 11,07	+ 4,01	+ 17,65	− 7,52	+ 3,84	− 16,29	27
28	− 9,57	+ 4,55	− 4,31	− 12,27	+ 2,93	+ 23,03	− 4,09	+ 2,26	− 33,42	28
29	− 5,38	+ 2,63	− 11,37	− 5,68	+ 2,39	− 11,97	− 1,59	+ 1,34	− 30,08	29
30	− 1,68	+ 1,20	− 20,04	− 2,33	+ 1,62	− 15,32	+ 0,92	+ 0,75	− 13,37	30
31	+ 1,38	+ 0,36	− 26,56	− 0,12	+ 0,78	− 16,99	+ 3,26	+ 0,42	− 8,86	31

die in der Gangrichtung wirkenden Componenten der Reibungskraft auffassen.

In der Seitenrichtung wirkt überhaupt keine andere äussere Kraft als die in diese Richtung fallende Componente der Reibungs-

1) nach vorn positiv. 2) nach rechts positiv. 3) nach oben positiv.

Werthe des normalen Gegendruckes des Bodens bezüglich des von unseren Füssen normal gegen den Fussboden ausgeübten Druckes in kg.

Tabelle 17.

Nr.	I. Versuch	II. Versuch	III. Versuch
1	67,08	68,63	66,51
2	50,20	71,86	63,42
3	46,26	59,48	56,24
4	38,36	50,56	52,73
5	31,66	45,66	62,75
6	41,53	32,97	72,78
7	48,53	38,06	94,50
8	70,49	46,14	100,35
9	70,67	68,27	112,88
10	70,73	69,29	111,21
11	70,97	70,31	97,01
12	71,50	71,62	114,55
13	72,88	72,76	81,97
14	76,29	74,26	52,73
15	50,32	77,01	57,74
16	47,33	47,33	50,64
17	35,37	43,74	51,06
18	37,46	41,77	58,58
19	45,36	33,57	90,33
20	57,20	43,74	98,85
21	66,90	52,42	98,68
22	67,67	67,97	103,86
23	68,09	68,39	102,02
24	69,83	68,45	94,25
25	70,73	69,17	91,66
26	71,32	70,85	88,74
27	72,94	76,35	65,68
28	54,39	81,73	48,55
29	47,33	46,73	51,89
30	38,66	43,38	68,60
31	32,14	41,71	73,11

kraft. Der Luftwiderstand ist hier deshalb auf alle Fälle zu vernachlässigen, weil es in der Seitenrichtung nicht zu grossen Geschwindigkeiten kommt. Es gelten daher mit noch grösserer Annäherung die in Tabelle 16 niedergelegten Componentensummen für die Seitenrichtung direct als Werthe für die seitlich wirkende Componente der Reibungskraft.

In der verticalen Richtung kann man natürlich ebenfalls vom Luftwiderstande absehen. Dagegen kommen nun hier immer noch zwei Kräfte in Frage, nämlich der normale Gegendruck des Bodens und die Schwere. Da die letztere constant und bekannt ist, so kann man auf sehr einfache Weise aus der in die verticale Richtung fallenden Componentensumme der äusseren Kräfte für jede der 31 Bewegungsphasen die Grösse des normalen Gegendruckes des Bodens berechnen. Da die Schwerkraft nach unten wirkt, also negativ zu rechnen ist, so braucht man das Gewicht des Körpers nur zu den in Tabelle 16 niedergelegten verticalen Componentensummen zu addiren, um die Werthe des normalen Gegendruckes zu erhalten. Dabei ist zu berücksichtigen, dass im Falle des III. Versuchs das Gewicht des belasteten Körpers von 81,97 kg in Rechnung zu ziehen ist. Die Resultate dieser für alle drei Versuche und alle 31 Bewegungsphasen ausgeführten Rechnung finden sich in der nebenstehenden Tabelle 17 niedergelegt.

Da der normale Gegendruck entgegengesetzt gleich ist dem normal gegen den Fussboden durch unsere Beine ausgeübten Druck, so geben die Zahlen der Tabelle 17 zugleich die Werthe dieses

Druckes an; es ist dabei nur zu beachten, dass der letztere die Richtung von oben nach unten besitzt, also negativ zu rechnen ist.

Es ist schliesslich noch von Interesse, die grössten und kleinsten Werthe des normalen Druckes gegen den Fussboden zu kennen. Dieselben lassen sich mit Hülfe der Tabelle 13 auf Seite 109 bis 111 leicht berechnen, in welcher unter anderen die hierzu erforderlichen Maximal- und Minimalwerthe der Beschleunigung des Gesammtschwerpunktes in verticaler Richtung aufgezeichnet sind. Es ergeben sich dann die folgenden extremen Werthe des normalen Druckes:

Maxima und Minima des normalen Druckes gegen den Fussboden in kg.

Tabelle 18.

I. Versuch		II. Versuch		III. Versuch	
Nr.	Druck	Nr.	Druck	Nr.	Druck
Maxima.					
14,2	76,71	2,1	72,58	9,4	122,58
27,0	72,94	15,2	77,37	22,5	105,53
		27,9	82,21		
Minima.					
4,7	21,61	6,0	32,97	3,6	38,52
17,6	15,20	19,2	32,26	16,3	50,22
30,7	28,78			28,5	41,87

Um eine Vorstellung von dem Verhalten des Bodendruckes während des Gehens zu bekommen, sind die Werthe desselben durch Diagramme auf Tafel XII veranschaulicht worden. Diese Diagramme sind unter Benutzung der Tabellen 17 und 18 in ganz gleicher Weise wie die Diagramme auf Tafel XI construirt worden; dabei findet sich eine Kraft von 1 kg durch eine Länge von 1 mm dargestellt. Zum Vergleich mit dem Gewicht des Körpers ist dasselbe durch eine Horizontallinie besonders angegeben worden.

Man erkennt aus diesen Diagrammen, dass beim Gang ohne Belastung in dem Moment E, in welchem der allein auf dem Boden aufstehende Fuss gerade beginnt, sich vom Boden abzuwickeln, der Druck nahezu gleich dem Gewicht des Körpers ist. Er steigt aber darauf ziemlich schnell auf eine grössere Höhe,

auf der er sich lange Zeit, bis hinein in die Periode des Aufstehens des anderen Fusses mit ganzer Sohle, annähernd constant erhält. Zuletzt wird er sogar noch merklich grösser, um dann aber ziemlich schnell abzufallen, so dass er in der zweiten Hälfte der Periode des Aufstehens des Fusses mit ganzer Sohle beim I. Versuch bis unter die Hälfte, beim II. Versuch nahezu bis zur Hälfte des Körpergewichts herabgesunken ist. Es ist zu beachten, dass in diesem Moment gerade der Schwerpunkt am höchsten steht, wie ein Blick auf die Tafeln VIII, IX und X lehrt. Auf der geringen Höhe bleibt der Druck nur einen Moment und wächst dann rasch wieder an, so dass er schon am Ende der Periode des Aufstehens mit ganzer Fusssohle sich wieder bis zum Körpergewicht vergrössert hat.

Beim Gang mit Belastung zeigt sich dasselbe charakteristische Verhalten; nur führt der Druck hier auch Schwankungen in der Periode des Aufstehens beider Beine aus.

Wie die Werthe der Tabellen 17 und 18 nicht nur für den Gegendruck des Bodens, sondern auch für den von unseren Füssen gegen den Boden ausgeübten Normaldruck Geltung haben, so kann man auch, wenn man vom Luftwiderstand absieht, die Componentensummen für die Gangrichtung und Seitenrichtung in Tabelle 16 als Werthe für die in diese beiden Richtungen fallenden Componenten des von unseren Beinen gegen den Boden ausgeübten Druckes auffassen. Man hat dabei nur zu berücksichtigen, dass die entsprechenden Componenten der Reibungskraft zwar an Grösse diesen Druckcomponenten gleich sind, aber entgegengesetzte Richtung besitzen; demnach wären die sämmtlichen Vorzeichen umzukehren. Thut man dies, so hat man in den Zahlen der Tabelle 16 für die Gangrichtung und Seitenrichtung und denen der Tabelle 17 für die verticale Richtung die Componenten des Gesammtdruckes, welcher von unseren Beinen gegen den Fussboden ausgeübt wird. Da dieser Druck durch die Thätigkeit unserer Muskeln im Verein mit der Schwere hervorgebracht wird, so hat man die Kenntniss desselben nöthig, wenn man in die Thätigkeit der Muskeln beim Gehen einen Einblick gewinnen will.

Rückblick.

In dem vorliegenden II. Theil der Untersuchung über den Gang des Menschen ist das für die Mechanik des Gehens wichtige Problem der Bewegung des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers behandelt worden. Es ist nicht nur die doppelt gekrümmte Bahn festgestellt worden, welche der Schwerpunkt während eines Doppelschrittes im Raume beschreibt, sondern es finden sich auch die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen abgeleitet, welche derselbe an den verschiedenen Stellen seiner Bahn besitzt. Dabei wurde sowohl für die Ableitung der Resultate als auch im Interesse der anschaulicheren Darstellung derselben die Bewegung des Schwerpunktes in drei Componenten zerlegt, deren Richtungen auf einander senkrecht stehen. Die eine Bewegungscomponente besitzt die Gangrichtung, die zweite die zur Gangebene senkrechte Richtung (Seitenrichtung) und die dritte die verticale Richtung.

Unter den drei Bewegungscomponenten nimmt die erste eine besondere Stellung ein. Während der Schwerpunkt, und ebenso jeder andere Punkt des Körpers, in der Seitenrichtung und der verticalen Richtung beim Gehen periodische Bewegungen ausführt, deren Schwingungsdauer in dem einen Falle gleich der doppelten, im anderen gleich der einfachen Schrittdauer ist, schreitet er in der Gangrichtung immer weiter fort. Er legt dabei während eines Schrittes einen Weg zurück, welcher gleich der Schrittlänge ist. Diese Bewegung in der Gangrichtung ist nun aber keine gleichförmige; die Geschwindigkeit schwankt periodisch in ihrer Grösse zwischen zwei Grenzen hin und her. Versteht man unter mittlerer Geschwindigkeit des Ganges diejenige, bei welcher während der Dauer eines Schrittes in gleichförmiger Bewegung gerade die Schrittlänge zurückgelegt würde, so ist die thatsächlich vorhandene Geschwindigkeit des Gesammtschwerpunktes des menschlichen Körpers in der Gangrichtung zum Theil grösser, zum Theil aber

auch kleiner als diese mittlere Ganggeschwindigkeit. Denkt man sich einen Raum, welcher in der Richtung des Ganges mit der mittleren Ganggeschwindigkeit gleichmässig selbst mit fortschreitet, und bezieht die Bewegung des Gesammtschwerpunktes auf diesen Raum, so führt der Schwerpunkt in dem bewegten Raume auch in der Gangrichtung eine periodische Bewegung aus. Da die Bewegungscomponenten der beiden anderen Richtungen für den bewegten Raum dieselben sind wie für den ruhenden, so beschreibt der Gesammtschwerpunkt relativ zu dem mit der mittleren Ganggeschwindigkeit fortschreitenden Raume eine geschlossene doppelt gekrümmte Raumcurve, welche er während eines Doppelschrittes gerade einmal durchläuft (vgl. Figur 2 bis 5). Könnte man die Bewegung des menschlichen Gesammtschwerpunktes beim Gehen direct wahrnehmen, so würde ein neben dem gehenden Menschen etwa in einem Wagen mit der mittleren Ganggeschwindigkeit gleichmässig fortbewegter Beobachter den Schwerpunkt die geschlossene Raumcurve beschreiben sehen.

Mit Hülfe der doppelt gekrümmten Bahncurve für die relative Bewegung des Schwerpunktes kann man sich nun leicht auch eine klare Anschauung von der absoluten Bewegung desselben im ruhenden Raume bilden. Man braucht sich zu diesem Zwecke nur vorzustellen, dass der Gesammtschwerpunkt mit der ihm zukommenden variabelen Geschwindigkeit die geschlossene Raumcurve durchläuft, während gleichzeitig die letztere mit der mittleren Ganggeschwindigkeit in der Gangrichtung gleichmässig fortbewegt wird.

Die Componenten der Geschwindigkeit, mit welcher der Schwerpunkt in seiner relativen Bewegung die geschlossene Bahn durchläuft, sind für die Seitenrichtung und die verticale Richtung die gleichen wie bei der absoluten Bewegung im ruhenden Raume. Die Geschwindigkeitscomponente in der Gangrichtung ist indess in jedem Moment für den ruhenden Raum um die constante mittlere Ganggeschwindigkeit grösser als für den bewegten. Die Componenten der Beschleunigung sind dagegen für die geschlossene Raumbahn der relativen Bewegung sämmtlich genau dieselben wie für die wirkliche Bahn des Gesammtschwerpunktes im ruhenden Raume. Es empfiehlt sich daher, an Stelle der absoluten Bewegung des Schwerpunktes die relative der eingehenden Untersuchung zu unterwerfen, da hierbei die Excursionen nach allen drei Dimen-

sionen gering sind. Dieser Weg ist in der vorliegende Arbeit eingeschlagen worden.

Eine genaue und eingehende Kenntniss der Bewegung des Schwerpunktes eines Körpers ist nun für die Erforschung des ganzen Bewegungsvorganges von grosser Wichtigkeit. Sie lässt nämlich unter anderem einen Schluss auf die Richtung und Intensität der äusseren Kräfte zu, welche beim Gehen thätig sind. Nach einem bekannten Satze der Dynamik bewegt sich der Schwerpunkt eines Körpers oder eines Systems von Körpern, auf welche beliebige innere und äussere Kräfte einwirken, stets so, als ob alle Massen in ihm vereinigt wären und alle äusseren Kräfte direct an ihm selbst angriffen. Die inneren Kräfte üben keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunktes aus, weil sie immer paarweise einander entgegengesetzt gleich sind.

Als äussere Kräfte wirken beim Gehen die Schwere, der normale Gegendruck des Fussbodens, die Reibung am Boden und der Luftwiderstand. Diese Kräfte theilen sich in bestimmter Weise in die Rolle, den Gesammtschwerpunkt des menschlichen Körpers fortzubewegen. Für die Bewegung in der Gangrichtung kommen in Betracht die in diese Richtung fallende Componente der Reibung, welche überhaupt als Gegenkraft gegen die Bewegung des Fusses in horizontaler Richtung, und der Luftwiderstand, welcher als Gegenkraft gegen die Bewegung des ganzen Körpers aufgefasst werden kann. Die Reibung ist, so lange sie den Fuss am Ausgleiten hindert, gleich der Horizontalcomponente der Kraft, mit welcher der Fuss gegen den Boden drückt; der Luftwiderstand ist dagegen abhängig von der Geschwindigkeit der Fortbewegung. Die Bewegung des Gesammtschwerpunktes in der Seitenrichtung wird fast ausschliesslich durch die in diese Richtung fallende Reibungscomponente hervorgebracht; denn da es in seitlicher Richtung nicht zu grossen Geschwindigkeiten kommt, so spielt der im Wesentlichen von der Geschwindigkeit abhängende Luftwiderstand hier nur eine sehr geringe Rolle. Die verticale Bewegung des Gesammtschwerpunktes endlich ist ein Resultat des Zusammenwirkens von Schwere einerseits und normalem Gegendruck des Fussbodens andererseits.

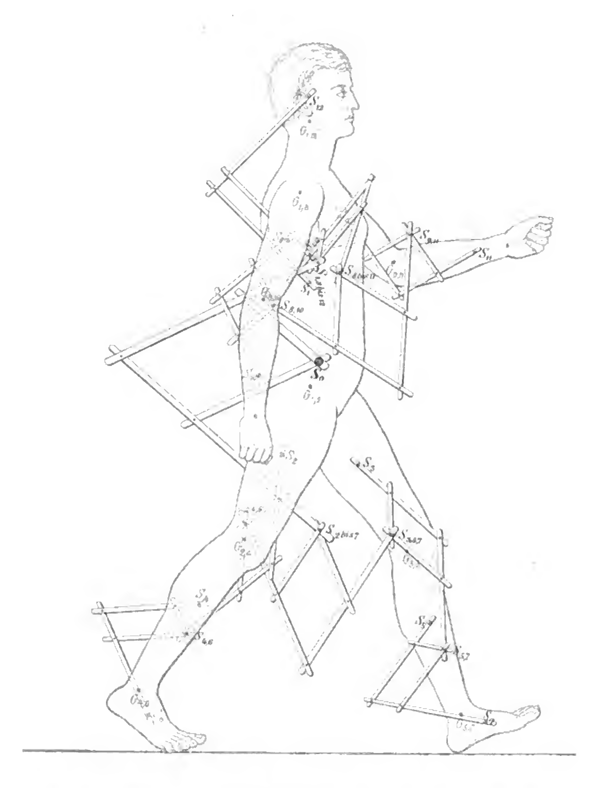
Von diesen äusseren Kräften können wir willkürlich mittelst unserer Muskeln den normalen Gegendruck des Fussbodens und die Reibungskraft innerhalb gewisser Grenzen variiren; denn beide

hängen ab von dem durch unsere Beine auf den Boden ausgeübten Druck. Dadurch sind wir überhaupt erst in den Stand gesetzt, zu gehen, und unserem Körper sowohl die Richtung als auch die Geschwindigkeit des Ganges aufzuzwingen.

Mit Hülfe der Beschleunigungen, welche der Gesammtschwerpunkt in jedem Moment nach den drei Richtungen erfährt, kann man die Grössen des normalen Gegendruckes des Bodens und der Componenten der Reibungskraft berechnen, sofern man den, zunächst zwar nicht genau bekannten, aber beim Gange im geschlossenen Raume im Verhältniss zu den übrigen äusseren Kräften jedenfalls nicht sehr beträchtlichen Luftwiderstand vernachlässigt. Dies ist in der Arbeit ausgeführt worden.

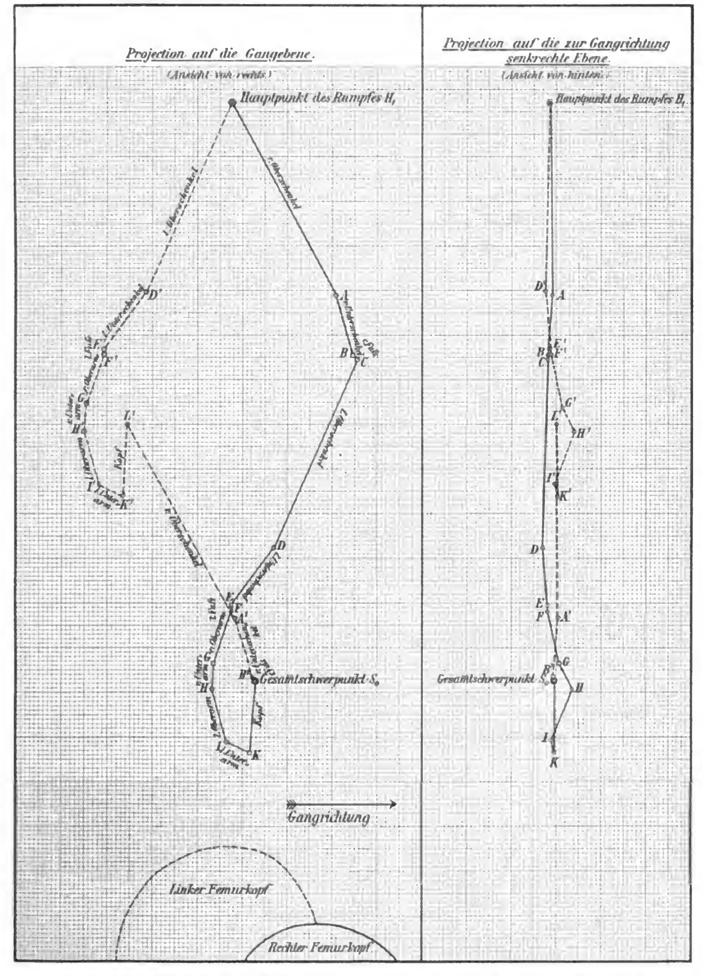
Endlich wird die Kenntniss von Gegendruck und Reibungskraft weiterhin den Ausgangspunkt für die Beurtheilung der Thätigkeit der hauptsächlich beim Gehen in Betracht kommenden Muskelgruppen bilden können. Allerdings wird man sich zu diesem Zwecke erst noch mit Hülfe der räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte eine eingehende Kenntniss von den während eines Doppelschrittes stattfindenden Gelenkbewegungen verschaffen müssen. Dies soll den Gegenstand eines späteren Theiles der Untersuchung des menschlichen Ganges bilden. —

Die Arbeit zerfällt in vier Abschnitte. In einem ersten Abschnitt sind die verschiedenen Methoden auseinandergesetzt worden, nach denen man die Schwerpunktsbahn bestimmen kann. Es lassen sich hierbei zwei principiell verschiedene Wege einschlagen. Man geht entweder von den Einzelschwerpunkten der Glieder aus, oder man ermittelt den Gesammtschwerpunkt mit Hülfe der Hauptpunkte der einzelnen Abschnitte des menschlichen Körpers. Beide Wege sind ausführlich dargelegt worden. In einem zweiten Abschnitt ist nun die Berechnung der Coordinaten des Gesammtschwerpunktes für alle 31 Bewegungsphasen eines jeden der drei Versuche durchgeführt worden. Ein dritter Abschnitt handelt dann von der Ableitung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gesammtschwerpunktes. Im vierten und letzten Abschnitt sind endlich die Componenten der äusseren Kräfte berechnet worden, welche während des Gehens auf den menschlichen Körper einwirken.

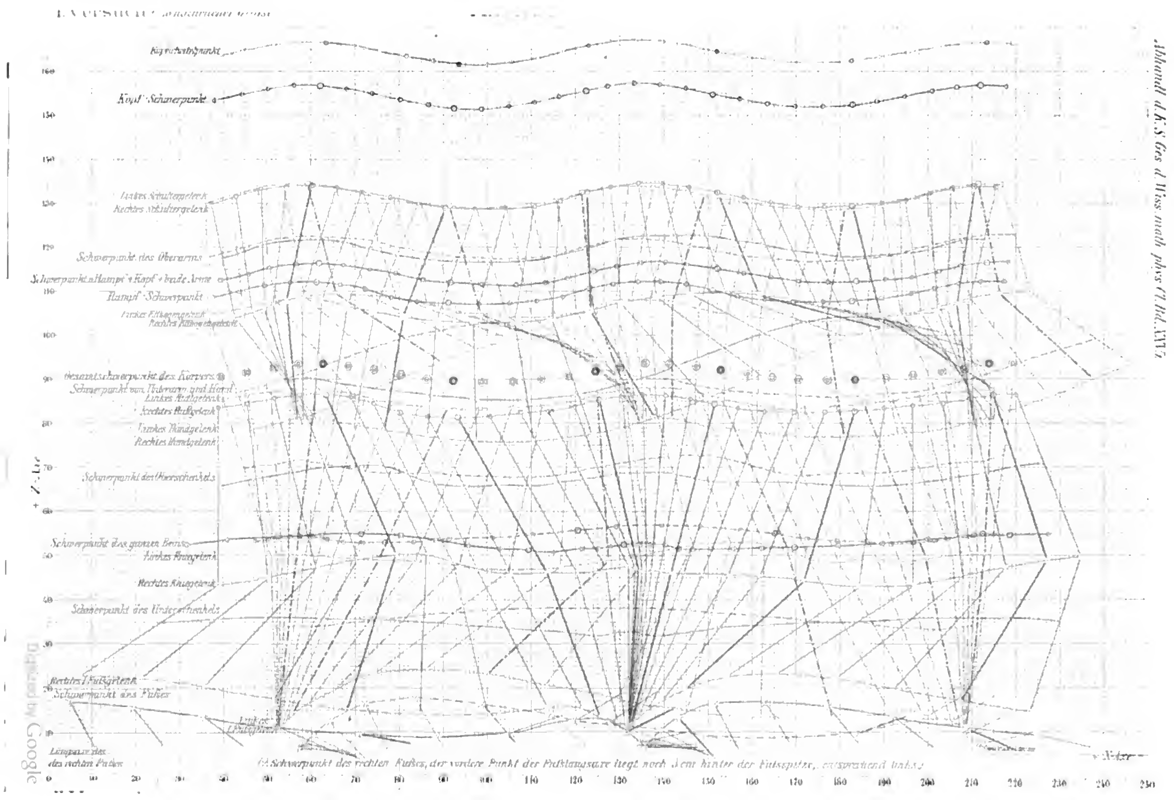


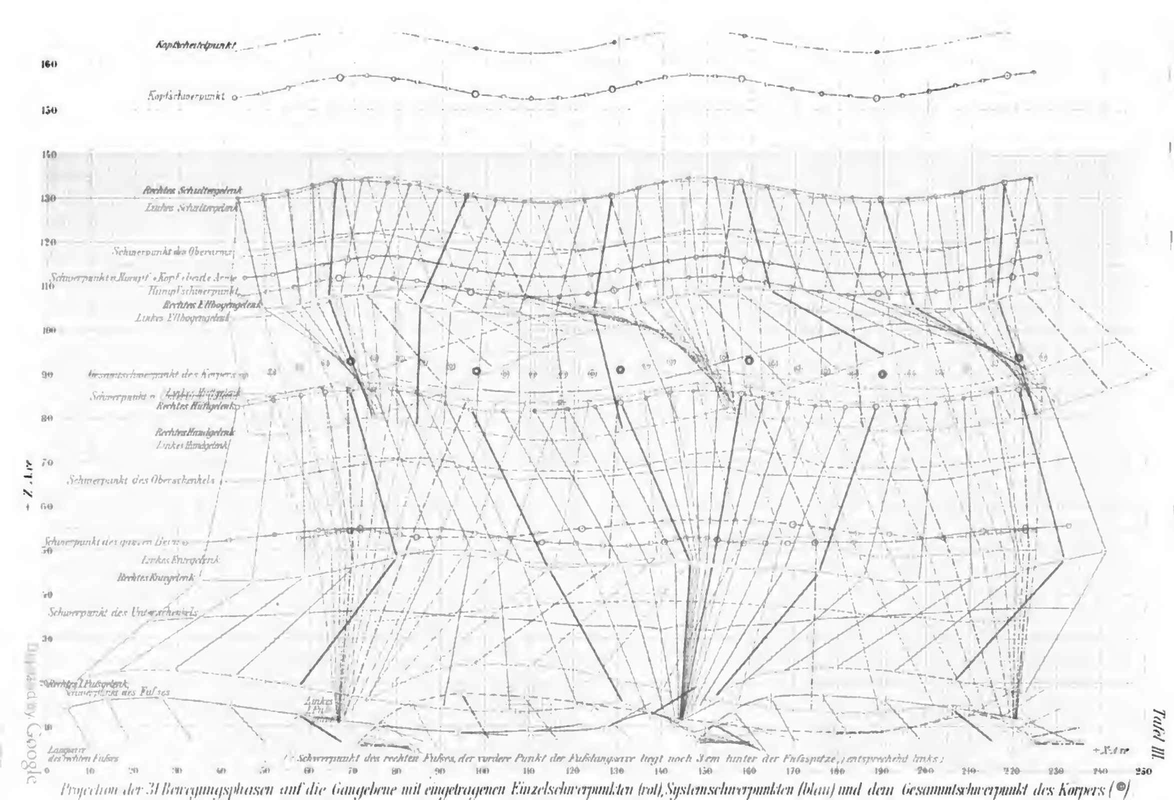
Gelenkmechanismus, welcher den Gesammtschwerpunkt und die Schwerpunkte verschiedener Abschnitte des menschlichen Körpers selbstthätig angiebt.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.



Construction des Gesamtschwerpunktes des menschlichen Körpers mit Hülfe der Hauptstrecken in natürlicher Grösse. (Bewegungsphase N° 11 des I. Versuchs.)


Kopf: Schwerpunkt
Linkes Schultergelenk
Rechtes Schultergelenk
Schwerpunkt des Oberarms
Schwerpunkt d. Rumpf + Kopf + beide Arme
Rumpf: Schwerpunkt
Linkes Ellbogengelenk
Rechtes Ellbogengelenk
Gesammtschwerpunkt des Körpers
Schwerpunkt von Unterarm und Hand
Linkes Hüftgelenk
Rechtes Hüftgelenk
Linkes Handgelenk
Rechtes Handgelenk
Schwerpunkt des Oberschenkels
Schwerpunkt des ganzen Beins
Linkes Kniegelenk
Rechtes Kniegelenk
Schwerpunkt des Unterschenkels
Rechtes Fußgelenk
Schwerpunkt des Fußes
Längsaxe des rechten Fußes
+ Z-Axe
+ X-Axe
(*) Schwerpunkt des rechten Fußes, der vordere Punkt der Fußlängsaxe liegt noch 3 cm hinter der Fußspitze, entsprechend links.
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250



Projection der 31 Bewegungsphasen auf die Gangebene mit eingetragenen Einzelschwerpunkten (roth), Systemschwerpunkten (blau) und dem Gesammtschwerpunkt des Körpers (⊚).

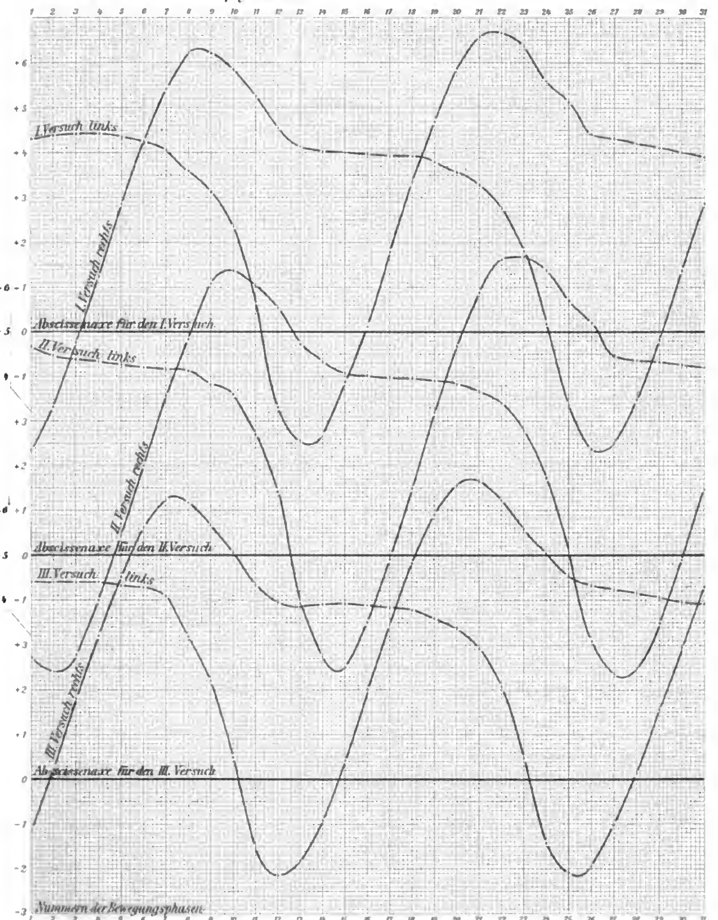
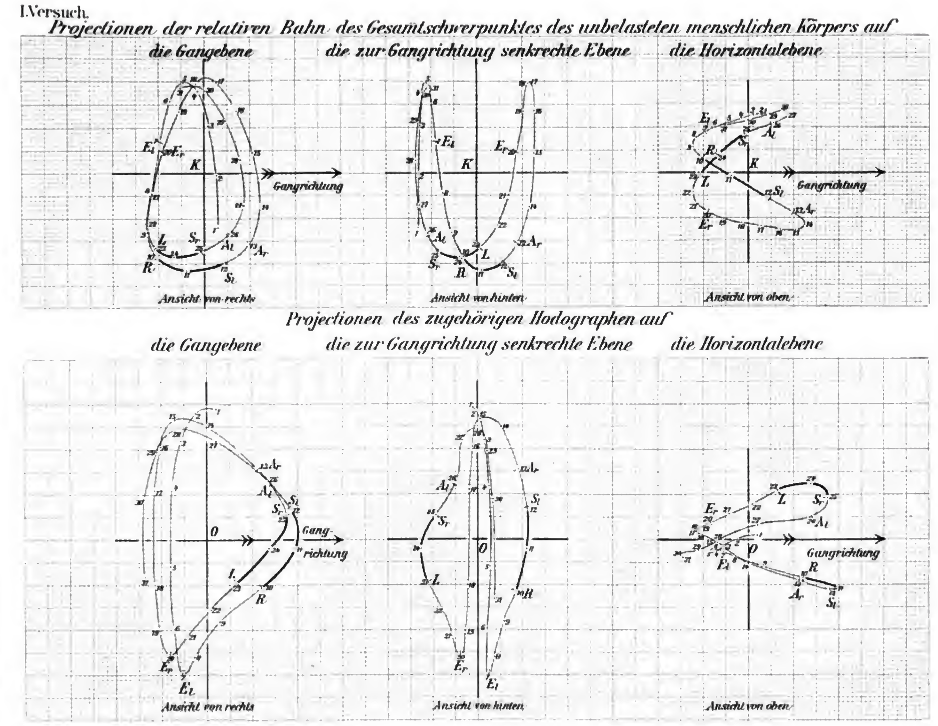
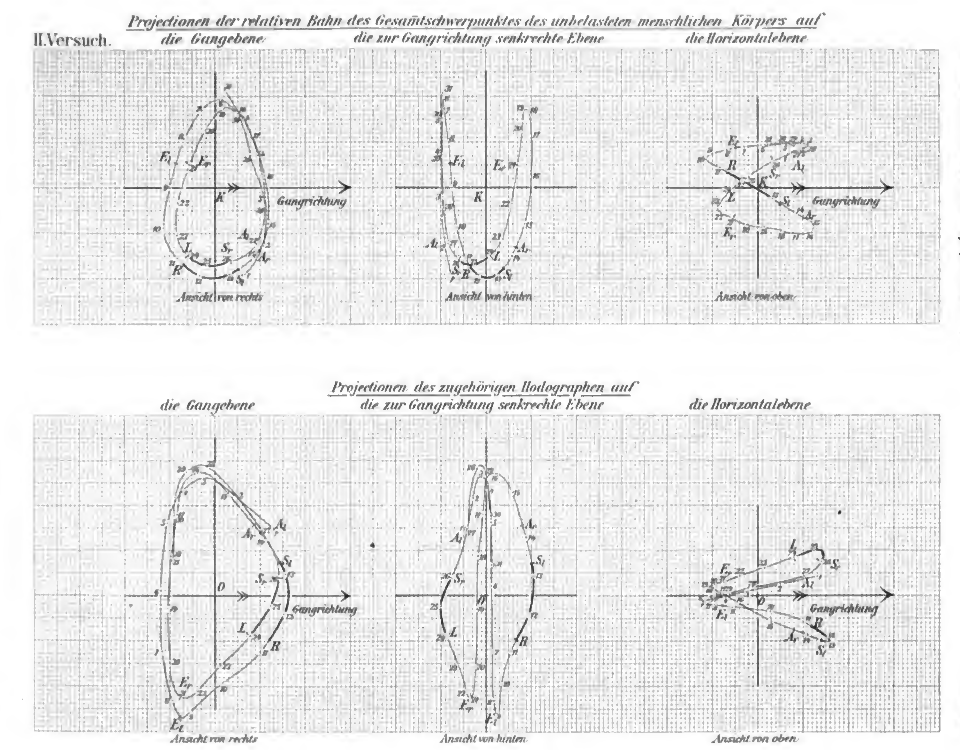
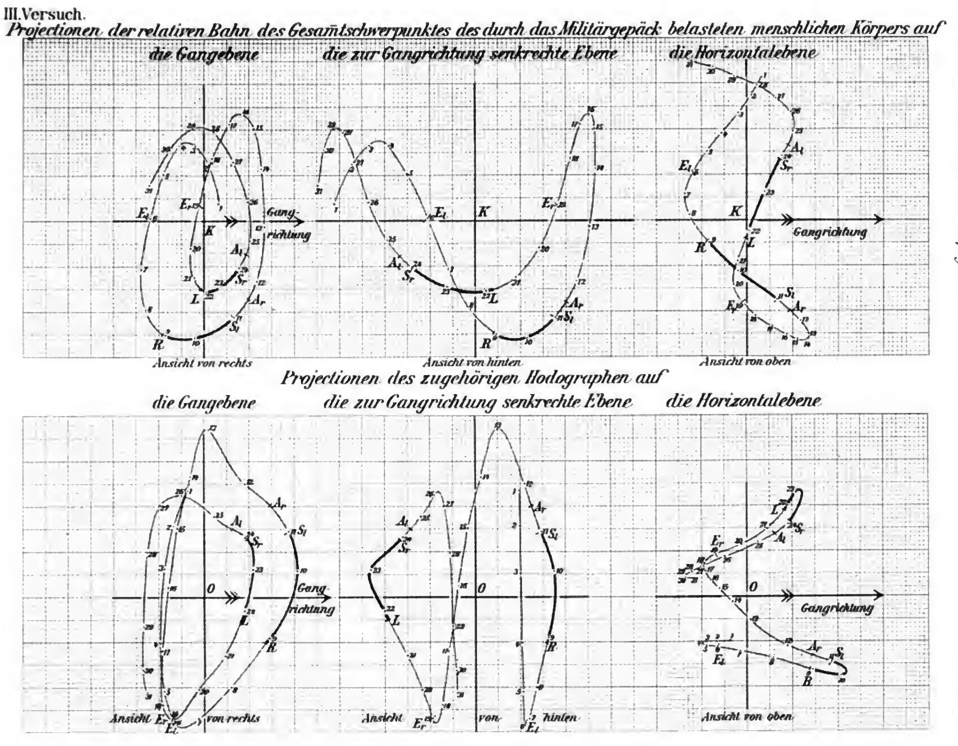


Diagramme für die Differenz der x-Coordinaten des Fusschwerpunktes und Mittelpunktes des I. Fussgelenk's.


I. Versuch.
Projectionen der relativen Bahn des Gesamtschwerpunktes des unbelasteten menschlichen Körpers auf
die Gangebene
die zur Gangrichtung senkrechte Ebene
die Horizontalebene
Gangrichtung
Ansicht von rechts
Ansicht von hinten
Ansicht von oben
Projectionen des zugehörigen Hodographen auf
die Gangebene
die zur Gangrichtung senkrechte Ebene
die Horizontalebene
Gang-richtung
Gangrichtung
Ansicht von rechts
Ansicht von hinten
Ansicht von oben


II. Versuch.
Projectionen der relativen Bahn des Gesamtschwerpunktes des unbelasteten menschlichen Körpers auf
die Gangebene
die zur Gangrichtung senkrechte Ebene
die Horizontalebene
Gangrichtung
Ansicht von rechts
Ansicht von hinten
Ansicht von oben
Projectionen des zugehörigen Hodographen auf
die Gangebene
die zur Gangrichtung senkrechte Ebene
die Horizontalebene
Gangrichtung
Ansicht von rechts
Ansicht von hinten
Ansicht von oben



Lith. Anst. v. F. A. Funke, Leipzig

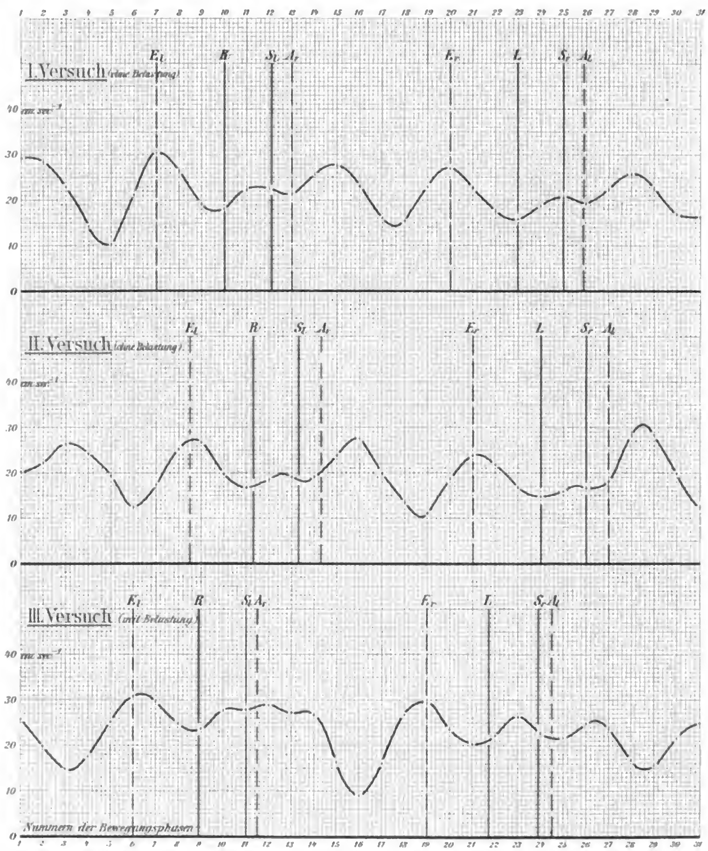


Diagramme für die absoluten Werte der Gesamtgeschwindigkeit der relativen Bewegung des Gesamtschwerpunktes.

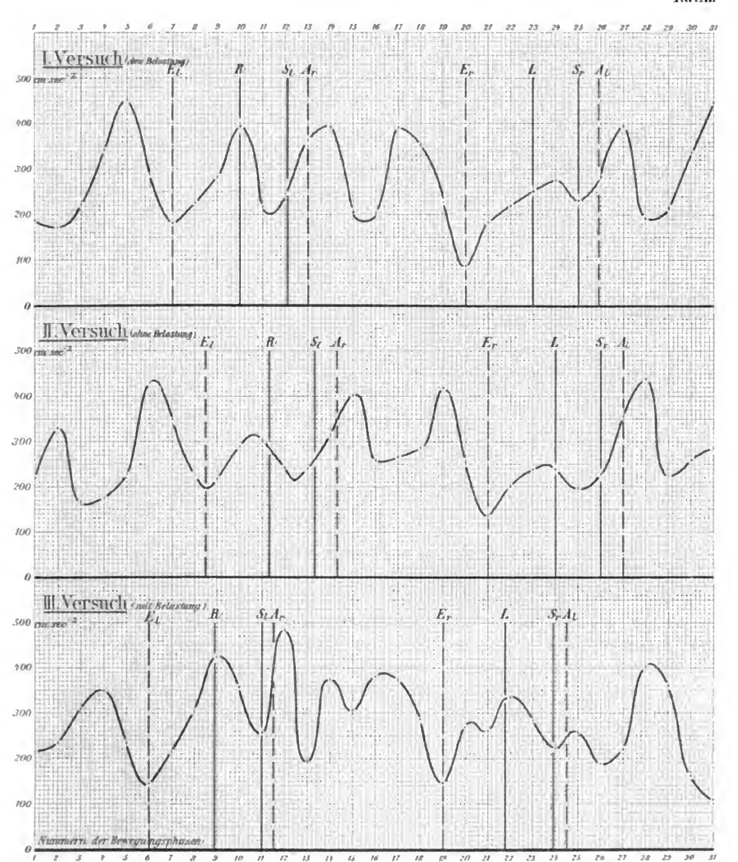


Diagramme für die absoluten Werte der Gesamtbeschleunigung der Bewegung des Gesamtschwerpunktes.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig

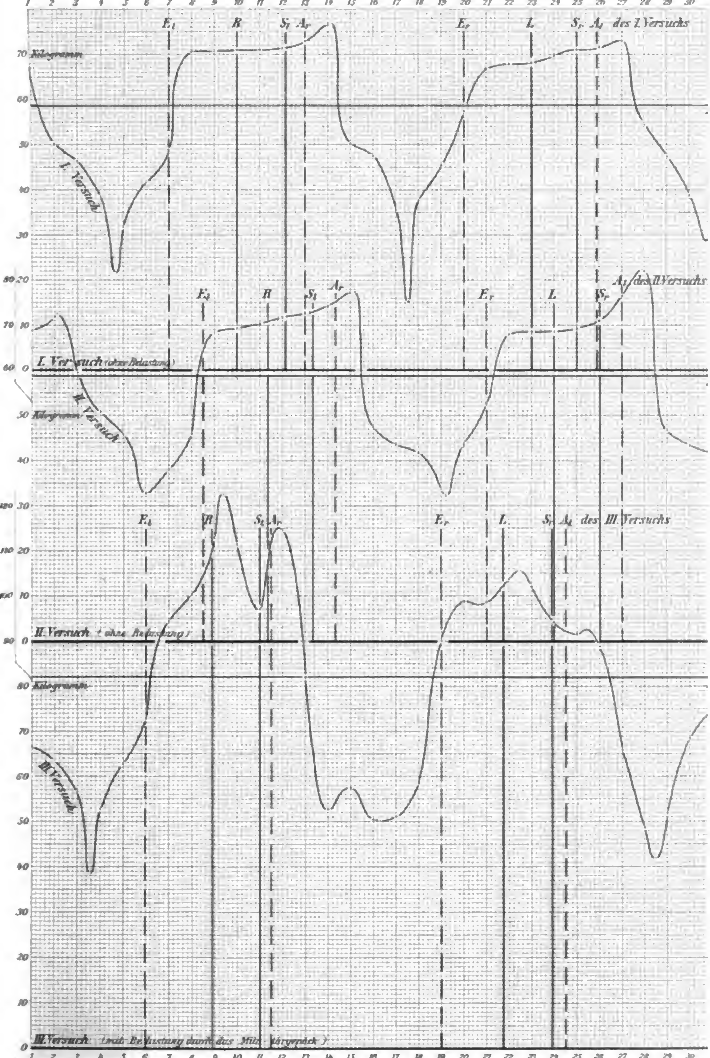


Diagramme für den normalen Druck gegen den Fufsboden in Kilogramm.

UEBER DIE

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

DER MONDBEWEGUNG

VON

W. SCHEIBNER.

Des XXV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº II.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1899.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 9. Januar 1899.
Das Manuscript eingeliefert am 13. Januar 1899.
Der Abdruck vollendet am 8. März 1899.

UEBER DIE

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

DER MONDBEWEGUNG

VON

W. SCHEIBNER.

In meiner Abhandlung *über die gestörte elliptische Bewegung und* HANSEN's *ideale Coordinaten* (Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 1. Februar 1897) habe ich betont, dass die Fortschritte der Störungstheorie in den letzten Decennien in der Praxis die auch mathematisch interessanten und von ihrem Autor glänzend erprobten HANSEN'schen Methoden noch keineswegs überflüssig gemacht haben. Ich will desshalb versuchen, die Differentialgleichungen der Mondbewegung auf Grund der von HANSEN aufgestellten Theorie kurz zu entwickeln und hoffe auch hierbei dem beifälligen Interesse der Astronomen zu begegnen. Die Bezeichnungen meiner früheren Abhandlung werde ich im Wesentlichen beibehalten und bitte den geneigten Leser darauf verweisen zu dürfen.[1])

1.

In der angeführten Abhandlung ist gezeigt, wie mittelst der HANSEN'schen Störungswerthe

$$\delta\alpha = \nu, \quad \delta\gamma = n_0 \delta z, \quad \delta q = q, \quad \delta q_1 = p, \quad \delta\omega = s, \quad \delta\Theta = \Gamma$$

und der constanten Elemente

$$\tau_0,\ e_0,\ a_0\,(n_0,\ p_0,\ \varDelta_0),\ \chi_0,\ \sigma_0\,(\varpi_0),\ \vartheta_0 \text{ und } i_0$$

der Ort des gestörten *Planeten* berechnet werden kann. Man setze

$$\gamma = n_0(\zeta - \tau_0) = n_0(t - \tau_0) + \delta\gamma = \eta - e_0 \sin\eta,$$

so wird

$$r = a_0(1 + \delta\alpha)(1 - e_0 \cos\eta) = \frac{p_0(1 + \delta\alpha)}{1 + e_0 \cos v}$$

$$v = \psi + \chi_0, \quad u = v - \sigma_0, \quad \Theta = \vartheta_0 + \delta\Theta$$

1) Ueber HANSEN's Mondtheorie, die ihr Verfasser hauptsächlich in den beiden Werken *Fundamenta nova investigationis orbitae verae quam Luna perlustrat* (1838) und *Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln* (London 1857) *angewandten Störungen* (I 1862, II 1864) veröffentlicht hat, ist bereits eine umfängliche Literatur entstanden: wir nennen nur die Namen von AIRY, CAYLEY, DELAUNAY, NEWCOMB, HILL, TISSERAND, BROWN, von denen des Letzteren ebenso interessantes wie gründliches Werk *An introductory treatise on the Lunar theory* (1890) ausgedehnte Literaturangaben enthält.

$$\cos b \cos (l - \Theta) = \cos u + \frac{\delta q_1 \, \delta \omega}{1 + \cos j}$$

$$\cos b \sin (l - \Theta) = \cos i_0 \sin u - \left\{ \operatorname{tg} i_0 + \frac{\delta q}{\cos i_0 \, (1 + \cos j)} \right\} \delta \omega$$

$$\sin b = \sin i_0 \sin u + \delta \omega$$

$$\frac{1}{1 + \cos j} = \frac{1}{\varkappa} + \frac{\delta \varkappa}{\varkappa} \cdot \frac{\delta \varkappa}{\varkappa} + \text{etc.},$$

wo

$$\varkappa = 2 \cos^2 i_0 - 2 \sin i_0 \, \delta q, \quad \delta \varkappa = \delta q^2 + \cos^2 i_0 \, \delta q_1^2.$$

Das von Hansen zwischen den Gleichungen der gestörten und der ungestörten Bewegung eingeführte intermediäre System III, welches in der Abh. S. 132 als *ideales System* bezeichnet wird, benutzt mithin die *constanten* Elemente mit der *idealen* Zeit ζ, um die Coordinaten der gestörten Bewegung mit den *variabeln* Elementen für die Zeit t zu bestimmen. Es wird also der Ort in der wahren *gestörten* Bahn zur Zeit t verglichen mit demjenigen *ungestörten* elliptischen Orte, welcher der idealen Zeit ζ entspricht, die ihrerseits so gewählt ist, dass die ideale Anomalie v in beiden Bahnen den gleichen Werth erhält.

Die Methode verliert jedoch an Zweckmässigkeit, wenn die Störungen der Elemente durch Glieder, welche der Zeit proportional sind, rasch sehr stark anwachsen. Bei der Bewegung des Mondes sind, wie bekannt, die Längen des Perigäums und des Knotens so beträchtlichen, der Zeit proportionalen Störungen unterworfen, dass die Apsidenlinie in weniger als neun Jahren einen vollen Umlauf im Sinne der Mondbewegung vollendet, während die Knotenlinie in der entgegengesetzten Richtung sich mit etwa der halben Geschwindigkeit bewegt.

Hansen hat desshalb für den Mond die Definition seines intermediären oder idealen Systems dahin modificirt, dass er dabei nicht die rein constanten Werthe der betreffenden Elemente χ_0 und ϑ_0 resp. ϖ_0 und σ_0 zu Grunde legt, sondern diesen ausdrücklich die der Zeit proportionalen Glieder hinzufügt.

2.

Die bekannten, mittelst der Methode der Variation der arbiträren Constanten für $\delta \chi'$, $\delta \sigma'$ und $\delta \vartheta'$ entwickelten Ausdrücke denken wir uns in zwei Theile

$$\delta_1 \chi' = \chi_1 \quad \text{und} \quad \delta_2 \chi' = \chi_2 \ \text{u. s. w.}$$

zerlegt, von denen der erste Theil diejenigen Glieder begreift, welche bei der Integration der Gleichung

$$\delta\chi' = \frac{\Delta}{\mu e}\left\{-\cos f\,\delta\mathbf{R} + \left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\,\delta\mathbf{S}\right\}$$

die Zeit oder die mittlere Anomalie als Factor erhalten. Dann wird

$$\chi = \chi_0 + \delta_1\chi + \delta_2\chi \quad \text{und} \quad \delta_1\chi = \int \chi_1 dt,$$

wofür HANSEN $\int y dg_0$ oder $\chi_1 = n_0 y$ schreibt. Analog bilden wir

$$\sigma = \sigma_0 + \delta_1\sigma + \delta_2\sigma, \quad \delta_1\sigma = \int \sigma_1 dt$$

und

$$\vartheta = \vartheta_0 + \delta_1\vartheta + \delta_2\vartheta, \quad \delta_1\vartheta = \int \vartheta_1 dt$$

nebst

$$\varpi = \varpi_0 + \delta_1\varpi + \delta_2\varpi = \chi - \sigma, \quad \delta_1\varpi' = \varpi_1 = \chi_1 - \sigma_1.$$

Man kann also sagen: χ_1 ist die Geschwindigkeit, mit der sich das Perigäum, und σ_1 die Geschwindigkeit, mit der sich die Knotenlinie in der Mondbahn bewegt, während ϑ_1 die Bewegungsgeschwindigkeit der Knotenlinie auf der festen Ekliptik[1]) darstellt und $\varpi_1 = \chi_1 - \sigma_1$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Abstand des Perigäums vom Knoten ändert; die Summe $\varpi_1 + \vartheta_1$ darf man folglich als die Geschwindigkeit der Bewegung des Mondperigäums auf der Ekliptik bezeichnen.

HANSEN gibt für die retrograde Bewegung des Knotens auf der Ekliptik *sehr nahe* — quam proxime, *Fundam.* p. 125/6 — den Werth $n_0(\alpha + \eta)$ und für die fortschreitende Bewegung des Mondperigäums auf der Ekliptik $n_0(y - 2\eta)$. Man erhält damit

$$\sigma_1 = -n_0(\alpha - \eta), \quad \vartheta_1 = -n_0(\alpha + \eta),$$

1) Bei der Berechnung der speciellen Störungen (vergl. Berichte vom 2. Mai 1898) ist die feste Ekliptik zu einer gegebenen Zeit t_{00} als Fundamentalebene zu Grunde gelegt worden. Diess soll auch hier geschehen: im Uebrigen darf die Wahl der xyebene willkürlich getroffen werden. In den *Fundamentis* p. 125 bemerkt HANSEN: «*Formulae evolutae monstrant, expressiones analyticas perturbationum latitudinis et reductionis longitudinis ad planum projectionis simplicissimas evadere, si planum hoc eligatur* p l a n u m i n v a r i a b i l e, *pro quo in theoria Lunae planum eclipticae habendum est. Quum vero in astronomia practica . . computationes omnes ope ascensionum rectarum declinationumque Lunae absolvantur, praestat absque ambagibus locum Lunae ad aequatorem relatum per theoriam quoque suppeditari. sicuti loca planetarum ad aequatorem relata jam edocuimus. Esto nobis igitur planum aequatoris tempori* $t = 0$ *respondens planum projectionis.*»

wo das Minuszeichen der rückläufigen Bewegung der Knotenlinie entspricht. Die genauere Bedeutung von α und η wird später entwickelt werden. Da

$$\sigma' = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{r \sin u}{\varDelta \operatorname{tg} i} \delta \mathrm{U}, \quad \vartheta' = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{r \sin u}{\varDelta \sin i} \delta \mathrm{U}$$

$$\vartheta' + \sigma' = -2 n_0 \alpha + \vartheta_2 + \sigma_2 = \frac{r \sin u}{\varDelta \operatorname{tg} \frac{1}{2} i} \delta \mathrm{U},$$

so wird die Grösse von σ_1 ϑ_1 und α durch die Kleinheit der Neigung i bedingt, während η aus der Differenz

$$\vartheta' - \sigma' = -2 n_0 \eta + \vartheta_2 - \sigma_2 = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} i}{\varDelta} r \sin u \, \delta \mathrm{U}$$

entspringt, also einen weit kleineren Werth erhält, indem in erster Approximation

$$\eta = \alpha \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} i_0 \quad \text{neben} \quad \sigma_1 = \vartheta_1 \cos i_0$$

wird. HANSEN findet $\eta = \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J$ (*Fundam.* p. 202, *Darlegung* I, S. 151), wo zu berücksichtigen, dass die Neigung J der Mondbahn gegen die ideale Sonnenbahn von der Neigung i gegen die feste Ekliptik nur um Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden ist. Uebrigens bleiben analytisch genommen $\chi_1 \sigma_1 \vartheta_1$ Grössen von der gleichen Ordnung, auch wenn wir der Bequemlichkeit halber das Zeichen δ weggelassen haben.

3.

Die eingetretenen Modificationen bedingen einen wesentlichen Unterschied gegen die früheren, für die Planetenbewegung geeigneten Formeln, denn es hören damit die Variabeln

$$\psi, \varrho, \alpha, \eta, \zeta, \gamma, s, \beta, \lambda \text{ und } \omega = \delta\omega$$

auf, ideale Coordinaten zu sein, wie schon die Gleichung

$$v' = \psi' + \chi_1$$

zeigt, aus welcher

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = v' = \frac{\varDelta}{r^2} \text{ und } \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = -\chi_1$$

folgt. Eine leichte Rechnung ergibt ferner die Werthe

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right) = -\frac{\varrho^2}{p_0} e_0 \sin \psi \chi_1, \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) = -\frac{\varrho}{p_0} \sqrt{1 - e_0^2} \chi_1$$

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) = -\frac{\varrho^2}{\varDelta_0} \chi_1, \quad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) = \frac{r}{p_0} e_0 \sin \psi \chi_1$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\sigma_1, \qquad \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right) = \sin i_0 \cos u\, \sigma_1$$

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right) = -\frac{\sin i_0 \cos u}{\cos \beta}\sigma_1, \qquad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right) = \vartheta_1 - \frac{\cos i_0}{\cos^2 \beta}\sigma_1.$$

Man wird desshalb das ideale System jetzt zutreffender als das *intermediäre System* und die entsprechenden Coordinaten als *intermediäre* Variabeln zu bezeichnen haben, die ideale Anomalie v natürlich ausgenommen, welche ungeändert bleibt, während die Zeit ζ intermediär wird.

Das intermediäre System nimmt hiernach für den Mond die Gestalt an:

$$\begin{aligned}
&\gamma = n_0(\zeta - \tau_0) = \eta - e_0 \sin \eta \\
&\varrho = a_0(1 - e_0 \cos \eta) = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos \psi} \\
&v = \psi + \chi_0 + \delta_1 \chi, \qquad u = v - \sigma_0 - \delta_1 \sigma \qquad\qquad \text{III*} \\
&\cos \beta \cos(\lambda - \vartheta_0 - \delta_1 \vartheta) = \cos u \\
&\cos \beta \sin(\lambda - \vartheta_0 - \delta_1 \vartheta) = \cos i_0 \sin u \\
&\sin \beta = \sin i_0 \sin u
\end{aligned}$$

neben

$$\sin b = \sin i \sin u, \qquad \delta \omega = \sin b - \sin \beta.$$

Die ideale Bahnebene, in welcher die osculirende Mondellipse liegt, hat die Gleichung

$$(x \sin \vartheta - y \cos \vartheta) \sin i + z \cos i = 0,$$

also ungestört

$$(x \sin \vartheta_0 - y \cos \vartheta_0) \sin i_0 + z \cos i_0 = 0,$$

während die Bahn der intermediären Ellipse durch

$$\{x \sin(\vartheta_0 + \delta_1 \vartheta) - y \cos(\vartheta_0 + \delta_1 \vartheta)\} \sin i_0 + z \cos i_0 = 0$$

bestimmt ist. Diese Ebene dreht sich folglich bei unveränderter Neigung i_0 mit der Geschwindigkeit ϑ_1 um die $z$axe.

Es ist nun leicht, die Differentialgleichungen für die Störungen $\delta\gamma$ und $\delta\alpha$ aufzustellen, denn da jetzt

$$v' = \frac{d\psi}{d\zeta}\zeta' + \chi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \text{wo} \quad \frac{d\psi}{d\zeta} = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \frac{\varDelta_0}{\varrho^2},$$

so folgt nicht allein

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\varDelta}{\varDelta_0}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2,$$

sondern auch

$$\zeta' = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) = 1 + \delta \zeta' = \frac{\varrho^2}{\varDelta_0}\left(\frac{\varDelta}{r^2} - \chi_1\right)$$

oder

$$\delta\zeta' = \delta\Lambda + \frac{\Delta}{\Delta_0}\left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

wenn nach Analogie der Abh. S. 150

$$\begin{aligned}\delta\Lambda &= -1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} + 2\frac{\Delta}{\Delta_0}\frac{1}{\alpha} - \frac{\varrho^2}{\Delta_0}\chi_1 \\ &= -1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} + \frac{2\mu\varrho}{\Delta\Delta_0}(1 + e\cos f) - \frac{\varrho^2}{\Delta_0}\chi_1\end{aligned}$$

geschrieben wird.

4.

Da jetzt

$$f = \psi - \delta_2\chi,$$

so hat man

$$\delta L = -1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} + \frac{2\mu r_0}{\Delta\Delta_0}\left[1 + e\cos\left(f_0 - \delta_2\chi\right)\right] - \frac{r_0^2}{\Delta_0}\chi_1$$

einzuführen, wenn δL, abgesehen von den Elementen $\Delta\, e$ und $\delta_2\chi$ und der Grösse χ_1 [1]) von r_0 und f_0, d. h. von g_0, ebenso abhängen soll, wie $\delta\Lambda$ von ϱ und ψ, resp. von γ. Mithin wird nach dem TAYLOR'schen Satze

$$\begin{aligned}\delta\Lambda &= \delta L + \delta\gamma\frac{\partial\delta L}{\partial g_0} + \tfrac{1}{2}\delta\gamma^2\frac{\partial^2\delta L}{\partial g_0^2} + \cdots \\ \delta\gamma' &= n_0\left\{\delta L + \delta\gamma\frac{\partial\delta L}{\partial g_0} + \tfrac{1}{2}\delta\gamma^2\frac{\partial^2\delta L}{\partial g_0^2}\cdots + \frac{\Delta}{\Delta_0}\left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

Der Werth von $\delta\alpha'$ ergibt sich, wie Abh. S. 155, am einfachsten durch Bildung des Differentialquotienten $\frac{\partial\delta\Lambda}{\partial\xi}$. Man erhält

$$\frac{\partial\delta\Lambda}{\partial\xi} = -2\frac{\Delta}{\Delta_0}\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} - 2\frac{\varrho}{\Delta_0}\chi_1\frac{\partial\varrho}{\partial\xi},$$

wo

$$\frac{\Delta}{\Delta_0}\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} = \frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} = \alpha' - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right),$$

folglich

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta\Lambda}{\partial\xi} &= -2\left\{\delta\alpha' - \frac{r}{p_0}e_0\sin\psi\chi_1 + \frac{\varrho}{p_0}e_0\sin\psi\chi_1\right\} \\ \delta\alpha' &= -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\delta\Lambda}{\partial\xi} + \frac{\varrho}{p_0}e_0\sin\psi\chi_1\delta\alpha \\ &= -\frac{n_0}{2}\left\{\frac{\partial\delta L}{\partial g_0} + \delta\gamma\frac{\partial^2\delta L}{\partial g_0^2} + \tfrac{1}{2}\delta\gamma^2\frac{\partial^3\delta L}{\partial g_0^3}\cdots - \frac{2\varrho}{n_0 p_0}e_0\sin\psi\chi_1\delta\alpha\right\}.\end{aligned}$$

---

1) Zwar sind χ_1 und χ_2 so wenig wie χ' Elemente, χ_1 soll aber beim Uebergang von Λ zu L unverändert bleiben. Bei der Bildung des Integrals $\delta L = \int\left(\frac{\partial\delta L}{\partial t}\right)\overline{dt}$ ist dieser Umstand in Betracht zu ziehen. Uebrigens werden bei der Mondbewegung in erster Approximation $\chi_1\sigma_1\vartheta_1$ Constanten.

Das letzte Glied innerhalb der Parenthese kann auch auf die Form gebracht werden

$$\frac{2\varrho}{n_0 p_0} e_0 \sin\psi \chi_1 \delta\alpha = \frac{1}{\Delta_0}\frac{\partial \varrho^2}{\partial \gamma}\chi_1\delta\alpha$$

$$= \frac{1}{\Delta_0}\left\{\frac{\partial r_0^2}{\partial g_0} + \frac{\partial^2 r_0^2}{\partial g_0^2}\delta\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 r_0^2}{\partial g_0^3}\delta\gamma^2 \cdots\right\}\chi_1\delta\alpha,$$

würde also einer Verringerung von δL um $\frac{r_0^2}{\Delta_0}\chi_1\delta\alpha$ entsprechen.

Die Bildung der Differentialquotienten von δL nach g_0 erfolgt auch ohne Reihenentwickelung ohne Schwierigkeit, und zwar erhält man jetzt

$$\frac{\partial \delta L}{\partial g_0} = \frac{2\Delta_0}{\Delta(1-e_0^2)^{3/2}}\{e_0\sin f_0 - e\sin(f_0-\delta_2\chi) + ee_0\sin\delta_2\chi\} - \frac{2e_0}{n_0 p_0} r_0 \sin f_0 \chi_1$$

$$\frac{\partial^2 \delta L}{\partial g_0^2} = \frac{2\Delta_0}{\Delta(1-e_0^2)}\left(\frac{a_0}{r}\right)^2\{e_0\cos f_0 - e\cos(f_0-\delta_2\chi)\} - \frac{2e_0}{n_0(1-e_0^2)^{3/2}}(\cos f_0 + e_0)\chi_1$$

u. s. w.,

während die Gleichung

$$r' = \alpha\varrho' + \varrho\alpha' \quad \text{oder} \quad \alpha' = \frac{r'}{\varrho} - \frac{r}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{d\zeta}\zeta'$$

den Werth liefert

$$\delta\alpha' = \frac{\mu}{\Delta p_0}\{e\sin(\psi-\delta_2\chi) - e_0\sin\psi - ee_0\sin\delta_2\chi\} + \frac{r}{p_0} e_0 \sin\psi\chi_1.$$

Ein weiterer Ausdruck für $\frac{\partial \delta L}{\partial g_0}$ ergibt sich durch directe Differentiation wie folgt:

$$\frac{\partial \delta L}{\partial t} = \frac{r_0'}{r_0}\left\{\delta L + 1 + \frac{\Delta}{\Delta_0} - \frac{r_0^2\chi_1}{\Delta_0}\right\} - \frac{2\mu}{\Delta r_0} e\sin(f_0 - \delta_2\chi),$$

von welcher Gleichung wir bald Gebrauch machen werden.

5.

Bevor wir uns zum Ausdrucke von $\left(\frac{\partial \delta L}{\partial t}\right)$ wenden, untersuchen wir die beiden Hauptformen der *charakteristischen Function* δL nach Analogie von Art. 29 der Abh. S. 151 f. Zunächst erhält man durch Einführung der Hansen'schen *unabhängigen Elemente* $\delta\Xi\,\delta\Upsilon\,\delta\Psi$:

$$\delta L = \delta\Xi + \left(\frac{r_0}{a_0}\cos f_0 + \frac{3}{2}e_0\right)\delta\Upsilon + \frac{r_0}{a_0}\sin f_0\delta\Psi - \frac{r_0^2}{\Delta_0}\chi_1$$

$$\delta\Xi = -\frac{\Delta_0}{\Delta}\left\{\left(3 + \frac{\delta\Delta}{\Delta_0}\right)\frac{\delta\Delta}{\Delta_0} + \frac{3e_0}{1-e_0^2}(e\cos\delta_2\chi - e_0)\right\}$$

$$\delta\Upsilon = \frac{2\Delta_0}{\Delta(1-e_0^2)}(e\cos\delta_2\chi - e_0)$$

$$\delta\Psi = \frac{2\Delta_0}{\Delta(1-e_0^2)} e\sin\delta_2\chi,$$

und für

$$\Phi = 1 + \delta\Phi = 2\frac{\Delta_0}{\Delta} - \frac{\Delta}{\Delta_0},$$

$$\delta\Phi = \delta\Xi + \tfrac{3}{2}e_0\delta\Upsilon = -\left(3 + \frac{\delta\Delta}{\Delta_0}\right)\frac{\delta\Delta}{\Delta}$$

nebst

$$\delta\Xi = -\tfrac{3}{2}\frac{\delta a}{a} + \left(\delta\Xi + \tfrac{1}{2}\frac{\delta\Delta}{\Delta}\right)\frac{\delta\Delta}{\Delta} + \tfrac{3}{8}(1 - e_0^2)(\delta\Upsilon^2 + \delta\Psi^2).\ ^{1)}$$

Andererseits folgt wegen

$$f_0 - \delta_2\chi = f - \delta v + \delta_1\chi, \quad e\cos f = \frac{p}{r} - 1, \quad e\sin f = \frac{\Delta r'}{\mu}.$$

$$\delta L = -1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} + \frac{2\mu r_0}{\Delta\Delta_0}\{1 + e\cos f\cos(\delta v - \delta_1\chi) + e\sin f\sin(\delta v - \delta_1\chi)\} - \frac{r_0^2}{\Delta_0}\chi_1$$

$$= -1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} + \frac{2r_0}{\Delta_0}\left\{\frac{\mu}{\Delta} + \left(\frac{\Delta}{r} - \frac{\mu}{\Delta}\right)\cos(\delta v - \delta_1\chi) + r'\sin(\delta v - \delta_1\chi)\right\} - \frac{r_0^2}{\Delta_0}\chi_1$$

und wenn man hier die Differentiation nach den variabeln Elementen ausführt, da r und r_0 sowie $\delta v = v - v_0$ ideale Coordinaten sind:

$$\left(\frac{\partial\delta L}{\partial t}\right) = \frac{\Delta'}{\Delta_0}\left\{-1 - \frac{2r_0}{p} + 2r_0\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{p}\right)\cos(\delta v - \delta_1\chi)\right\} + \frac{2r_0}{\Delta_0}\left(\frac{\partial r'}{\partial t}\right)\sin(\delta v - \delta_1\chi)$$

$$+ \frac{2r_0}{\Delta_0}\chi_1\left\{\left(\frac{\Delta}{r} - \frac{\mu}{\Delta}\right)\sin(\delta v - \delta_1\chi) - r'\cos(\delta v - \delta_1\chi)\right\} - \frac{r_0^2}{\Delta_0}\chi_1',$$

folglich wegen

$$\Delta' = r\delta\mathbf{S}, \quad \left(\frac{\partial r'}{\partial t}\right) = \delta\mathbf{R}, \quad \delta v - \delta_1\chi = \psi - f_0$$

$$\left(\frac{\partial\delta L}{\partial t}\right) = \frac{2r_0}{\Delta_0}\left\{\sin(\psi - f_0)\delta\mathbf{R} + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\cos(\psi - f_0)\delta\mathbf{S} - \frac{r}{p}\left(1 + \frac{p}{2r_0}\right)\delta\mathbf{S}\right\}$$

$$- \frac{2\mu r_0}{\Delta_0\Delta}e\sin(f_0 - \delta_2\chi)\chi_1 - \frac{r_0^2}{\Delta_0}\frac{d\chi_1}{dt}.$$

Um hier $e\sin(f_0 - \delta_2\chi)$ zu eliminiren, benutzen wir die vorhin entwickelte Gleichung

$$\frac{\partial\delta L}{\partial t} = \frac{\mu e_0\sin f_0}{\Delta_0 r_0}\left(\delta L + 1 + \frac{\Delta}{\Delta_0} - \frac{r_0^2}{\Delta_0}\chi_1\right) - \frac{2\mu}{\Delta r_0}e\sin(f_0 - \delta_2\chi)$$

und erhalten

$$\left(\frac{\partial\delta L}{dt}\right) = \frac{2r_0}{\Delta_0}\left\{\sin(\psi - f_0)\delta\mathbf{R} + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\cos(\psi - f_0)\delta\mathbf{S} - \frac{r}{p}\left(1 + \frac{p}{2r_0}\right)\delta\mathbf{S}\right\}$$

$$+ \chi_1\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - e_0^2}}\left(\frac{r_0}{a_0}\right)^2\frac{\partial\delta L}{\partial g_0} - \frac{r_0 e_0\sin f_0}{p_0}\left(\delta L + 1 + \frac{\Delta}{\Delta_0} - \frac{r_0^2}{\Delta_0}\chi_1\right)\right\} - \frac{r_0^2}{\Delta_0}\chi_1'$$

nebst

1) Vergl. Hansen, Störungen der kleinen Planeten III, S. 96 und Darlegung der Mondstörungen I, S. 376.

$$\delta L = \int' \left(\frac{\partial \delta L}{\partial t}\right) dt,$$

wo der Strich anzeigt, dass bei der Integration r_0 und f_0 als constant betrachtet werden sollen.

Hiermit ist die Reduction der *charakteristischen Function* δL auf die störenden Kräfte, resp. deren Componenten $\delta \mathsf{R}$ und $\delta \mathsf{S}$ vollendet. Zur Vergleichung mit HANSEN's Formeln bemerke ich noch, dass von ihm W an Stelle von $\delta L + \frac{r_0^2}{\varDelta_0} \chi_1$ geschrieben wird.

6.

Dem Integrale $\int' \left(\frac{\partial \delta L}{\partial t}\right) dt$ wird den Erörterungen des Art. 10 der Abh. zufolge eine Function der bei der Integration als constant betrachteten Grössen, also hier von r_0 und f_0 oder von g_0 hinzuzufügen sein. Vermöge der Form

$$\delta L = \int' \delta \Phi' dt + \frac{r_0 \cos f_0}{a_0} \int' \delta \Gamma' dt + \frac{r_0 \sin f_0}{a_0} \int' \delta \Psi' dt - \frac{r_0^2}{\varDelta_0} \chi_1$$

ergibt sich für diese Function der Ausdruck

$$\delta_0 \Phi + \frac{r_0}{a_0} \cos f_0 \delta_0 \Gamma + \frac{r_0}{a_0} \sin f_0 \delta_0 \Psi,$$

wenn die constanten Factoren $\delta_0 \Phi$, $\delta_0 \Gamma$ und $\delta_0 \Psi$ die willkürlichen Integrationsconstanten der betreffenden Integrale bezeichnen. Selbstverständlich wird der Werth dieser Constanten vom Integrationsbereiche abhängen, und es ist bereits S. 148 f. der Abh. hervorgehoben worden, dass der Umfang oder die Art der auszuführenden Integration sich nach den begleitenden Umständen, insbesondere auch nach der Wahl der constanten Elemente zu richten habe. Wenn für $t = t_0$ sämmtliche Störungen verschwinden sollen, so bezeichnen a_0, e_0 ... die Werthe der gleichzeitigen osculirenden Elemente, und die Integrationen sind einfach zwischen t_0 und t auszuführen. Dadurch würden aber bei Ermittelung der absoluten Störungen nicht allein die Störungswerthe, sondern auch die Werthe der Integrationsconstanten in Form unendlicher Reihen auftreten. Man zieht desshalb in der Regel vor, durch Einführung der sogenannten *mittleren* Werthe die constanten Elemente nebst den übrigen Integrationsconstanten so zu bestimmen, dass dadurch nicht sowohl die zu einer gegebenen Anfangszeit t_0 wirklich stattfindenden Werthe dieser Grössen ausgedrückt werden, sondern vielmehr diejenigen

Beträge, welche als Constanten übrig bleiben, wenn man bei einer Entwickelung in trigonometrische oder ähnliche Reihen von den rein periodischen Gliedern abstrahirt. Natürlich ist dabei wesentlich auf die mathematischen Eigenschaften der betreffenden Entwickelungen Rücksicht zu nehmen. Wir erinnern in dieser Beziehung an die lehrreiche Abhandlung Hansen's *über die Anwendung osculirender Elemente als Grundlage der Berechnung der Störungen eines Planeten, und über die unabhängigen Elemente der „Fundamenta“* in Nr. 423—25 der Astronom. Nachrichten (Mai 1841).

Wir wollen noch die Werthe der Differentialquotienten $\delta\Phi'$ $\delta\Upsilon'$ u. $\delta\Psi'$ durch die störenden Kräfte ausdrücken. Man erhält dafür

$$\delta\Phi' = -\left(\frac{\varDelta}{\varDelta_0} + 2\frac{\varDelta_0}{\varDelta}\right)\frac{\varDelta'}{\varDelta} = -\frac{r}{\varDelta_0}\left(1 + \frac{2p_0}{p}\right)\delta\mathsf{S}$$

$$\delta\Upsilon' = \frac{2\varDelta_0}{\varDelta(1-e_0^2)}\left\{(e_0 - e\cos\delta_2\chi)\frac{\varDelta'}{\varDelta} + e'\cos\delta_2\chi - e(\chi' - \chi_1)\sin\delta_2\chi\right\}$$

$$= \frac{2a_0}{\varDelta_0}\left\{\sin\psi\delta\mathsf{R} + \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right)\cos\psi + \frac{re_0}{p}\right]\delta\mathsf{S} + \frac{\mu}{\varDelta}e\chi_1\sin\delta_2\chi\right\}$$

$$\delta\Psi' = \frac{2\varDelta_0}{\varDelta(1-e_0^2)}\left\{-e\sin\delta_2\chi\frac{\varDelta'}{\varDelta} + e'\sin\delta_2\chi + e(\chi' - \chi_1)\cos\delta_2\chi\right\}$$

$$= \frac{2a_0}{\varDelta_0}\left\{-\cos\psi\delta\mathsf{R} + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin\psi\delta\mathsf{S} - \frac{\mu}{\varDelta}e\chi_1\cos\delta_2\chi\right\}$$

und damit wie oben:

$$\delta L = -\frac{r_0^2}{\varDelta_0}\chi_1 + \int\frac{2\bar r_0}{\varDelta_0}\left\{\sin(\psi - \bar f_0)\delta\mathsf{R} + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\cos(\psi - \bar f_0)\delta\mathsf{S} - \right.$$
$$\left. - \frac{r}{p}\left(1 + \frac{p}{2r_0}\right)\delta\mathsf{S} - \frac{\mu}{\varDelta}e\chi_1\sin(\bar f_0 - \delta_2\chi)\right\}\overline{dt}.$$

7.

Indem wir uns nunmehr zu den die Lage der Bahn bedingenden Störungen wenden, haben wir uns der von Hansen gelehrten Transformation (Abh. Art. 23 u. 24) zu erinnern, vermöge deren

$$\cos b\cos(l - \Theta) = \cos u + \frac{\delta q_1\,\delta\omega}{1 + \cos j}$$

$$\cos b\sin(l - \Theta) = \cos i_0\sin u - \left(\operatorname{tg} i_0 + \frac{\delta q}{\cos i_0(1 + \cos j)}\right)\delta\omega$$

$$\sin b = \sin i_0\sin u + \delta\omega$$

wird. Auch hier müssen ϑ_0 und σ_0 um $\delta_1\vartheta$ und $\delta_1\sigma$ geändert werden.

Betrachten wir zuerst die intermediäre Coordinate

$$\delta\omega = \sin b - \sin\beta = \sin i \sin u - \sin i_0 \sin u$$

nebst den beiden Elementen

$$q = \sin i \cos \delta_2\sigma, \quad \delta q = \sin i \cos \delta_2\sigma - \sin i_0$$
$$q_1 = \sin i \sin \delta_2\sigma = \delta q_1,$$

so wird wie Abh. S. 135, da jetzt $u = u - \delta_2\sigma$,

$$\sin b = q \sin u - q_1 \cos u, \quad \delta\omega = \delta q \sin u - \delta q_1 \cos u.$$

Da ferner

$$q' = \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right) = i' \cos i \cos \delta_2\sigma - \sigma_2 \sin i \sin \delta_2\sigma$$

$$q_1' = \left(\frac{\partial q_1}{\partial t}\right) = i' \cos i \sin \delta_2\sigma + \sigma_2 \sin i \cos \delta_2\sigma$$

$$i' = \frac{r \cos u}{\Delta} \delta \mathsf{U}, \quad \sigma' = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{r \sin u}{\Delta \operatorname{tg} i} \delta \mathsf{U},$$

so folgt nicht allein

$$\delta q = \int dt \left\{ \frac{r \cos i}{\Delta} \cos u \, \delta \mathsf{U} + \sigma_1 q_1 \right\}$$
$$\delta q_1 = \int dt \left\{ \frac{r \cos i}{\Delta} \sin u \, \delta \mathsf{U} - \sigma_1 q \right\},$$

sondern auch

$$\delta\omega = \int \overline{dt} \left\{ \frac{r \cos i}{\Delta} \sin(\bar{u} - u) \, \delta \mathsf{U} + \sigma_1 (q \cos \bar{u} + q_1 \sin u) \right\},$$

wenn bei der Integration $\bar{u}$ als constant betrachtet wird.

Da jetzt

$$u = \psi + \varpi_0 + \delta_1\varpi$$

von dem Störungswerth $\delta_1\varpi = \delta_1\chi - \delta_1\sigma$ abhängt, so empfiehlt sich zur Vereinfachung der Integrale die Einführung der neuen Elemente (vergl. S. 159 der Abh.)

$$\delta Q = \sin i \cos(\varpi_0 + \delta_1\varpi - \delta_2\sigma) - \sin i_0 \cos(\varpi_0 + \delta_1\varpi)$$
$$\delta Q_1 = -\sin i \sin(\varpi_0 + \delta_1\varpi - \delta_2\sigma) + \sin i_0 \sin(\varpi_0 + \delta_1\varpi)$$

an Stelle von

$$\delta q = \cos(\varpi_0 + \delta_1\varpi)\,\delta Q - \sin(\varpi_0 + \delta_1\varpi)\,\delta Q_1$$
$$\delta q_1 = \sin(\varpi_0 + \delta_1\varpi)\,\delta Q + \cos(\varpi_0 + \delta_1\varpi)\,\delta Q_1.$$

Damit folgt

$$\delta\omega = \sin\psi\,\delta Q - \cos\psi\,\delta Q_1$$

und durch Differentiation

$$\delta Q = \int dt \left\{ \frac{r \cos i}{\varDelta} \cos \psi \, \delta \mathfrak{U} - \sigma_1 \sin i_0 \sin (\varpi_0 + \delta_1 \varpi) + \chi_1 \, \delta Q_1 \right\}$$

$$\delta Q_1 = \int dt \left\{ \frac{r \cos i}{\varDelta} \sin \psi \, \delta \mathfrak{U} - \sigma_1 \sin i_0 \cos (\varpi_0 + \delta_1 \varpi) - \chi_1 \, \delta Q \right\},$$

mithin

$$\delta \omega = \int \overline{dt} \left\{ \frac{r \cos i}{\varDelta} \sin (\overline{\psi} - \psi) \, \delta \mathfrak{U} + \sigma_1 \sin i_0 \cos (\psi + \varpi_0 + \delta_1 \varpi) + \right.$$
$$\left. + \chi_1 (\cos \overline{\psi} \, \delta Q + \sin \psi \, \delta Q_1) \right\}.$$

Nach Analogie von S. 158 der Abh. betrachten wir ferner das Product

$$\delta P = \varrho \, \delta \omega = \varrho \{ \sin \psi \, \delta Q - \cos \psi \, \delta Q_1 \}$$

und ersetzen hier ϱ und ψ durch r_0 und f_0, also γ durch g_0, während die Elemente unverändert bleiben sollen. Dann erhält man für

$$\delta R = r_0 \{ \sin f_0 \, \delta Q - \cos f_0 \, \delta Q_1 \}$$

$$\delta P = \delta R + \delta \gamma \frac{\partial \delta R}{\partial g_0} + \frac{1}{2} \delta \gamma^2 \frac{\partial^2 \delta R}{\partial g_0^2} + \cdots,$$

wo

$$\frac{\partial R}{\partial g_0} = \frac{a_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} \{ (\cos f_0 + e_0) \, \delta Q + \sin f_0 \, \delta Q_1 \}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial g_0^2} = - \left(\frac{a_0}{r_0} \right)^3 \delta R$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\delta R = \int dt \left\{ \frac{r_0 r \cos i}{\varDelta} \sin (f_0 - \psi) \, \delta \mathfrak{U} + \sigma_1 \sin i_0 r_0 \cos (f_0 + \varpi_0 + \delta_1 \varpi) + \right.$$
$$\left. + \chi_1 r_0 (\cos f_0 \, \delta Q + \sin f_0 \, \delta Q_1) \right\}.$$

Es ist wohl nicht nöthig, ausdrücklich hervorzuheben, dass auch hier die Gleichung

$$\delta R = \int \left(\frac{\partial \delta R}{\partial t} \right) \overline{dt} + r_0 \sin f_0 \, \delta_0 Q - r_0 \cos f_0 \, \delta_0 Q_1$$

mit den Integrationsconstanten $\delta_0 Q$ und $\delta_0 Q_1$ gilt, wie sich leicht direct verificiren lässt.

Es sind noch die Werthe von $\Theta = \vartheta_0 + \delta \Theta$ und j zu untersuchen. Für Letzteres bleibt die Gleichung

$$1 + \cos j = \cos i_0 (\cos i_0 + \cos i) - \sin i_0 \, \delta q$$

unverändert bestehen, während nach Art. 24 der Abhandlung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\vartheta - \Theta) = \frac{\cos \frac{1}{2} (i - i_0)}{\cos \frac{1}{2} (i + i_0)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\sigma - \sigma_0 - \delta_1 \sigma).$$

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{\vartheta' - \Theta'}{\sin (\vartheta - \Theta)} = \frac{\sigma' - \sigma_1}{\sin \delta_2 \sigma} + \frac{i' \sin i_0}{\cos i_0 + \cos i},$$

und wegen

$$(1+\cos j)\sin(\vartheta-\Theta)=(\cos i_0+\cos i)\sin\delta_2\sigma$$
$$(1+\cos j)\cos(\vartheta-\Theta)=(1+\cos i_0\cos i)\cos\delta_2\sigma-\sin i_0\sin i,$$
$$(1+\cos j)(\vartheta'-\Theta')=(\cos i_0+\cos i)(\sigma'-\sigma_1)+i'\sin i_0\sin\delta_2\sigma.$$

Die Substitution der Werthe von ϑ' σ' i' und $\cos j$ ergibt hieraus

$$\delta\Theta'=\frac{r\delta\omega}{\varDelta(1+\cos j)}\delta\mathsf{U}+\frac{\sigma_1}{\cos i_0}+\frac{\operatorname{tg} i_0}{1+\cos j}\sigma_1\delta q.$$

Vermöge der Relation $d\sigma=\cos i\,d\vartheta$ wird demnach in erster Approximation

$$\frac{\sigma_1}{\cos i_0}=\vartheta_1,\quad \Theta=\vartheta_0+\delta_1\vartheta,$$

wenn die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt werden.

8.

Es handelt sich jetzt um die Entwickelung der Werthe, welche die Componenten der störenden Kräfte $\delta\mathsf{R}$ $\delta\mathsf{S}$ und $\delta\mathsf{U}$ für die Mondbewegung annehmen. Wir beschränken uns zunächst auf die störende Einwirkung der Sonne, indem wir die Massen von Mond, Erde und Sonne durch $m\,m_1\,m_2$ bezeichnen und

$$\mu=k^2(m+m_1),\quad \delta\mu=k^2m_2$$

setzen. Seien ferner, entsprechend meiner Abhandlung *über* HANSEN's *Verfahren zur Berechnung der speciellen Störungen* (Berichte der math.-phys. Classe der K. Sächs. Gesellschaft d. Wiss. vom 2. Mai 1898), deren Bezeichnungen wir uns hier anschliessen wollen, xyz und $x_1y_1z_1$ die relativen Coordinaten von Mond und Sonne in Bezug auf die Erde, r_1 und r_2 die Entfernungen zwischen Erde resp. Mond einerseits, und der Sonne andererseits, so wie

$$R_1=\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{r_1^3},\ \text{ wo }\ r_2^2=r^2+r_1^2-2rr_1\cos rr_1,$$

dann gelten die Differentialgleichungen

$$x''+\frac{\mu x}{r^3}=\delta\mu\left(R_1x_1-\frac{x}{r_2^3}\right)=\delta\mathsf{X}$$
$$y''+\frac{\mu y}{r^3}=\delta\mu\left(R_1y_1-\frac{y}{r_2^3}\right)=\delta\mathsf{Y}$$
$$z''+\frac{\mu z}{r^3}=\delta\mu\left(R_1z_1-\frac{z}{r_2^3}\right)=\delta\mathsf{Z}.$$

so dass bei Einführung der Störungsfunction

$$\Omega = \frac{1}{r_2} - \frac{r \cos rr_1}{r_1 r_1}$$

$$\delta \mathsf{X} = \delta\mu \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \delta \mathsf{Y} = \delta\mu \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \delta \mathsf{Z} = \delta\mu \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

geschrieben werden kann. Setzt man der Kürze halber

$$\cos rr_1 = H, \quad \text{wodurch} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial H} = rr_1 R_1,$$

und entwickelt nach den Potenzen von $\frac{r}{r_1}$, so erhält man bekanntlich

$$\Omega = \frac{1}{r_1} + \frac{r^2}{r_1^3}\left(\tfrac{3}{2} H^2 - \tfrac{1}{2}\right) + \frac{r^3}{r_1^4}\left(\tfrac{5}{2} H^3 - \tfrac{3}{2} H\right) + \frac{r^4}{r_1^5}\left(\tfrac{35}{8} H^4 - \tfrac{15}{4} H^2 + \tfrac{3}{8}\right) \ldots$$

Hier darf man das Anfangsglied $\frac{1}{r_1}$ als von den Coordinaten xyz unabhängig weglassen.

Wie a. a. O. S. 36 bewiesen, ergeben sich für die Componenten der störenden Kräfte die Ausdrücke[1])

$$\begin{aligned}
\delta \mathsf{R} &= \delta \mathsf{X} \cos\lambda + \delta \mathsf{Y} \cos\mu + \delta \mathsf{Z} \cos\nu \\
&= \sum \frac{x}{r}\, \delta \mathsf{X} = \delta\mu \left(R_1 r_1 \cos rr_1 - \frac{r}{r_2^3}\right) \\
\delta \mathsf{S} &= \delta \mathsf{X} \cos\mathfrak{a} + \delta \mathsf{Y} \cos\mathfrak{b} + \delta \mathsf{Z} \cos\mathfrak{c} \\
&= \sum \frac{rx' - xr'}{\Delta}\, \delta \mathsf{X} = \delta\mu\, R_1 r_1 \cos Sr_1 \\
\delta \mathsf{U} &= \delta \mathsf{X} \cos\alpha + \delta \mathsf{Y} \cos\beta + \delta \mathsf{Z} \cos\gamma \\
&= \sum \frac{yz' - zy'}{\Delta}\, \delta \mathsf{X} = \delta\mu\, R_1 r_1 \cos Ur_1,
\end{aligned}$$

wenn S die Richtung der Senkrechten zum Radiusvector in der idealen Mondebene, U die Richtung senkrecht zu dieser Ebene bedeutet. Und zwar ist S im Sinne der Mondbewegung gerichtet, während U mit der *positiven* $z$axe den Winkel i bildet. Für die störende Kraft der Sonne ist mithin die Kleinheit der Störungscomponenten nicht durch die Kleinheit von $\delta\mu$, sondern durch die Grösse der Entfernungen r_1 und r_2, resp. durch die Kleinheit des Factors $R_1 r_1$ bedingt.

Ausserdem liefern die Differentialquotienten der Störungsfunction die Werthe

$$\delta \mathsf{R} = \delta\mu \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad r\,\delta \mathsf{S} = \delta\mu \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad r \sin u\, \delta \mathsf{U} = \delta\mu \frac{\partial \Omega}{\partial i},$$

1) Vergl. S. 89 f. und 112 f. der Abh. vom 1. Februar 1897.

wenn xyz durch r u und i ausgedrückt werden, wie S. 96 und 115 f. der Abh. gezeigt ist und leicht verificirt werden kann. Da

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i} = r r_1 R_1 \frac{\partial H}{\partial i}, \quad \text{so wird} \quad \frac{\partial H}{\partial i} = \sin u \cos U r_1 .$$

Bezeichnet man aber durch U_1 den Winkel, den r_1 mit der Knotenlinie der Mondbahn auf der Sonnenbahn bildet, so hat man (S. 37)

$$\cos U r_1 = -\sin J \sin U_1 ,$$

mithin auch

$$\frac{\partial H}{\partial i} = -\sin J \sin u \sin U_1$$

$$\delta \mathsf{U} = -\delta \mu \, R_1 r_1 \sin J \sin U_1 .$$

9.

Die Ausdrücke der Störungscomponenten resp. der Störungsfunction enthalten nicht allein die Coordinaten des gestörten Mondes, sondern auch die der störenden Sonne, und letztere denken wir uns durch die Formeln I der elliptischen Bewegung von den zugehörigen osculirenden Elementen abhängig. Dann kann man diese Formeln in der entsprechenden Weise auf die HANSEN'schen Störungswerthe zurückführen, indem man auch hier von dem wahren System I zu dem idealen oder intermediären System III übergeht. Mit anderen Worten, wir denken uns die Sonnenbewegung definirt durch Gleichungen von der Form

$$\gamma_s = n_{s0}(t - \tau_{s0}) + \delta\gamma_s = \eta_s - e_{s0} \sin \eta_s$$

$$r_1 = r_s = a_{s0}(1 + \delta\alpha_s)(1 - e_{s0} \cos \eta_s) = \frac{p_{s0}(1 + \delta\alpha_s)}{1 + e_{s0} \cos \psi_s}$$

$$v_s = \psi_s + \chi_{s0} + \delta_1\chi_s , \quad u_s = v_s - \sigma_{s0} , \quad \Theta_s = \vartheta_{s0} + \delta\Theta_s$$

$$\cos b_s \cos (l_s - \Theta_s) = \cos u_s + \frac{\delta q_{s1} \, \delta\omega_s}{1 + \cos j_s}$$

$$\cos b_s \sin (l_s - \Theta_s) = \cos i_{s0} \sin u_s - \left\{ \operatorname{tg} i_{s0} + \frac{\delta q_s}{\cos i_{s0} (1 + \cos j_s)} \right\} \delta\omega_s$$

$$\sin b_s = \sin i_{s0} \sin u_s + \delta\omega_s ,$$

wo die elliptischen Elemente *constant* sein sollen, während wir über die als gegeben vorausgesetzten Störungswerthe $\delta\gamma_s$, $\delta\alpha_s$, δq_s, δq_{s1}, $\delta\omega_s$ und $\delta\Theta_s$ zunächst keine weitere Voraussetzung machen wollen, als dass sie Störungscomponenten $\delta\mathsf{R}_s$, $\delta\mathsf{S}_s$ und $\delta\mathsf{U}_s$ entsprechen. Für die *osculirenden* Werthe der Sonnenelemente gelten die Gleichungen

$$\chi_s = \chi_{s0} + \delta\chi_s, \quad \delta\chi_s = \delta_1\chi_s + \delta_2\chi_s, \quad \delta_1\chi_s' = \chi_{s1}, \quad \delta_2\chi_s' = \chi_{s2}$$
$$\delta\sigma_s = \sigma_s - \sigma_{s0}, \quad \delta_1\varpi_s = \delta_1\chi_s, \text{ u. s. w.}$$

Uebrigens darf aus der Sonnenbewegung der Werth

$$\chi_{s1} = 11'' 36$$

als bekannt angesehen werden.[1])

Hansen hat für die Berechnung der Breitenstörungen seiner Mondtafeln, in den *Fundamentis*, so wie in der späteren *Darlegung der theoretischen Berechnung* . . einen von der Darstellung der vorhergehenden Artikel etwas verschiedenen Weg eingeschlagen, bei dem drei von der Neigung zwischen der Mondbahn und der Sonnenbahn abhängige Veränderliche eingeführt werden. Er gibt selbst als Grund dafür an (S. 109 f. der *Darlegung*), dass die in den *Fundamentis* entwickelten Ausdrücke noch nicht auf die später veröffentlichte Theorie der idealen Coordinaten gegründet sind. Die oben gegebenen, dieser Theorie entsprechenden Formeln dürften sich durch ihre kurze und elegante Gestalt empfehlen. Sie beziehen sich auf die *feste* Ekliptik als Grundebene, während die Hansen'schen Variabeln durch die *veränderliche* Ekliptik oder Sonnenbahn bestimmt werden.

10.

Die betreffenden, durch Hansen in seinen *Fundamentis* p. 92 eingeführten Variabeln K P und Q hängen ihrerseits ab von den Grössen J Σ und Σ_s, welche die Neigung der Mondbahn gegen die Sonnenbahn, so wie die Abstände des aufsteigenden Knotens K der Mondbahn auf der Sonnenbahn von den idealen Axen X und X_s bezeichnen sollen. Schreibt man in beistehender Figur

$$x\Omega = \vartheta, \quad Xr = v, \quad x\Omega_s = \vartheta_s$$
$$\Omega\Pi = \varpi, \quad \Pi r = f, \quad \Omega_s\Pi_s = \varpi_s$$
$$X\Omega = \sigma, \quad \Omega r = u, \quad X_sK = \Sigma_s$$
$$X\Pi = \chi, \quad Kr = U, \quad K\Pi_s = \Pi_s$$
$$XK = \Sigma, \quad \Omega_s r_s = u_s, \quad \text{u. s. w.}$$
$$K\Pi = \Pi, \quad Kr_s = U_s,$$

und setzt

1) Nach Hansen's Mondtafeln (S. 16) hat man genauer

$$\delta_1\chi_s = 11'' 3618\,(t - 1800) + 0'' 550\left(\frac{t - 1800}{100}\right)^2.$$

$$\Pi = \chi - \Sigma, \quad U = v - \Sigma, \quad \Sigma = \Sigma_0 + \delta_1\Sigma + \delta_2\Sigma, \quad \delta_1\Sigma' = \Sigma_1,$$
$$\Pi_, = \chi_, - \Sigma_,, \quad U_, = v_, - \Sigma_,, \quad \Sigma_, = \Sigma_{,0} + \delta_1\Sigma_, + \delta_2\Sigma_,. \quad \delta_1\Sigma_,' = \Sigma_{,1},$$

so bedeuten Π und $\Pi_,$ die Abstände des Perigäums und resp. Perihels vom Knoten K, U und $U_, = U_1$ die von demselben Knoten gerechneten Argumente der Breite in beiden Bahnen, während Σ_0 und $\Sigma_{,0}$ die constanten, $\delta_1\Sigma$ und $\delta_1\Sigma_,$ die in die Zeit multiplicirten, endlich $\delta_2\Sigma$ und $\delta_2\Sigma_,$ die periodischen Theile von Σ und resp. $\Sigma_,$ ausdrücken.

Man findet leicht

$$\cos rr_1 = H = \cos^2\tfrac{1}{2}J\cos(U - U_,) + \sin^2\tfrac{1}{2}J\cos(U + U_,)$$
$$U - U_, = v - v_, - \Sigma + \Sigma_, = \psi - \psi_, + \Pi - \Pi_, - \delta_2\chi + \delta_2\chi_,$$
$$U + U_, = v + v_, - \Sigma - \Sigma_, = \psi + \psi_, + \Pi + \Pi_, - \delta_2\chi - \delta_2\chi_,.$$

Setzt man nun

$$N = \chi_0 - \chi_{,0} - \Sigma + \Sigma_, + \delta_1\Sigma - \delta_1\Sigma_, = \Pi_0 - \Pi_{,0} - \delta_2\Sigma + \delta_2\Sigma_,$$
$$N_1 = \chi_0 + \chi_{,0} - \Sigma - \Sigma_, + \delta_1\Sigma + \delta_1\Sigma_, = \Pi_0 + \Pi_{,0} - \delta_2\Sigma - \delta_2\Sigma_,,$$

so enthalten diese Grössen keine der Zeit proportionalen Glieder, und es können die von HANSEN durch

$$2\int\eta\,dg_0 = \delta_1\Sigma - \delta_1\Sigma_, \qquad \text{und} \qquad 2\int\alpha\,dg_0 = -\delta_1\Sigma - \delta_1\Sigma_,$$

oder

$$\delta_1\Sigma = -\int(\alpha - \eta)\,dg_0 \qquad \text{und} \qquad \delta_1\Sigma_, = -\int(\alpha + \eta)\,dg_0$$

bezeichneten Grössen durch obige Bedingung definirt werden. Da jetzt

$$\Sigma_1 = -n_0(\alpha - \eta) \qquad \text{und} \qquad \Sigma_{,1} = -n_0(\alpha + \eta)$$

die Geschwindigkeiten der Knotenlinie in den idealen Bahnen von Mond und Sonne ausdrücken, so ist der Unterschied von den früher eingeführten Grössen σ_1 und ϑ_1 nur dadurch bedingt, dass die variable Ekliptik an die Stelle der festen getreten ist.

Man erhält nunmehr

$$U - U_, = \psi - \psi_, + \delta_1\Pi - \delta_1\Pi_, + N$$
$$U + U_, = \psi + \psi_, + \delta_1\Pi + \delta_1\Pi_, + N_1$$

nebst

$$N_0 = \Pi_0 - \Pi_{,0}, \qquad \delta N = -\delta_2\Sigma + \delta_2\Sigma_,$$
$$N_{10} = \Pi_0 + \Pi_{,0}, \qquad \delta N_1 = -\delta_2\Sigma - \delta_2\Sigma_,.$$

Hierzu führen wir weiter die Grössen ein:

$$P = \sin\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}\delta N_1, \qquad \delta P = \sin\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}\delta N_1 - \sin\tfrac{1}{2}J_0$$
$$P_1 = \sin\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}\delta N_1 = \delta P_1,$$

wofür Hansen die Bezeichnungen gebraucht[1])

$$K = \tfrac{1}{2} N, \qquad N = \tfrac{1}{2} N_1$$
$$P = 2P_1, \qquad Q = 2P.$$

II.

Die nächste Aufgabe besteht in der Zurückführung der Variabeln KPQ oder der Störungen $\delta N\ \delta P\ \delta P_1$ auf die störenden Kräfte. Hierzu erhält man

$$\delta N' = -\Sigma_2 + \Sigma_{,2} = -\Sigma' + \Sigma_,' + \Sigma_1 - \Sigma_{,1}$$
$$\delta N_1' = -\Sigma_2 - \Sigma_{,2} = -\Sigma' - \Sigma_,' + \Sigma_1 + \Sigma_{,1}$$
$$\delta P' = \tfrac{1}{2} J' \cos\tfrac{1}{2} J \cos\tfrac{1}{2}\delta N_1 - \tfrac{1}{2} N_1' \sin\tfrac{1}{2} J \sin\tfrac{1}{2}\delta N_1$$
$$\delta P_1' = \tfrac{1}{2} J' \cos\tfrac{1}{2} J \sin\tfrac{1}{2}\delta N_1 + \tfrac{1}{2} N_1' \sin\tfrac{1}{2} J \cos\tfrac{1}{2}\delta N_1,$$

wo J' und $\Sigma' = \Sigma_1 + \Sigma_2$ resp. $\Sigma_,' = \Sigma_{,1} + \Sigma_{,2}$ zu ermitteln sind. Uebrigens bestehen wegen

$$\frac{P_1}{P} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta N_1, \quad P^2 + P_1^2 = \sin^2\tfrac{1}{2} J$$

die Relationen

$$\delta N_1' \sin^2\tfrac{1}{2} J = 2\,(P\delta P_1' - P_1\delta P')$$
$$J' \sin J = 4\,(P\delta P' + P_1\delta P_1').$$

Im Dreieck $K\Omega\Omega_,$ liegen den Winkeln $J\ i_,$ und $\pi - i$ die Seiten $\vartheta - \vartheta_,$, $\Sigma - \sigma$ und $\Sigma_, - \sigma_,$ gegenüber, folglich erhält man in bekannter Weise durch Differentiation

$$J' = i' \cos(\Sigma - \sigma) - i_,' \cos(\Sigma_, - \sigma_,) +$$
$$+ \vartheta' \sin i \sin(\Sigma - \sigma) - \vartheta_,' \sin i_, \sin(\Sigma_, - \sigma_,)$$

$$(\Sigma' - \sigma') \sin J = -i' \cos J \sin(\Sigma - \sigma) + i_,' \sin(\Sigma_, - \sigma_,) -$$
$$- \vartheta' [\cos i \sin J - \sin i \cos J \cos(\Sigma - \sigma)] - \vartheta_,' \sin i_, \cos(\Sigma_, - \sigma_,)$$

$$(\Sigma_,' - \sigma_,') \sin J = -i' \sin(\Sigma - \sigma) + i_,' \cos J \sin(\Sigma_, - \sigma_,) +$$
$$+ \vartheta' \sin i \cos(\Sigma - \sigma) - \vartheta_,' [\cos i_, \sin J + \sin i_, \cos J \cos(\Sigma_, - \sigma_,)].$$

1) Wir bemerken, dass in den Hansen'schen Gleichungen (*Darlegung* S. 112) für $\omega - \omega' = \Pi - \Pi_,$ und $\omega + \omega' = \Pi + \Pi_,$ die periodischen Glieder in χ und $\chi_,$ (also nach unserer Bezeichnung $\delta_2\chi$ und $\delta_2\chi_,$) neben $n_0 y t = \delta_1\chi$ und $n_0 y' t = \delta_1\chi_,$ vernachlässigt zu sein scheinen. S. 420 dagegen wird

$$\omega = \int (y + a - \eta)\, dg_0 + \tfrac{1}{2}(N_0 + N_{10})$$
$$= \Pi_0 + \delta_1\Pi = \Pi - \delta_2\Pi$$

gesetzt und als die *mittlere* Entfernung des Mondperigäums vom Knoten K definirt.

Substituirt man hier die Ausdrücke von $i'\sigma'\vartheta'$ durch $\delta\mathsf{U}$ und von $i'_{,}\sigma'_{,}\vartheta'_{,}$ durch $\delta\mathsf{U}_{,}$, so ergibt eine leichte Rechnung die Werthe

$$J' = \frac{r}{\Delta}\cos U\delta\mathsf{U} - \frac{r_{,}}{\Delta_{,}}\cos U_{,}\delta\mathsf{U}_{,}$$

$$\Sigma'\sin J = \frac{r}{\Delta}\cos J\sin U\delta\mathsf{U} - \frac{r_{,}}{\Delta_{,}}\sin U_{,}\delta\mathsf{U}_{,}$$

$$\Sigma'_{,}\sin J = \frac{r}{\Delta}\sin U\delta\mathsf{U} - \frac{r_{,}}{\Delta_{,}}\cos J\sin U_{,}\delta\mathsf{U}_{,}$$

und damit

$$\delta N' = \Sigma_1' - \Sigma'_{,1} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J\left\{\frac{r}{\Delta}\sin U\delta\mathsf{U} + \frac{r_{,}}{\Delta_{,}}\sin U_{,}\delta\mathsf{U}_{,}\right\}$$

$$\delta N_1' = \Sigma_1' + \Sigma'_{,1} - \cot\tfrac{1}{2}J\left\{\frac{r}{\Delta}\sin U\delta\mathsf{U} - \frac{r_{,}}{\Delta_{,}}\sin U_{,}\delta\mathsf{U}_{,}\right\}$$

$$\delta P' = -\tfrac{1}{2}P_1(\Sigma_1' + \Sigma'_{,1}) + \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}J\left\{\frac{r}{\Delta}\cos(U - \tfrac{1}{2}\delta N_1)\delta\mathsf{U} - \right.$$
$$\left. - \frac{r_{,}}{\Delta_{,}}\cos(U_{,} - \tfrac{1}{2}\delta N_1)\delta\mathsf{U}_{,}\right\}$$

$$\delta P_1' = \tfrac{1}{2}P(\Sigma_1' + \Sigma'_{,1}) - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}J\left\{\frac{r}{\Delta}\sin(U - \tfrac{1}{2}\delta N_1)\delta\mathsf{U} - \right.$$
$$\left. - \frac{r_{,}}{\Delta_{,}}\sin(U_{,} - \tfrac{1}{2}\delta N_1)\delta\mathsf{U}_{,}\right\}.$$

In den Ausdrücken für $\delta N'$ und $\delta N_1'$ müssen Σ_1' und $\Sigma'_{,1}$ so bestimmt werden, dass bei der Integration keine in die Zeit multiplicirten Glieder vorkommen.

Um die vorstehenden Differentialgleichungen in die von HANSEN gewählte Form zu bringen, führen wir als neue Elemente die Grössen ein[1])

$$p = \sin i\cos\sigma, \qquad p_1 = \sin i\sin\sigma$$

und analog $p_{,}$ und $p_{,1}$ für die Sonnenbewegung. Dann findet man

$$p' = i'\cos i\cos\sigma - \sigma'\sin i\sin\sigma = \frac{r}{\Delta}\cos i\cos v\,\delta\mathsf{U}$$

$$p_1' = i'\cos i\sin\sigma + \sigma'\sin i\cos\sigma = \frac{r}{\Delta}\cos i\sin v\,\delta\mathsf{U}$$

$$p'_{,} = \frac{r_{,}}{\Delta_{,}}\cos i_{,}\cos v_{,}\,\delta\mathsf{U}_{,}, \qquad p'_{,1} = \frac{r_{,}}{\Delta_{,}}\cos i_{,}\sin v_{,}\,\delta\mathsf{U}_{,}.$$

1) Selbstverständlich kann man auch hier die Elemente δq und δq_1 beibehalten, für welche die Gleichungen gelten

$$p' = \cos\sigma_0\delta q' - \sin\sigma_0\delta q_1'$$
$$p_1' = \sin\sigma_0\delta q' + \cos\sigma_0\delta q_1'$$

und entsprechend für $\delta q'_{,}$ und $\delta q'_{,1}$: diess würde eine Aenderung der Winkel ς und $\varsigma_{,}$ um σ_0 resp. $\sigma_{,0}$ zur Folge haben.

Da $U = v - \Sigma$, so ist ferner

$$\frac{r}{\Delta}\cos i \sin U\,\delta\mathsf{U} = -p'\sin\Sigma + p_1'\cos\Sigma$$

und für

$$\Sigma + \tfrac{1}{2}\delta N_1 = \varsigma, \quad \Sigma_{,} + \tfrac{1}{2}\delta N_1 = \varsigma_{,},\text{[1]}$$

$$\frac{r}{\Delta}\cos i \sin(U - \tfrac{1}{2}\delta N_1)\,\delta\mathsf{U} = -p'\sin\varsigma + p_1'\cos\varsigma$$

$$\frac{r}{\Delta}\cos i \cos(U - \tfrac{1}{2}\delta N_1)\,\delta\mathsf{U} = p'\cos\varsigma + p_1'\sin\varsigma, \quad \text{u. s. w.}$$

Damit ergeben sich die Formeln der *Darlegung* I, S. 114:

$$dN = (\Sigma_1 - \Sigma_{,1})\,dt - \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}J}{\cos i}(\sin\Sigma\,dp - \cos\Sigma\,dp_1)$$
$$- \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}J}{\cos i_{,}}(\sin\Sigma_{,}\,dp_{,} - \cos\Sigma_{,}\,dp_{,1})$$

$$dN_1 = (\Sigma_1 + \Sigma_{,1})\,dt + \frac{\cot\frac{1}{2}J}{\cos i}(\sin\Sigma\,dp - \cos\Sigma\,dp_1)$$
$$- \frac{\cot\frac{1}{2}J}{\cos i_{,}}(\sin\Sigma_{,}\,dp_{,} - \cos\Sigma_{,}\,dp_{,1})$$

$$dP = -\tfrac{1}{2}P_1(\Sigma_1 + \Sigma_{,1})\,dt + \frac{\cos\frac{1}{2}J}{2\cos i}(\cos\varsigma\,dp + \sin\varsigma\,dp_1)$$
$$- \frac{\cos\frac{1}{2}J}{2\cos i_{,}}(\cos\varsigma_{,}\,dp_{,} + \sin\varsigma_{,}\,dp_{,1})$$

$$dP_1 = \tfrac{1}{2}P(\Sigma_1 + \Sigma_{,1})\,dt + \frac{\cos\frac{1}{2}J}{2\cos i}(\sin\varsigma\,dp - \cos\varsigma\,dp_1)$$
$$- \frac{\cos\frac{1}{2}J}{2\cos i_{,}}(\sin\varsigma_{,}\,dp_{,} - \cos\varsigma_{,}\,dp_{,1}).$$

12.

Um endlich für den Fall einer Störungsfunction

$$\Omega = \frac{1}{r_2} - \frac{rH}{r_{,}r_{,}}, \qquad R_{,} = \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_{,}^3},$$

$$\delta\mathsf{U} = \frac{\delta\mu}{r\sin u}\frac{\partial\Omega}{\partial i} = \delta\mu\frac{r_{,}R_{,}}{\sin u}\frac{\partial H}{\partial i}$$

---

1) Hansen schreibt S. 117 der *Darlegung*

$$\theta = -\varsigma_{,} = \int(\alpha + \eta)\,dg_0 + \tfrac{1}{2}N_{10} - \tfrac{1}{2}N - \chi_{,0}$$

und definirt diesen Winkel als das Supplement der siderischen Länge des aufsteigenden Mondknotens auf der Ekliptik. Dagegen ist S. 420 «das Supplement der *mittleren* siderischen Länge dieses Knotens»

$$\theta = \int(\alpha + \eta)\,dg_0 + \tfrac{1}{2}N_{10} - \tfrac{1}{2}N_0 - \chi_{,0}$$
$$= -\Sigma_{,} + \delta_2\Sigma_{,} = -\Sigma_{,0} - \delta_1\Sigma_{,} = -\Sigma_{,} - \tfrac{1}{2}\delta N_1 + \tfrac{1}{2}\delta N$$

gesetzt.

diese Differentialgleichungen auf die von HANSEN gegebene Form zurückzuführen, gehen wir aus von dem Ausdruck

$$H = (1 - P^2 - P_1^2)\cos(U - U_,) + (P^2 + P_1^2)\cos(U + U_,),$$

wo

$$U - U_, = \psi - \psi_, + \delta_1 \Pi - \delta_1 \Pi_, + N$$
$$U + U_, = \psi + \psi_, + \delta_1 \Pi + \delta_1 \Pi_, + N_1$$

nebst

$$N_1 = N_{10} + 2\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = \tfrac{P_1}{P}).$$

Damit ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$\frac{\partial H}{\partial N} = -\cos^2\tfrac{1}{2}J\sin(U - U_,), \quad \frac{\partial H}{\partial N_1} = -\sin^2\tfrac{1}{2}J\sin(U + U_,),$$
$$\frac{\partial H}{\partial P} = -4P\sin U\sin U_, + 2P_1\sin(U + U_,)$$
$$\frac{\partial H}{\partial P_1} = -4P_1\sin U\sin U_, - 2P\sin(U + U_,)$$
$$P\frac{\partial H}{\partial P_1} - P_1\frac{\partial H}{\partial P} = 2\frac{\partial H}{\partial N_1},$$

folglich wegen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial H} = r r_, R_,, \qquad \delta \mathfrak{U} = -\delta\mu\, r_, R_, \sin J \sin U_,,$$
$$2r\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}J\sin U\,\delta\mathfrak{U} = \delta\mu\left(P\frac{\partial\Omega}{\partial P} + P_1\frac{\partial\Omega}{\partial P_1}\right)$$
$$r\cos\tfrac{1}{2}J\cos(U - \tfrac{1}{2}\delta N_1)\,\delta\mathfrak{U} = \delta\mu\left(\tfrac{1}{2}\cos^2\tfrac{1}{2}J\frac{\partial\Omega}{\partial P_1} - P\frac{\partial\Omega}{\partial N}\right)$$
$$r\cos\tfrac{1}{2}J\sin(U - \tfrac{1}{2}\delta N_1)\,\delta\mathfrak{U} = \delta\mu\left(\tfrac{1}{2}\cos^2\tfrac{1}{2}J\frac{\partial\Omega}{\partial P} + P_1\frac{\partial\Omega}{\partial N}\right).$$

Durch Substitution dieser Werthe gehen die HANSEN'schen Gleichungen (*Darlegung* S. 117, *Fundamenta* p. 93) hervor:

$$\delta N' = \Sigma_1 - \Sigma_{,1} + \frac{\delta\mu}{2\Delta}\left(P\frac{\partial\Omega}{\partial P} + P_1\frac{\partial\Omega}{\partial P_1}\right)$$
$$- \frac{1}{\cos\frac{1}{2}J\cos i_,}\{p'_,(P\sin\varsigma_, - P_1\cos\varsigma_,) - p'_{,1}(P\cos\varsigma_, + P_1\sin\varsigma_,)\}$$

$$\delta N'_1 = \Sigma_1 + \Sigma_{,1} - \frac{\delta\mu}{2\Delta}\cot^2\tfrac{1}{2}J\left(P\frac{\partial\Omega}{\partial P} + P_1\frac{\partial\Omega}{\partial P_1}\right)$$
$$- \frac{\cot^2\frac{1}{2}J}{\cos\frac{1}{2}J\cos i_,}\{p'_,(P\sin\varsigma_, - P_1\cos\varsigma_,) - p'_{,1}(P\cos\varsigma_, + P_1\sin\varsigma_,)\}$$

$$\delta P' = -\tfrac{1}{2}P_1(\Sigma_1 + \Sigma_{,1}) + \frac{\delta\mu}{2\Delta}\left(\tfrac{1}{2}\cos^2\tfrac{1}{2}J\frac{\partial\Omega}{\partial P_1} - P\frac{\partial\Omega}{\partial N}\right)$$
$$- \frac{\cos\frac{1}{2}J}{2\cos i_,}(p'_,\cos\varsigma_, + p'_{,1}\sin\varsigma_,)$$

$$\delta P'_1 = \tfrac{1}{2}P(\Sigma_1 + \Sigma_{,1}) - \frac{\delta\mu}{2\Delta}\left(\tfrac{1}{2}\cos^2\tfrac{1}{2}J\frac{\partial\Omega}{\partial P} + P_1\frac{\partial\Omega}{\partial N}\right)$$
$$- \frac{\cos\frac{1}{2}J}{2\cos i_,}(p'_,\sin\varsigma_, - p'_{,1}\cos\varsigma_,).$$

Hier ist

$$\sin\tfrac{1}{2}J\cos\Sigma_{,} = P\cos\varsigma_{,} + P_1\sin\varsigma_{,}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}J\sin\Sigma_{,} = P\sin\varsigma_{,} - P_1\cos\varsigma_{,}$$

gesetzt, während die von dp und dp_1, resp. von δU oder $\frac{\partial H}{\partial i}$ abhängigen Glieder durch die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction nach N P und P_1 ausgedrückt worden sind.

13.

Will man hiernach die veränderliche Ekliptik für die Entwickelung der Breitenstörungen zu Grunde legen, so kann man wie folgt verfahren. Bezeichnet man durch L und B die *tropische* Länge und Breite des Mondes, durch Ψ die Summe der Präcession und der Nutationen, so ist für $L_1 = L - \Psi$

$$\cos B\cos(L_1 - \Sigma_{,}) = \cos U$$

$$\cos B\sin(L_1 - \Sigma_{,}) = \cos J\sin U$$

$$\sin B = \sin J\sin U.$$

Nun gehen die analogen Gleichungen

$$\cos b\cos(l - \vartheta) = \cos u$$

$$\cos b\sin(l - \vartheta) = \cos i\sin u$$

$$\sin b = \sin i\sin u$$

durch Hansen's *identische Transformation* (Abh. Art. 23 und 24) über in

$$\cos b\cos(l - \Theta) = \cos s + \frac{\delta q_1\,\delta\omega}{k}$$

$$\cos b\sin(l - \Theta) = \cos i_0\sin s - \left(\operatorname{tg} i_0 + \frac{\delta q}{k\cos i_0}\right)\delta\omega$$

$$\sin b = \sin i_0\sin s + \delta\omega,$$

wenn

$$s = u + \delta\sigma, \qquad \delta q = \sin i\cos\delta\sigma - \sin i_0$$

$$\delta q_1 = \sin i\sin\delta\sigma, \quad \delta\omega = \delta q\sin s - \delta q_1\cos s$$

$$k = \cos i_0(\cos i_0 + \cos i) - \sin i_0\delta q$$

und

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\vartheta - \Theta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(i - i_0)}{\cos\frac{1}{2}(i + i_0)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta\sigma$$

oder

$$k \sin(\vartheta - \Theta) = (\cos i_0 + \cos i) \sin \delta\sigma$$

$$k \cos(\vartheta - \Theta) = (1 + \cos i_0 \cos i) \cos \delta\sigma - \sin i_0 \sin i$$

geschrieben werden.

Durch blosse Buchstabenvertauschung erhält man mithin

$$\cos B \cos(L_1 - \Theta_1) = \cos U_1 + \frac{\delta V_1 \delta\omega_1}{k_1}$$

$$\cos B \sin(L_1 - \Theta_1) = \cos J_0 \sin U_1 - \left(\operatorname{tg} J_0 + \frac{\delta V}{k_1 \cos J_0}\right) \delta\omega_1$$

$$\sin B = \sin J_0 \sin U_1 + \delta\omega_1,$$

wo

$$U_1 = U + \delta_2 \Sigma = \psi + \Pi_0 + \delta_1 \Pi$$

$$\delta V = \sin J \cos \delta_2 \Sigma - \sin J_0, \quad \delta V_1 = \sin J \sin \delta_2 \Sigma$$

$$\delta\omega_1 = \delta V \sin U_1 - \delta V_1 \cos U_1$$

$$k_1 \sin(\Sigma_{,} - \Theta_1) = (\cos J_0 + \cos J) \sin \delta_2 \Sigma$$

$$k_1 \cos(\Sigma_{,} - \Theta_1) = (1 + \cos J_0 \cos J) \cos \delta_2 \Sigma - \sin J_0 \sin J$$

oder

$$k_1 = \cos J_0 (\cos J_0 + \cos J) - \sin J_0 \delta V$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\Sigma_{,} - \Theta_1) = \frac{\cos \frac{1}{2}(J - J_0)}{\cos \frac{1}{2}(J + J_0)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta_2 \Sigma$$

zu setzen sind. Bei Einführung der Variabeln $N\,P\,P_1$ ergeben sich zunächst J, δN_1, $\delta_2 \Sigma$ und $\delta_2 \Sigma_{,}$ vermöge der Relationen

$$P^2 + P_1^2 = \sin^2 \tfrac{1}{2} J, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta N_1 = \frac{P_1}{P}$$

$$\delta N + \delta N_1 = -2\delta_2 \Sigma, \quad \delta N - \delta N_1 = 2\delta_2 \Sigma_{,}.$$

Wenn nun $\delta_1 \Sigma$, $\delta_1 \Sigma_{,}$ und $\delta_1 \Pi = \delta_1 \chi - \delta_1 \Sigma$ als gefunden angesehen werden[1]), so berechnet man U_1, δV, δV_1, $\delta\omega_1$, endlich k_1, $\Sigma_{,}$ und Θ_1, womit unsere Aufgabe gelöst ist.

---

1) Ich bemerke hierzu, dass im Art. 2 χ_1 durch die Bedingung bestimmt worden ist, dass bei der Integration der Differenz $\chi' - \chi_1 = \chi_2$ keine in die Zeit multiplicirten Glieder erscheinen sollen, während HANSEN entsprechend durch $\int y\,dy_0$ die Bewegung des Perigäums auf der idealen Mondbahn (*Darlegung* S. 102) definirt, dagegen später in der *charakteristischen Function* δL oder W die der Zeit proportionalen Glieder durch die numerische Bestimmung von y zum Wegfall bringt (*Darlegung* I, S. 338). In den *Fundamentis* geht HANSEN von der letzteren Bedingung bei der Definition von y aus (vgl. p. 43 ff., 191).

Man kann schliesslich auch

$$\delta W = \sin J \cos(\Pi_0 + \delta_1 \Pi - \delta_2 \Sigma) - \sin J_0 \cos(\Pi_0 + \delta_1 \Pi)$$
$$= \cos(\Pi_0 + \delta_1 \Pi)\,\delta V + \sin(\Pi_0 + \delta_1 \Pi)\,\delta V_1$$

und

$$\delta W_1 = -\sin J \sin(\Pi_0 + \delta_1 \Pi - \delta_2 \Sigma) + \sin J_0 \sin(\Pi_0 + \delta_1 \Pi)$$
$$= -\sin(\Pi_0 + \delta_1 \Pi)\,\delta V + \cos(\Pi_0 + \delta_1 \Pi)\,\delta V_1$$

an Stelle von δV und δV_1 als Elemente einführen, wodurch

$$\delta\omega_1 = \sin\psi\,\delta W - \cos\psi\,\delta W_1$$

hervorgeht. Setzt man alsdann

$$\varrho\,\delta\omega_1 = \delta P_1 = \delta R_1 + \frac{\partial\,\delta R_1}{\partial g_0}\,\delta\gamma + \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \delta R_1}{\partial g_0^2}\,\delta\gamma^2 + \cdots,$$

so wird

$$\delta R_1 = \int (\bar{r}_0 \sin\bar{f}_0\,\delta W' - \bar{r}_0 \cos\bar{f}_0\,\delta W_1')\,\overline{dt} =$$
$$= \int \overline{dt}\,\Big\{\frac{r_0 r}{\Delta}\cos J \sin(\bar{f}_0 - \psi)\,\delta U + \bar{r}_0 \sin J_0 \cos(\bar{f}_0 - \psi + U_1)\,\Sigma_1 -$$
$$- \frac{r_0 r_s}{\Delta_s}\Big[\cos^2\tfrac{1}{2}J \sin(\bar{f}_0 - \psi + U - U_s) - \sin^2\tfrac{1}{2}J \sin(\bar{f}_0 - \psi + U + U_s)\Big]\,\delta U_s +$$
$$+ \bar{r}_0(\cos\bar{f}_0\,\delta W + \sin\bar{f}_0\,\delta W_1)\,\chi_1\Big\}.$$

Zusatz zu Art. 5, S. 142.

In dem für $\left(\frac{\partial\,\delta L}{\partial t}\right)$ gefundenen Ausdrucke können die in χ_1 multiplicirten Glieder durch Einführung der Elemente $\delta\Gamma$ und $\delta\Psi$ umgeformt werden, wenn man den Werth

$$\frac{\partial\,\delta L}{\partial g_0} = -\frac{\sin f_0}{\sqrt{1 - e_0^2}}\,\delta\Gamma + \frac{\cos f_0 + e_0}{\sqrt{1 - e_0^2}}\,\delta\Psi - \frac{2 r_0 e_0 \sin f_0}{n_0 p_0}\,\chi_1$$

substituirt. Dann nehmen die erwähnten Glieder die Gestalt an (vgl. *Darlegung* S. 333):

$$-\chi_1\Big\{2\,\frac{\Delta_0}{\Delta}\,\frac{\bar{r}_0 e_0 \sin\bar{f}_0}{p_0} + \frac{r_0}{a_0}\sin\bar{f}_0\,\delta\Gamma - \frac{r_0}{a_0}\cos\bar{f}_0\,\delta\Psi\Big\}.$$

PROTOPLASMASTUDIEN
AM SALMONIDENKEIM

VON

WILHELM HIS.

Des XXV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° III.

MIT 3 TAFELN UND 21 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1899.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 5. Juni 1899.
Das Manuscript eingeliefert am 1. Juli 1899.
Der Abdruck vollendet am 15. September 1899.

PROTOPLASMASTUDIEN AM SALMONIDENKEIM

VON

WILHELM HIS.

Der nachfolgende Aufsatz schliesst sich an meine vor kurzem publicirten Studien über Zellen- und Syncytienbildung an.[1]) Dank der besonderen Güte des Herrn Prof. Dr. H. Nitsche in Tharandt und des Herrn Linke, Besitzer der grossen Fischzuchtanstalt in Edelkrone, habe ich sowohl im vorigen Herbst als in diesem Frühjahr Gelegenheit gefunden, frisch befruchtete Forelleneier an Ort und Stelle zu bekommen, und ich habe das günstige Material benutzt, um wieder einmal an lebenden Elementen Plasmabewegungen zu studiren. Die Untersuchungstechnik ist einfach: das sehr sorgfältig abgetrocknete Ei wird mit 2 Pincetten zerrissen oder mit spitzem Messer eingeschnitten und sein Inhalt in eine Fol'sche oder eine Ranvier'sche feuchte Kammer ausgestrichen.[2]) Die Fol'sche feuchte Kammer hat den Vortheil, dass man die Dicke der zu beobachtenden Schichten und den auf sie ausgeübten Druck nach Belieben regeln kann, die Ranvier'sche Kammer ist dagegen bequemer in ihrer Handhabung und sie erlaubt die Anwendung dünnerer Deckgläser. Bei der grossen Empfindlichkeit unbefruchteter oder erst seit kurzem befruchteter Keime gegen Druck, kann zu deren Untersuchung die Ranvier'sche Kammer nicht dienen, wohl aber erweist sie sich bei etwas weiter fortgeschrittenen Entwickelungsstufen brauchbar. — Ich habe die Untersuchung frischer Forellen-Keime bis zur vollendeten Dotterumwachsung, d. h. bis zum 12. Tage ausgedehnt. Zur Fixation von Keimen habe ich auch diesmal wieder nach dem Vorgang von Henneguy, Blanc u. A. mit Vorliebe ein Pikrinessigsäuregemisch benutzt, daneben auch Salpetersäure, sowie Flemming'sche Lösung. Stets wurden die Keime nach kurzem Aufenthalt in der Fixirflüssigkeit isolirt und vom anhaftenden Dotter gereinigt. Der aufopfernden Thätigkeit von Herrn Collegen R. Metzner in

1) W. His über Zellen- und Syncytienbildung, Studien am Salmonidenkeim. Abh. d. K. S. Ges. d. Wissenschaften Bd. XXIV, Nr. V, 1898.

2) Fol. Vergl. mikrosc. Anat. S. 88.

Basel verdanke ich die Zusendung trefflich fixirter Lachseier. Die mühsame Herrichtung fixirter Forellenkeime hatte Frl. CL. PESCHEL übernommen, ohne deren wirksame Unterstützung ich der Arbeit schwerlich die vorliegende Ausdehnung hätte geben können.

Schon am unbefruchteten Keime, noch auffälliger an ausgebildeten Blastomeren des 2. und der folgenden Tage zeigt das lebende Plasma theils hyaline, theils körnige Beschaffenheit. Wir unterscheiden demgemäss das Hyaloplasma vom Körner- oder Morphoplasma.[1]) Das Verhältnis beider zu einander wechselt mit der Entwickelungsstufe der Plasmagebilde und mit deren physiologischen Zuständen. Auf frühen Stufen tritt das Hyaloplasma hinter dem Körnerplasma noch sehr zurück. Bei fortschreitender Furchung werden aber die Blastomeren immer durchsichtiger, d. h. reicher an Hyaloplasma. Das letztere bildet im Allgemeinen eine äussere Mantelschicht um eine körnige Binnenmasse herum. In kurzen Intervallen kann aber dieser Mantel an der einen Seite der Blastomere schwinden, an einer andern sehr breit werden. Zwischen Hyaloplasma und Körnerplasma pflegt keine scharfe Gränze zu bestehen. Schon im Ruhezustand von Blastomeren greift die körnige Innenmasse mit einzelnen Zacken in den hyalinen Mantel über. Während der Phasen von Plasmabewegung können hyaline Gebiete durch Einströmen von Körnern rasch sich trüben, und ebenso rasch können am Rande körniger Massen breite Buckel von hyaliner Substanz sich hervortreiben. Da das Verhalten des Plasma's mit den Fortschritten der Entwickelung wechselt, und da selbst der Keim des unbefruchteten Ei's durch den Aufenthalt im Wasser andere Eigenschaften annimmt, so erscheint es angemessen, die Stufen etwas aus einander zu halten.

Ueber das Keimplasma von Lachseiern bald nach dem Eintritte der Eier in's Wasser habe ich mich vor Jahren ausgesprochen[2]) und ich kann hier an die damalige Beschreibung anknüpfen. In möglichst unverletzt dargestelltem Zustand stellt der frisch befruchtete Keim einen von dunkeln, scharfen Contouren umsäumten Klumpen dar, der von zahllosen Körnern, theils gröberen,

1) Die bequeme Bezeichnung Körnerplasma brauchen die Botaniker, STRASSBURGER, PFEFFER u. A., das Wort Morphoplasma hat neuerdings BALLOWITZ vorgeschlagen.

2) W. HIS Unters. über das Ei u. die Eientwickelung bei Knochenfischen. Leipzig 1873. Seite 5 ff. u. Taf. I Fig. 3.

theils solchen allerfeinsten Calibers getrübt ist. Selbst bei Vermeidung äusseren Druckes durch aufgelegte Deckgläser, d. h. also wohl unter dem blossen Einfluss der Schwere verliert der Klumpen seine compacte Form und es brechen aus seiner Oberfläche Substanzströme hervor, die unter den Augen des Beobachters das Gesichtsfeld durchmessen und sich zu Fäden von ungemeiner Länge ausziehen. Die Zähigkeit der strömenden Substanz ist so gross, dass einzelne Fäden bis in's unmessbar feine gedehnt werden, ohne doch je zu zerreissen. Die Fäden zeigen zahlreiche varicöse Auftreibungen, in denen körnige Masse sich anzuhäufen pflegt. Vielfach beobachtet man auch Fäden, die kurz vor ihrem zugespitzten Ende eine kugelige Anschwellung zeigen. Aehnliche Formen hat MAX SCHULTZE[1]) an Pseudopodien von Rhizopoden beschrieben und als „geknöpfte Fäden" bezeichnet.

Ein ähnliches Auseinanderströmen, wie am eigentlichen Keimplasma ist auch am Rindenplasma zu beobachten. Nur pflegen wegen der viel reichlicheren Einlagerung von Fetttropfen und von körperlichen Dotterbestandtheilen die sich ausbreitenden Stromfäden gröber varicös zu sein.[2]) Wie ich in der oben citirten Schrift nachgewiesen habe, so umgiebt die Schicht von Rindenplasma den flüssigen Dotter mit elastischer Spannung, denn nach Verletzung zieht sich die Rinde zusammen und treibt einen Theil des Dotters heraus. Elastische Spannungserscheinungen sind übrigens auch an isolirten Plasmafäden zu beobachten. Fäden, die sich, einer Flüssigkeitsströmung folgend, lang ausgezogen haben, ziehen sich bei wieder eintretender Ruhe, bez. beim Wiederaufhören des wirksamen Zuges bis auf einen Bruchtheil ihrer früheren Länge zusammen. Die Plasmafäden sowohl des Keimes, als der Rinde sind stets scharf contourirt und von der umgebenden Flüssigkeit bestimmt sich abhebend. Dies ist um so beachtenswerther, als ja der flüssige Dotter des Salmonideneies an und für sich schon stark lichtbrechend ist.

Das Keimplasma des frisch in's Wasser gelangten Knochenfischeies bildet bekanntlich eine flache Scheibe, die von ihrer in den Dotter hineinreichenden Unterlage und von der Rindenschicht nur unvollkommen geschieden ist. Während der ersten Stunden

1) M. SCHULTZE Das Protoplasma der Rhizopoden und der Pflanzenzellen. Leipzig 1863 S. 24.

2) l. c. Taf. I Fig. 4.

des Aufenthaltes im Wasser sammelt sich das Plasma mehr und mehr zu einem die Dotterkugel überragenden Hügel an; dieser wird am befruchteten Ei durchfurcht, er bildet sich aber auch am unbefruchteten Ei aus und behält durch mehrere Tage hindurch seine gedrungene Form bei. Der von der Befruchtung unabhängige Prozess führt zu einer Art Individualisirung des Keimes d. h. zu dessen Sonderung, sowohl vom unorganisirten Dotter, als von den als Rindenschicht eine gesonderte Entwickelung durchmachenden Plasmaresten.

Fixirte und unzerschnitten aufgehobene Keime zeigen Anfangs eine diffuse, von grösseren und kleineren Tropfen durchsetzte Anhäufung des Plasma. Schon während der ersten Stunde tritt das letztere in Form von strahlig convergirenden, gegen den Dotter hin vorspringenden Strängen mehr und mehr zu einem mittleren Hügel zusammen. Peripheriewärts verlieren sich die Stränge in der Rindenschicht. Je mehr die Concentration des Keimes fortschreitet, um so kürzer werden dessen strahlige Zuflüsse und beim Beginn der Furchung erscheint der Keim in der Flächenansicht vom Rindenbezirk scharf abgesetzt. (Fig. 1—4 Taf. I.)

Bevor die concentrische Sammlung des Keimplasmas vor sich geht, ist dieses von zahlreichen röthlich oder rothgelb gefärbten Fetttropfen durchsetzt. Sie liegen im peripherischen Randgebiete und in der unteren, dem Dotter zugekehrten Hälfte der Keimscheibe. Bei entwässerten und eingekitteten Präparaten sind die Fetttropfen gelöst, das sie umschliessende Plasmagerüst ist allein zurückgeblieben und es erscheint nunmehr auf das reichlichste von kleineren und grösseren Lücken durchsetzt. (Fig. 1 und 2.) Will man das also ausgelaugte Plasmagerüst „vacuolisirt" nennen, so mag man dies thun, es wird aber dadurch nicht viel gewonnen. Die Eigenschaften des unbefruchteten Keimplasma's sind grossenteils negative. Es tritt in ihm weder Strahlung, noch gröbere Gerüstbildung hervor, und abgesehen vom Kern und von dessen nächster Umgebung zeigt es überall dieselbe gleichmässige Structur, es ist, wie wir uns ausdrücken können, isotyp. Frisch untersucht zeigt es neben den etwas gröberen und stärker lichtbrechenden Körnern oder Tröpfchen zahllose feinste Körnchen von schwächerer Lichtbrechung, die bei ihrer gleichmässigen Vertheilung dem Plasma ein fein bestäubtes Ansehen geben und es fast bis zum Rande hin undurchsichtig machen. In gleicher Weise findet man Körnchen feinster

Art an dünnen Schnitten gehärteter Keime. Sie erscheinen nunmehr den Fäden eines sehr zarten engmaschigen Gerüstes eingelagert, ein Verhalten, auf das ich weiter unten zurückkommen werde.

Die umfangreichen ersten Blastomeren stimmen in den Eigenschaften ihres Plasmas noch grossentheils mit dem ungetheilten Keim überein. Auch sie bestehen der Hauptsache nach aus einer undurchsichtigen, von kleineren und kleinsten Körnchen durchsetzten Masse. Das Hyaloplasma spielt bei ihnen keine grosse Rolle. Das Körnerplasma ist zum grossen Theil isotyp und die centrirten Strahlungen nehmen bei grossen Blastomeren nur einen Theil des Gesammtgebildes ein und reichen nicht[1]), oder nur stellenweise bis an den Rand heran. Noch sind die grossen Blastomeren sehr verletzbar, und der leichteste Deckglasdruck genügt, um ihre Gränzschicht zu sprengen und das Plasma zum Ausströmen zu bringen. Auch hier beginnen die ausfliessenden Ströme mit mehr oder minder breiter Basis, dann spitzen sie sich conisch zu, und sie ziehen sich bei wachsender Länge zu immer feineren Fäden aus. Fetttropfen und Dotterkörner werden mitgenommen und auf grössere Entfernungen fortgeführt. Die einzelnen Stromfäden zeigen verbreiterte, oder tropfenartig angeschwollene Stellen inmitten von feiner ausgezogenen Strecken. Bei andauernder Strömung geht das Material solcher Internodien in die ausfliessenden Stromfäden über, die Anschwellungen werden entsprechend kleiner.

Bei der Bachforelle habe ich das Bild von strömendem Plasma aus gequetschten Keimen noch erhalten, nachdem die Embryonen längst angelegt waren. Allerdings in späteren Perioden lange nicht mehr in der massenhaften Ausbildung, wie in den früheren. Die Blastomeren der Regenbogenforelle scheinen etwas resistenter zu sein, ich konnte das Plasma aus ihnen nicht so lange zum Ausströmen bringen.

Für das Studium vitaler Zellenbewegung bieten die Zellen des Salmonidenkeimes eines der ausgezeichnetsten Objecte.[2]) Sie

---

1) Zellen und Syncytienb. S. 410 und Fig. 3—6.

2) Man vergl. die Angaben von C. Weil, Beiträge zur Kenntniss der Entwickelung der Knochenfische, Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien 1872 III Aprilheft und His, Untersuchungen über die Entwickelung von Knochenfischen, Zeitschrift für Anatomie und Entwickelungsgeschichte, Bd. I S. 91 ff.

eignen sich dazu von dem Zeitpunkte ab, da sie isolirt zur Beobachtung zu bringen sind, bis zur Zeit vorgerückter Embryobildung. Der Vorzug, den diese Zellen als Beobachtungsobject darbieten, liegt darin, dass sie schon bei gewöhnlicher Temperatur lebhaft sich bewegen, und dass sie sich im flüssigen und durchsichtigen Dotter des eigenen Eies beobachten lassen. Sofern gegen Zerquetschen und gegen Vertrocknen des Präparates die nöthigen Massregeln ergriffen sind, lassen sich die Zellenbewegungen stundenlang verfolgen. Vielleicht kann man bei zweckmässiger Durchlüftung die Beobachtungen auf Tage ausdehnen, denn ich finde, dass noch 8 Tage nach Eröffnung von Eiern die Zellen zwar bewegungslos, aber durchsichtig sind; die hyaloplasmatische Mantelschicht, die körnige Innenmasse und der Kern liegen anscheinend noch unverändert vor, und es sind somit keine erkennbaren Zeichen des Zerfalls vorhanden.[1])

Eines muss man sich klar machen, die an frischem Material erreichbaren Aufschlüsse über die innere Structur der Zellenleiber sind an Detail verhältnissmässig arm, weil die Substanz, aus der der durchsichtige Zellenmantel besteht, stark lichtbrechend ist und sich von den in seinem Innern befindlichen Theilen optisch nur wenig differenzirt. Daher muss die Beobachtung an frischem Material durch die an gefärbten Schnitten ergänzt werden. Die Hauptschattenseite der Lachs- und Forelleneier liegt aber für einen viel beschäftigten Beobachter darin, dass sie ihm mit ihrer Entwickelung nicht warten. Hierin muss ich auch meine persönliche Entschuldigung suchen, wenn meine Beobachtungen nur lückenhaft sind.

Die Schilderung, die ich selber s. Z. von der Bewegungsweise von Lachskeimzellen des 3.—4. Tages gegeben habe, ist folgende: „Zeitweise ruht der Körper während einiger Zeit, dann treibt der hyaline Saum an einer oder an mehreren Stellen buckelige, stets von gerundeten Contouren umgebene Vorsprünge. Diese bleiben erst hyalin, dann strömen mit einem Ruck Körner in sie ein, die ganze Masse geräth in Bewegung, dann stellt sich wieder Ruhe ein und das Spiel beginnt nach einiger Zeit auf's Neue.“ WEIL beschreibt die Bewegungsvorgänge noch etwas lebhafter. Er spricht von einem am Rande isolirter Keimscheiben zu beobachtenden

1) Von den farblosen Blutzellen von Salamandern giebt LIEBERKÜHN an, dass sie, in Capillaren eingeschlossen, nach 65 Tagen noch Bewegungserscheinungen zeigten. LIEBERKÜHN über Bewegungserscheinungen der Zellen. S. 358.

„höchst regen Treiben“. „Die Zellen schicken nach den verschiedensten Richtungen Fortsätze aus, die, von mannigfacher Form und Grösse, ihrerseits wieder die lebhaftesten Formveränderungen zeigen. In der Mehrzahl der Fälle sind diese Fortsätze cylindrisch hyalin und es ergiesst sich ein Theil des granulirten Inhaltes der Zellen in dieselben.“ WEIL glaubt sogar die Abschnürung neuer Individuen beobachtet zu haben und er kommt schliesslich nochmals darauf zurück, dass „die Zellen ihren Inhalt in die ausgesandten Fortsätze hinein ergiessen und nun gleichsam mit ihrem ganzen Leib in den Fortsatz hineinrücken, wobei sie Form und Lage verändern“.

„Die Abschnürung neuer Individuen“ zu beobachten, gleich WEIL, ist mir nicht beschieden worden, obwohl ich gelegentlich geglaubt habe, dies erreichen zu können. Einen besonders vielversprechenden Fall der Art, bei dem die Verbindung der zwei Hälften bis auf ein schmales Verbindungsstück herabging, habe ich während mehrerer Stunden verfolgt, aber das Präparat hat schliesslich meine Erwartung getäuscht, indem die zwei Hälften wieder zusammenflossen und sich zu einer einfachen Kugel verbanden. Diese Beobachtungsreihe bietet im Uebrigen soviel Interessantes, dass ich Abbildungen und Beschreibung derselben mittheilen will. Aus einem am 19. April Nm. 2 Uhr befruchteten, am 21. April M. $10\frac{1}{2}$ Uhr eröffneten Ei der Regenbogenforelle erhielt ich zahlreiche frei herumschwimmende Blastomeren, deren kleinste zwischen 50—60 μ, deren grössere um 80 μ und darüber maassen. Ein Theil dieser Zellen war kuglig, in vorübergehender Ruhe, ein anderer Theil unregelmässig geformt und in Bewegung begriffen. Uebrigens waren Strömungen des Körnerplasmas auch in Zellen der ersteren Art bemerkbar, ohne dass sie von entsprechenden äusseren Formveränderungen begleitet gewesen wären. Besonders liess es sich feststellen, dass durch ein von Innen her erfolgendes Vorrücken von Körnermassen peripherische Zellenbezirke, die zuvor durchsichtig gewesen waren, nachträglich getrübt wurden. An den in Bewegung tretenden Zellen leitete sich die Formveränderung durch eine einseitige Anhäufung von Hyaloplasma ein. Die sich anhäufende Substanz trieb sich weiterhin in Form von breiten Buckeln vor, deren oft kurz hintereinander mehrere nahe beisammen entstanden und später zu einem gemeinsamen Hügel verschmolzen.

Sowohl an ruhenden, als an bewegten Zellen waren ovale Kerne sichtbar, deren grosse Axe zwischen 20—25, deren kleine zwischen 15—18 μ betrug. Im Körnerplasma liegend, hoben sie sich als durchsichtige, scharf umsäumte Körper von ihrer Umgebung ab. Kernkörper oder anderweitige Einlagerungen vermochte ich mit Sicherheit nicht zu erkennen, womit natürlich nicht die Abwesenheit solcher Bildungen bestimmt ist.

Unter den einfach geformten, meistens deutlich kernhaltigen Blastomeren bin ich auf eine Doppelzelle gestossen, von Biscuitform und von 95 μ Länge und 53 μ Querdurchmesser. Eine Anfangs seichte Furche trennte die zwei kuglig geformten Seitenhälften. Der Leib der beiden, annähernd gleich grossen Zellenhälften war zu der Zeit bis zum Rande hin fein getrübt, ein Kern war nicht sichtbar (Fig. 5 *a*). Schon wenige Minuten, nachdem ich diese Doppelzelle eingestellt hatte, war die Trennungsfurche zwischen den beiden Hälften tiefer und schärfer geworden, und zugleich zeigte sich hier die Oberfläche mit einigen feinen, ringförmig angeordneten Fältchen besetzt. Es blieb indessen nicht bei dieser einfachen Einschnürung, es sonderte sich von der einen Kugel ein flaschenhalsartiges Zwischenstück von etwa 12—15 μ Länge und 15—18 μ mittlerer Breite. Von da ab verlor sich die regelmässige Kugelform der beiden Seitenhälften, es traten in wechselnder Reihenfolge bald an der einen bald an der anderen Hälfte hyaline Buckel hervor, wodurch deren Form mehr und mehr unregelmässig wurde. Die Gesammtwirkung dieser Veränderungen war eine erhebliche Verlängerung der Doppelblastomere bis zu einem Maximum von 150 μ. Das Verbindungsstück zwischen den beiden, nunmehr gestreckt keulenförmigen Theilklumpen erschien im allgemeinen etwas verbogen und blieb nach der Richtung des kleineren Klumpens stets etwas breiter, als auf Seiten des grösseren. Auch lag sein engster Abschnitt nicht in der Mitte, sondern am Ansatz zum Klumpen B. Hier erwartete ich, da der Durchmesser schliesslich bis auf 7 μ herabgesunken war, die definitive Durchschnürung beobachten zu können. Allein statt dessen traten gerade in der Nähe des Zwischenstückes neue Buckel hervor und die beiden Theilklumpen begannen, sich wieder der Kugelform zu nähern. Nach mehr denn $1\frac{1}{2}$stündigem Formenspiel hatte das Gesammtgebilde, dessen grösste Länge mittlerweile wieder auf 105 μ herabgegangen war, die Hantelgestalt zurück-

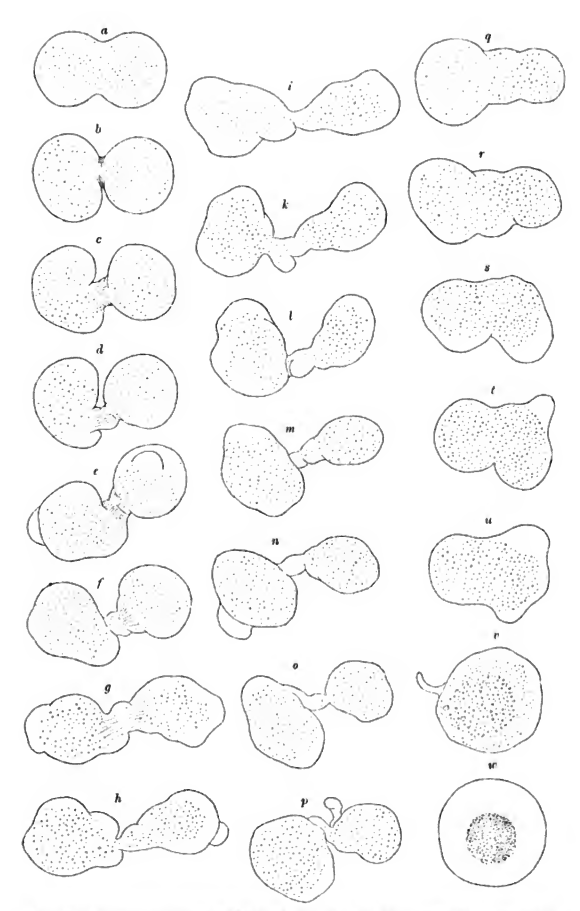


Fig. 5. Eine Blastomere aus dem Keim der Regenbogenforelle am 3. Tag nach der Befruchtung. Vergr. 320 fach. Beginn der Beobachtung 45 1/2 St. n. d. Befr. Die Figuren *a*—*p* geben den Wechsel der Formen während der ersten Stunden nach Eröffnung des Eies (zwischen 10 1/2 und 12 1/2 Uhr). Zwischen *p* und *q* war die Beobachtung auf 1/2 Stunde unterbrochen, *q* Mittags 1 Uhr, *r* 1 1/2 Uhr, *s* Nachmittags 4 Uhr, *t* 4 1/2 Uhr, *u* 4 3/4 Uhr, *v* Abends 7 1/2 Uhr und *w* am folgenden Morgen 10 Uhr.

gewonnen, durch die es in einer früheren Phase (Fig. 5 *c*) hindurchgegangen war. — Ein Besuch unterbrach die Continuität meiner Beobachtung auf $\frac{1}{2}$ Stunde, und als ich nach dieser Zeit wieder in's Mikroscop sah, war das Verbindungsstück mittlerweile breit geworden und bauchig aufgetrieben (Fig. 5 *q*). Noch zeigte sich der Körper durch zwei Furchen in drei Abschnitte geschieden. Drei Stunden später (Nm. 4 Uhr) war nur noch eine Ringfurche vorhanden, die allmählich flacher wurde, bis dann endlich ($7\frac{1}{2}$ Uhr Abends) die Blastomere eine nahezu kuglige Gestalt angenommen hatte und an einer Stelle einen fingerförmigen Fortsatz zeigte. In ihrem Innern unterschieden sich nun eine grobkörnige, eine darauf folgende staubdurchsetzte und eine hyaline äussere Schicht. Die Scheidung dieser Schichten war eine unvollkommene, dagegen hatte sich am folgenden Morgen 10 Uhr, d. h. nahezu 24 Stunden nach Herstellung des Präparates, der Inhalt der nunmehr regelmässig gewordenen Kugel sehr scharf in eine körnige Innenmasse und eine breite hyaline Mantelschicht getrennt. Der Durchmesser der Gesammtkugel betrug jetzt 75 μ, der der körnigen Innenkugel 35 μ. In diesem Zustand war die Zelle bewegungslos geworden, entweder definitiv abgestorben oder doch scheintodt.

Die beschriebene Reihenfolge von Formen führt zur Ueberzeugung, dass die Zelle im Beginn der Beobachtungsperiode in Theilung begriffen war, dass sie aber im regulären Ablauf des Prozesses gestört worden ist, und nun weiterhin mehr oder minder regellose Zuckungen ausgeführt hat, bis sie dann schliesslich bei eintretender Beruhigung zur Kugelform zurückgekehrt ist. Für die Bedeutung der zuerst beobachteten als Theilungsformen sprechen ausser der regelmässig angelegten Ringfurche die Unsichtbarkeit von scharf umgränzten Kernen und die im Zwischenstück sichtbar werdenden Verbindungsstrahlen. Als reguläre Theilungsformen sind übrigens wohl nur die beiden ersten zu verstehen. Schon von Fig. 5 *c* ab beginnen Form- und Lageverzerrungen der beiden Hälften, wobei das Verbindungsstück abwechselnd dünner und dicker wird und auch die Mächtigkeit der beiden Hälften nicht unerheblich wechselt. Während der früheren Stufen *c* und *d* ist das Verbindungsstück noch hell und zeigt eine zarte Streifung, es lassen sich mit anderen Worten im Trennungsgebiet Verbindungsstrahlen erkennen, wie sie auf ent-

sprechenden Theilungsstufen als Reste der Centralspindel vorhanden zu sein pflegen.

Eine Störung von Furchungstheilungen ist, sowohl von O. HERTWIG, als von BOVERI experimentell herbeigeführt worden.[1]) Als störende Einflüsse sind Pressung und Kälte zur Anwendung gelangt. Im vorliegenden Fall ist die spezielle Ursache der Störung nicht mit Sicherheit anzugeben. Es ist indessen leicht einzusehen, dass die Lebensbedingungen der Blastomeren durch die Herausnahme des Keimes aus dem Ei und durch dessen Ausbreitung auf dem Objectträger sehr aus der Norm heraus gebracht worden sind.

Die grossen Blastomeren von der Art der oben beschriebenen mit ihrem reichlichen Körnerplasma sind besonders geeignet zu zeigen, wie rasch Hyaloplasma sich anzusammeln und wie vollständig es andererseits wieder zu schwinden und anscheinend in Körnerplasma sich umzuwandeln vermag. Bald erscheinen die Blastomeren bis zum Rande hin getrübt, bald sind sie mit breiten Auswüchsen durchsichtiger Substanz besetzt. Diese treten stets rasch auf, nehmen rasch an Ausdehnung zu, und ihr Hervortreten führt zu ausgiebigen Formveränderungen der Oberfläche. Die Trübung durchsichtiger Bezirke, soweit es sich nicht um ein massenhaftes Nachströmen von Körnerplasma handelt, erfolgt dagegen meistens allmählich und ohne nachweisliche Verknüpfung mit Formveränderungen der Blastomeren.

Bei Zellen mittlerer Grösse (30—40 μ) ist der allgemeine Typus der Bewegungen derselbe, wie wir ihn bei grösseren Blastomeren kennen gelernt haben. Die hyaline Substanz hat verhältnissmässig sehr zugenommen und sie bildet an der Peripherie Mantelschichten von wechselnder Breite. Die Zellenbewegungen leiten sich auch bei diesen Elementen durch die Bildung heller Buckel ein, die man nicht selten an ihrer Basis eingeschnürt findet. In diese hyalinen Buckel kann, nachdem sie

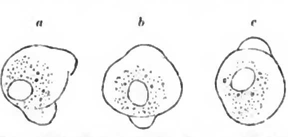


Fig. 6. Keimzelle der Bachforelle am 7. Tage n. d. Befr. in 3 sich folgenden Formen. Vergr. 700fach. Der untere Buckel von *a* wird körnig und ist bei *c* völlig eingezogen, dafür ist oben ein neuer Buckel hervorgetreten.

1) BOVERI Zur Physiologie der Kern- u. Zellentheilung. Sitzungsber. der Physik. med. Ges. in Würzburg 31. Oct. 1896.

eine gewisse Grösse erreicht haben, Körnerplasma nachrücken. Geht das Einströmen lebhafter vor sich, so bekommt man den Eindruck, als ob die innere Masse, flüssiger, als die äussere, in einen von dieser gebildeten Sack nachflösse. Dasselbe Verhalten kennt man längst von Amöben und von farblosen Blutzellen. KÜHNE hat die hyalinen Ausbauchungen, in die Körner nachströmen, geradezu als Bruchsäcke bezeichnet.[1]) Ist das Körnerplasma sparsamer geworden, so sieht man Körner einzeln oder zu zweien und dreien in die hyalinen Gebiete hineinrücken, bald langsam gleitend, bald mehr ruckweise. Die Körner können bis dicht an den äusseren Zellenrand gelangen. Dabei constatirt man, dass von verschiedenen, neben- oder hintereinander vorrückenden Körnern, die einen rascher, die anderen langsamer sich verschieben, es können demnach die einen von den anderen überholt werden. Die Verschiebung geschieht, soweit ich verfolgen kann, stets im Sinn des hervorgetretenen Ausläufers. Die rasch hervortretenden Zellenauswüchse erreichen bald ihre maximale Grösse

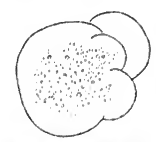


Fig. 7. Keimzelle der Bachforelle am 7. Tage n. d. Befr. Vergr. 800fach. Die Zelle zeigt nebeneinander mehrere hyaline Buckel.

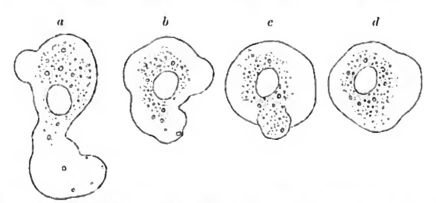


Fig. 8. Eine frei schwimmende Zelle aus dem Forellenkeim am 7. Tage nach der Befruchtung. Vergr. 850fach. Die Zelle zeigt bei *a* einen grossen hyalinen Auswuchs, in den einzelne dunkle Körnchen einwandern, bei *b* ist der Fortsatz verkürzt und stärker getrübt, noch mehr gilt dies von *c*, und bis *d* ist er völlig eingezogen. Dafür hat sich rechts ein neuer Fortsatz mit breiter Basis gebildet.

und sie sind zu der Zeit am durchsichtigsten. Mit dem reichlicheren Eintritt körniger Substanz werden sie zusehends kleiner, ihre Oberfläche wird zuweilen etwas runzlig und schliesslich werden sie völlig eingezogen (Fig. 6 und Fig. 8). Die ausgiebige Entwick-

1) W. KÜHNE Untersuchungen über das Protoplasma u. die Contractilität. Leipzig 1864. S. 29.

lung von Hyaloplasma ist ein hervorragender Character der Fischkeimzellen, der mit fortschreitender Furchung immer mehr hervortritt. Auch der Körper des frisch angelegten Embryos ist auffallend durchsichtig. Dabei ist das Hyaloplasma stark lichtbrechend, und die Zellcontouren sind nur um Weniges blasser, als die der Fetttropfen. Immerhin heben sich die innerhalb der Zellen liegenden Körner und Tröpfchen vom Plasma selbstständig ab, besitzen also noch stärkere Lichtbrechung als dieses.[1])

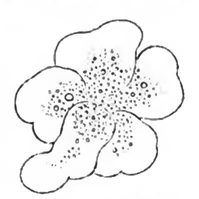


Fig. 9. Zellengruppe aus demselben Keim wie Fig. 8. Die sämmtlichen Zellen zeigen ihren körnigen Abschnitt nach einwärts gekehrt.

Die Bewegungsform, deren Beschreibungen ich oben mitgetheilt habe, characterisirt sich dadurch, dass die von den Zellen ausgehenden Auswüchse stets in Form gerundeter durchsichtiger Buckel auftreten. Von einem Zerfliessen oder einem peripherischen Ineinanderfliessen von Fortsätzen ist nie eine Spur zu bemerken. Bei Rhizopoden hat man diese Bewegungsform als lobose bezeichnet, und ihr eine reticulose gegenüber gestellt, bei der der Plasmakörper langgestreckte, feine Pseudopodien entsendet, die da, wo sie distalwärts zusammentreffen, mit einander verschmelzen und Netze bilden können.[2])

An unserem Objecte vermögen sich neue Buckel zu bilden, während früher vorhandene sich zurückbilden, es können aber auch an benachbarten Stellen gleichzeitig zwei oder drei Hervortreibungen entstehen, und benachbarte Buckel, die Anfangs getrennt hervortraten, können bei weiterem Auswachsen mit ihrer Basis in einanderfliessen.

Im Ganzen hat es bei diesen Bewegungsvorgängen den Anschein, als ob die hyaline, die Peripherie der Zellenleiber einnehmende Masse die activ bewegliche sei, und als ob das Verhalten des Körnerplasma von ihr bestimmt werde. Diese Ansicht ist weit verbreitet und ich habe sie früher auch getheilt. Ich bin indessen davon zurückgekommen und gedenke unten den Nach-

1) Von den kuglig zusammengezogenen farblosen Blutzellen von Salamandern macht LIEBERKÜHN gleichfalls die Bemerkung, »dass ihr Lichtbrechungsvermögen sie leicht mit Fettkugeln verwechseln lasse«. l. c. S. 358.

2) L. RHUMBLER Physikalische Analyse von Lebenserscheinungen der Zelle. Im Archiv für Entw.-Mechanik Bd. VII S. 114.

weis zu führen, dass das Morphoplasma die activ bewegliche Substanz der Zellenleiber ist.

Ueber fingerförmige Plasmafortsätze.

Es wurde oben erwähnt, dass sich an Keimzellen in bestimmten Fällen das Hyaloplasma einseitig als ein cylindrischer Körper ansammelt, an dessen einem Ende das Körnerplasma mit nur schmaler Umhüllung zurückbleibt. Die Zelle wird, um einen von RHUMBLER für Amöben gebrauchten Ausdruck anzuwenden, zu einem einzigen grossen Pseudopodium.[1]) Wenn mehrere neben einander liegende Zellen ihre Pseudopodien in etwas divergenter Richtung hervortreiben, so liegt der Vergleich mit den gespreizten Fingern einer Hand sehr nahe, um so mehr, da die Fortsätze vielfach eine phalangenartige Zwei- oder Dreigliederung zeigen. Solche fingerförmige Zellenfortsätze scheint auch WEIL an Zellen des Forellenkeimes gesehen zu haben, wenn er sagt, dass die Fortsätze der sich bewegenden Zellen in der Mehrzahl der Fälle cylindrisch hyalin sind.

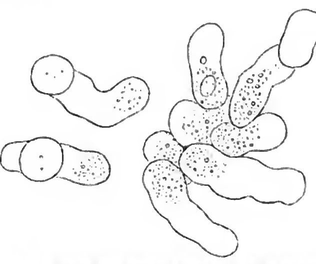


Fig. 10. Zellen mit fingerförmigen Fortsätzen, aus einem Forellenkeim vom 6. Tage n. d. Befr. Vergr. 700fach.

An den grossen Blastomeren der ersten Furchungszeit habe ich keine fingerförmigen Fortsätze wahrgenommen, wohl aber treten diese in den etwas vorgerückteren Furchungsperioden sehr ausgeprägt hervor. Wird nämlich der Inhalt von Bachforelleneiern zwischen dem 5. und ungefähr dem 12. Tage nach der Befruchtung (d. h. in der Periode zwischen Ablauf der Furchung und der Embryobildung) in eine RANVIER'sche feuchte Kammer gebracht, so kommen die Zellen zum Theil in grössern zusammenhängenden Massen zur Beobachtung, zum Theil einzeln oder als kleinere Klumpen von wenigen Elementen. Mag

1) RHUMBLER l. c. S. 118.

nun die Menge der beisammenliegenden Zellen klein oder gross sein, so behalten diese nur während kurzer Zeit ihre anfänglich vorhandenen rundlichen Formen bei. Alle am Rand der Zellenhaufen befindlichen Elemente treiben fingerförmige hyaline Fortsätze, die frei über die Oberfläche des Zellenhaufens hervortreten und dieser ein eigenthümlich unruhiges Ansehen verleihen. Es dauert einige Minuten bis die Erscheinung ihr Maximum erreicht hat, und das Hervortreten der fingerförmigen Fortsätze erfolgt stufenweise. Zunächst treten nahe bei einander mehrere hyaline Buckel auf, die an ihrer Basis in einander übergehen und von denen dann schliesslich einer das Hyaloplasma der übrigen in sich aufnimmt. Ist an einem Zellenhaufen die Hervortreibung fingerförmiger Fortsätze auf ihrem Höhepunkt angelangt, so ist dessen Hyaloplasma völlig an die Peripherie verlagert, und das Innere des Haufens umschliesst das zurückbleibende Körnerplasma. Die maximale Entwickelung fingerförmiger Fortsätze dauert nicht lange an, diese verbiegen sich weiterhin, bekommen Einschnürungen und werden zuletzt eingezogen, während an anderen Stellen neue Buckel hervorsprossen (Fig. 11). Beim ersten Hervortreten sind die Fortsätze stets am klarsten. Treten dann späterhin Körner in sie ein, so kann dies in mehr ruckweiser oder in langsam gleitender Bewegung geschehen. Das Eindringen von Körnern in die hyalinen Fortsätze leitet auch hier deren Einziehung ein.

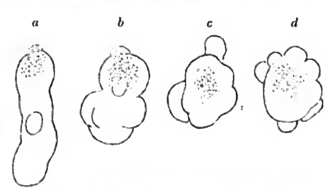
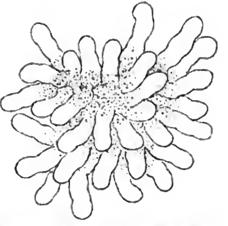


Fig. 11. *a* Zelle mit fingerförmigem Fortsatz aus einem Forellenkeim vom 10. Tage n. d. Befr. Vergr. 800fach. Hervorzuheben ist die Stellung des Kernes im hyalinen Theil der Zelle. Die Figuren *b*, *c* und *d* zeigen Rückbildung des fingerförmigen Fortsatzes und Entstehung neuer Buckel. Der Kern ist bei *b* zur Hälfte von Körnerplasma umgeben, bei *c* und bei *d* davon verdeckt.


Fig. 12. Grössere Gruppe von Zellen mit fingerförmigen Fortsätzen aus einem Forellenkeim vom 10. Tage n. d. Befr. Vergr. 600fach.

An frei schwimmenden Zellen kann man die schrittweise

Umgestaltung der ausgeprägten Fingerform bis zur annähernden Kugelform verfolgen (Fig. 11). Ueberlässt man ein Präparat, das die Erscheinung der fingerförmigen Fortsätze sehr ausgeprägt gezeigt hatte, in der feuchten Kammer sich selber, so findet man nach einiger Zeit, nach einem halben oder ganzen Tag, unter den frei umherschwimmenden Zellen nur noch rundliche Formen. Da, wo aber Zellen in Haufen beisammenliegen, da hat sich deren gemeinsame Oberfläche geglättet, und die an der Oberfläche des Haufens liegenden Zellen treten nur noch wenig oder gar nicht mehr aus der Reihe hervor. Bei weiter fortgeschrittenen Entwickelungsstufen können sie sich geradezu zu epithelartigen Gesammtschichten aneinander passen und anstatt rein kugliger, eckige Formen annehmen. (Fig. 13.)

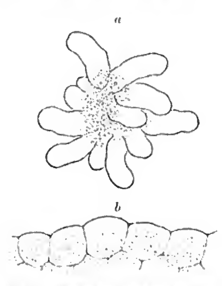


Fig. 13. *a* Zellen mit fingerförmigen Fortsätzen aus einem Forellenkeim am 11. Tage n. d. Befr., kurz nach Eröffnung des Eies. *b* Drei Stunden später. Die Zellen haben rundliche Form angenommen und da, wo sie haufenweise beisammen liegen, hat sich ihre Oberfläche epithelartig geglättet.

Die oben beschriebene Erscheinung des raschen und massenhaften Hervortretens fingerförmiger Fortsätze aus allen frei liegenden Zellen frisch untersuchter Keime findet im Ablaufe ungestörter Entwickelungsvorgänge keine unmittelbare Parallele. An durchsichtigen Eiern kleinerer Fische kann man alle Entwickelungsphasen bis zur Bildung, ja bis zum Freiwerden des Embryos verfolgen, und doch ist m. W. Nichts gefunden worden, was der oben beschriebenen Erscheinung gleich käme. Auch habe ich an den Zellen gut fixirter Lachs- und Forellenkeime mancherlei charakteristische Bewegungsformen gesehen, aber keine ausgebildeten fingerförmigen Fortsätze. Offenbar bedarf es besonderer Bedingungen, um gleichzeitig grössere Mengen von Zellen zur Bildung fingerförmiger Fortsätze zu veranlassen. Diese Bedingungen müssen allgemeiner Art sein, denn wir sehen, dass während einer gewissen Entwickelungsperiode alle Zellen in gleicher Weise reagiren. Die Reaction erfolgt rasch, aber nicht andauernd, und man ist am ehesten versucht, an einen chemischen Reiz zu denken. Solch ein Reiz kann der Sauerstoff sein, mit dem sofort nach Eröffnung des Eies alle an der Oberfläche des Keimes oder seiner Frag-

mente liegenden Zellen in Berührung kommen müssen. Der Einfluss des Sauerstoffs auf die Bildung von Pseudopodien ist ja auch anderweitig dargethan. Eine zweite Reiz-Möglichkeit liegt in der Aenderung des Mediums, von dem die Zellen vor und nach der Eieröffnung umspült werden. Nach Eröffnung des Eies schwimmen sie im flüssigen Dotter, dem sich die geringen Mengen von Wasser beigemengt haben, die zwischen Kapsel und Rindenschicht vorhanden waren. Vor der Eieröffnung sind die Zellen des Keimes vom flüssigen Dotter nicht unmittelbar umspült worden. Die Zellen der unteren Keimfläche stossen ja zunächst an den Periblast, die der oberen Keimfläche an die intracapsulare Wasserschicht. Es ist also immerhin denkbar, dass die Dotterflüssigkeit auf die frisch mit ihr in Berührung kommenden Zellen als Reiz wirkt und sie zum Hervortreiben der Pseudopodien veranlasst. Die Fragen sind dem Experimente zugänglich und später wieder aufzunehmen.

Kaum weniger interessant als die Bildung fingerförmiger Fortsätze ist die nachträgliche Glättung der Zellenflächen und die Bildung epithelartiger Platten. Hier handelt es sich nicht um einen im Laufe der Entwickelung ungewöhnlichen, sondern im Gegentheil um einen vielfältig wiederkehrenden Vorgang. Denn überall, wo Blastomeren haufenweise beisammen liegen, da ordnen sich nach einiger Zeit die oberflächlich liegenden, zu zusammenhängenden, glatt sich abgränzenden Platten, zu mehr oder minder scharf characterisirten Epithelschichten. Auf diese Verhältnisse habe ich bei einem früheren Anlasse hingewiesen und dort auch an die Versuche von Roux erinnert, der gefunden hat, dass frei schwimmende Furchungszellen früherer Stufen sich gegenseitig anziehen und an einander anlegen.[1])

Die Organisation des Protoplasmas.

Bei der nachfolgenden Darstellung halte ich mich ausschliesslich an das Protoplasma von Blastomeren und von jugendlichen Zellen. Die grossen Schwierigkeiten, mit denen die Plasmaforschung

1) Ueber mechanische Grundvorgänge thierischer Formenbildung. His Archiv 1894 S. 56 ff. und W. Roux über die Selbstordnung der Furchungszellen. Berichte des naturw. Vereins in Innsbruck, April 1893.

zu kämpfen hat, werden erheblich vermehrt, wenn man ohne Weiteres Nervenzellen, Muskelzellen, Drüsenzellen, Infusorien und überhaupt Alles was lebende Materie enthält, zusammenfasst, und die an einem Material gewonnenen Erfahrungen auf anderes überträgt. Das Studium des jugendlichen Protoplasmas und die Geschichte seiner weiteren Umbildungsformen sind Aufgaben getrennter Natur. Zu den secundären Umbildungen des Zellplasmas gehören: die Anhäufung von gewissen Reservestoffen, von Dotterkörnern, Fetttropfen u. a. m., sodann die Ausscheidung der verschiedenartigen Sekretstoffe und die Bildung spezifisch organisirter Elementartheile, der Muskel- und der Nervenfibrillen u. s. w. Zu den secundär entstandenen Bildungen gehören die mancherlei Formen von Cuticular- und Hautschichten in ihren verschiedenen Abstufungen von weichen gallertartigen Massen bis zu festen elastischen Häuten. Diese Bildungen scheinen vielfach durch Erhärtung von oberflächlich gelegenen Hyaloplasmaschichten zu entstehen, und wenn einzelne Autoren, wie O. HERTWIG, die Ausdrücke Hyaloplasma und Hautplasma synonym gebrauchen, so gehen sie von der Voraussetzung aus, dass das Hyaloplasma überhaupt ein relativ festes Material sei. Die Voraussetzung kann zwar auf secundäre Umbildungsproducte passen, nicht aber auf die primäre Substanz.

Zu den aus Morphoplasma hervorgehenden inneren Verdichtungsproducten von Zellen gehören u. A. das Neurospongium der Centralorgane und die verschiedenen Stützgerüste von Sinnesorganen (Retina, CORTI'sches Organ u. A.). Das Wesen der zahllosen secundären Umbildungen des Protoplasmas zu ergründen, ist eine Aufgabe, zu deren Lösung wohl erst eine weiter fortgeschrittene Histochemie die Angriffspunkte bieten wird.

Nach meiner in früheren Aufsätzen entwickelten Ueberzeugung besteht der Leib von Blastomeren oder von jungen Zellen zunächst aus einem morphoplastischen Gerüst, das nach einwärts das Kerngebiet mit umfasst, und das nach auswärts in einer membranösen Gränzschicht seinen Abschluss findet.[1]) Die Maschen des Gerüstes sind von einer durchsichtigen zähen Flüssigkeit, dem Hyaloplasma eingenommen. Morphoplasma und Hyaloplasma treten bis zur Gränzschicht hin allenthalben gemengt auf, aber in sehr wechseln-

1) HIS über den Keimhof oder Periblast der Selachier l. c. S. 14 ff., über Zellen- u. Syncytienbildung l. c. S. 499 ff.

dem Verhältnis, indem bald das Hyaloplasma, bald das Morphoplasma überwiegt. Im ersteren Fall erscheint am lebenden Präparat die Masse durchsichtig, im letzteren aber körnig. Wie die Betrachtung feiner Schnitte ergiebt, so sind auch die anscheinend hyalinen Stellen des Zellenleibes noch von einzelnen Morphoplasmafäden durchsetzt und andererseits lassen auch die dichtesten Stellen des Körnerplasmas Lücken für hyaline Substanz. Bei dem starken Lichtbrechungsvermögen des Hyaloplasmas ist es verständlich, dass feine eingelagerte Bälkchen so gut wie unsichtbar bleiben und ihr Verhandensein nur dann verrathen, wenn sie die Träger stark lichtbrechender Körner sind. Wo in der lebenden Zelle anscheinend isolirte Körner die hyalinen Gebiete durchwandern, da sind sie, gemäss den durch gefärbte Präparate erhaltenen Aufschlüssen, nicht wirklich frei, sondern in Strängen eines feinen bis zur Peripherie vordringenden Gerüstes eingeschlossen. Innerhalb des stark lichtbrechenden Hyaloplasmas differenzirt sich dies feine Gerüst höchstens andeutungsweise. Ebenso erscheint ja auch der Kern an lebenden Zellen nur als ein durchsichtiger Körper. Mit ZEISS' Apochromat 2 mm konnte ich an Blastomeren von 40 μ an der Oberfläche durchsichtiger Kerne noch ein blasses oberflächliches Netzwerk unterscheiden. In anderen Fällen war auch davon Nichts zu sehen. An Zellen mit breiten fingerförmigen Fortsätzen kann der Kern zeitweise ganz und gar im durchsichtigen Theil des Zellenleibes liegen, dann aber wieder vom körnigen Theil theilweise, oder vollständig umschlossen werden (Fig. 11). Alles weist eben darauf hin, wie lückenhaft das Bild ist, das wir durch die Beobachtung lebender Zellen von deren innerer Organisation bekommen.

An dünnen Schnitten fixirter Keime erscheint das Morphoplasma als ein sehr zierliches Gerüst, dessen Fäden von kleinen Körnchen, den Mikrosomen oder Plasmosomen, durchsetzt sind. Letztere von J. ARNOLD[1]) bevorzugte Bezeichnung hat das für sich, dass sie die betreffenden Körnchen als integrirende Plasmabestandtheile characterisirt. Allerdings ist in praxi die Unterscheidung von den nicht integrirenden Bestandttheilen, Dotterkörnern, Fetttröpfchen, Sekretkörnern u. s. w. sehr schwierig. VAN BENEDEN hat s. Z. (1883) das von Körnchen durchsetzte Plasma-

1) S. u. A. ARNOLD Anatom. Anzeiger Bd. XV. S. 402.

gerüst als „treillage de fibres moniliformes“ bezeichnet.[1]) Die Plasmosomen sind längs der Fäden des Gerüstes in mehr oder minder unregelmässigen Abständen vertheilt, man darf daher nicht sagen, dass die Fäden aus aneinander gereihten Körnchen bestehen. Wir haben an ihnen als besonderen Bestandtheil ein Bindemittel zu unterscheiden, das wahrscheinlich aus einer zähen, mit dem Hyaloplasma nicht mischbaren Flüssigkeit besteht. Nur unter einer solchen Voraussetzung lässt sich der rasche Wechsel in Form und Vertheilung des Gerüstes einigermassen verstehen.

Die Annahme, dass nicht nur das Hyaloplasma, sondern auch das Bindemittel des Morphoplasma als eine zähe Flüssigkeit aufzufassen sei, bedeutet, wie man sieht, eine nicht unwesentliche Annäherung an Bütschli's Lehre von der Schaumstructur des Plasmas, denn auch diese Lehre nimmt das Vorhandensein von zwei sich nicht mischenden Flüssigkeiten an. In ihrer consequenten Durchführung verlangt aber diese Lehre, dass alle die Gerüstformen, die die mikroscopische Beobachtung enthüllt, als blose Durchschnittsbilder eines Wabenbaues gedeutet werden. Das Vorkommen ächter Vacuolen- und Schaumbildungen im Bereiche mikroscopischer Formen ist kaum zu bestreiten, weniger leicht ist es zu sagen, wieweit das Gebiet solcher ächter Schaumbildungen reicht. Meinerseits kann ich es mit der unmittelbaren Beobachtung nicht vereinbaren, dass alle Plasmagerüste und Plasmafäden nur der Ausdruck durchschnittener Wabenwände sein sollen. Man sieht diese Gebilde doch vielfach als Stränge und Fäden, zum Theil auf Querschnitten und unter Bedingungen, die eine Verwechselung mit Membranen völlig ausschliessen. Ueberdies erscheinen die inneren Umlagerungen der Plasmabestandtheile sehr viel verständlicher, wenn man einen freien Zusammenhang aller vom Hyalo-

1) In seiner Eröffnungsrede der Tübinger Anatomenversammlung hat Flemming eine kritisch-historische Uebersicht über die Lehre von den Protoplasmastructuren und, in deren Verlauf, auch eine summarische Darstellung seiner eigenen jetzigen Auffassung gegeben. Flemming's Mitom entspricht nach dieser gegenwärtigen Definition, soweit ich sehe, zum guten Theil der obigen, von mir mitvertretenen Auffassung eines von Körnchen durchsetzten Fadengerüstes. Nur scheint Flemming die eingelagerten Körnchen (die Plasmosomen) für unwesentliche, falls nicht postmortale Bildungen zu halten. Darin liegt die sachliche Differenz nicht nur mit Altmann, sondern auch mit J. Arnold. Zu bedauern bleibt dabei die scharfe Form, die die zwischen den zwei so hochverdienten Forschern obwaltende Polemik angenommen hat.

plasma eingenommenen Räume annimmt, als wenn man jeden dieser Räume von seinen Nachbarn getrennt sein lässt. Hinsichtlich sprachlicher Verständigung bei Beschreibungen ist ausdrücklich zu betonen, dass BÜTSCHLI selber das Wort Gerüst als neutralen Ausdruck anerkennt und gebraucht.[1]) Andere Anhänger der Schaumlehre verfahren dagegen viel einseitiger und reden auch bei einfachen Beschreibungen in einer Sprache, die meines Erachtens mehr verwirrend als aufklärend wirkt. An Stelle von Gerüstmaschen treten Alveolen oder Waben, an die von Gerüstbälkchen Alveolen- oder Wabenwände, an die von Körnern oder Tropfen treten Vacuolen u. s. w.

Morphoplasma und Hyaloplasma verhalten sich nicht nur gegen Färbungsmittel völlig verschieden, sondern auch gegen Fixationsmittel. Die Reagentien, die wir als solche anwenden, coaguliren sämmtlich die Eiweisskörper (Chromsäure, Salpetersäure, Sublimat, Pikrinsäure, Alkohol usw.), sie wirken somit durchweg trübend auf Gewebsbestandtheile, die eiweisshaltig sind. Nun zeigt sich aber das Hyaloplasma diesen Reagentien gegenüber auffallend indifferent, es bleibt klar und durchsichtig. An gefärbten und eingekitteten Präparaten erscheinen die Zwischenräume des morphoplasmatischen Gerüstes und die oft weiten Räume zwischen der äussern Gränzschicht und der dichten Gerüstmasse als einfache Durchsichten, als ob sie ursprünglich blos irgendwelche wässrige Salzlösungen enthalten hätten.[2]) Das ist nun deshalb nicht recht denkbar, weil das lebende Hyaloplasma stark lichtbrechend und auffallend zäh ist, somit Eigenschaften hat, die einer wässrigen Salzlösung nicht zukommen. Eher darf man an Verbindungen

---

1) Man vergl. die Aeusserungen BÜTSCHLI's im Zool. Centralblatt 1897 IV Nr. 2 anlässlich einer Besprechung von E. CRATO »Beiträge zur Anatomie und Physiologie des Elementarorganismus«. BÜTSCHLI erklärt den Ausdruck »Plasmagerüst« als ausreichend für die zähflüssigen oder festeren, stärker lichtbrechenden lamellösen, fädigen oder netzigen Theile, und »Enchylema« für die wässrigen, schwächer lichtbrechenden. Man mag übrigens über die Schaumtheorie denken, wie man will, so kann man doch nur mit grosser Anerkennung der umsichtigen Versuche gedenken, die BÜTSCHLI durch Jahre hindurch über die physikalischen Eigenschaften von Schaumtropfen angestellt hat. Sie stellen auch dann, wenn man das Grundproblem nicht für gelöst hält, eine ungemein wichtige Bereicherung unseres Wissens auf dem schwierigen Gränzgebiete zwischen Physik und Plasmamorphologie dar und bieten dem Mikroscopiker zahlreiche neue Anschauungen und Begriffe.

2) Man vergl. z. B. Fig. 20 meiner Schrift über Zellen u. Syncytien S. 439.

denken, die, den Fetten ähnlich, bei den üblichen Methoden der Schnittbehandlung mit Xylol oder ähnlich wirkenden Substanzen in Lösung gehen. Um über diese Fragen in's klare zu kommen, bedarf es noch sorgfältiger mikrochemischer Untersuchungen. Vorläufig ist soviel festzuhalten, dass die hyaline Substanz der Zellenleiber gegenüber dem Morphoplasma eine chemisch durchaus eigenthümliche Stellung einnimmt. Im Uebrigen dürfen wir uns nicht verhehlen, dass die Charaktere des Hyaloplasma wesentlich nur negative sind, Mangel an eigener Form und an trübenden und färbbaren Bestandtheilen. Es können im Hyaloplasma möglicher Weise sehr verschiedenartig Bestandtheile enthalten sein, wässrige Salzlösungen, gequollene Schleimstoffe, Seifen, gelöste Fette u. a. m.

In Eiern der verschiedenen Thierklassen und in den daraus entstehenden Blastomeren treten uns mehrere Typen der Plasmaanordnung entgegen. Zunächst haben wir den Gegensatz von dotterbeladenem (lecithophorem) und von reinem Plasma. Bei einer grossen Zahl von Eiformen ist bekanntlich das Plasma durchsetzt oder geradezu zur Seite gedrängt durch mehr oder minder grosse Massen von Nebendotter oder Deutoplasma. Bald sind es stark lichtbrechende Dotterkörner oder Dotterplättchen, bald durchsichtige oder körnig getrübte Blasen (weisse und gelbe Dotterkugeln), bald Fetttropfen, bald Ansammlungen von klaren Flüssigkeiten. Die Herkunft und chemische Natur dieser Substanzen haben in F. MIESCHER einen ebenso ausdauernden als sorgfältigen Bearbeiter gefunden.[1]) Es sind die Dotterstoffe im Eiplasma als eine Art innerer Sekretstoffe entstanden und sie sind zu späterer Wiederaufnahme in das Plasma oder in die aus ihm hervorgehenden Zellen bestimmt. Gleichwohl haben wir sie als dem lebenden Plasma fremd gewordene, aus dessen organischem Verband ausgeschiedene Ablagerungen anzusehen. Ihr Verhältniss zum Plasma ist allenfalls vergleichbar dem Verhältniss der im Magen liegenden Speisen zum Organismus. Damit sie wieder Plasma werden,

1) F. MIESCHER histochemische und physiologische Arbeiten. Leipzig 1897; besonders wichtig für die Eiforschung ist der Aufsatz XIII Bd. II S. 304 ff. MIESCHER erklärt es als charakteristisch für die Dottersubstanz, dass in ihr alle Hauptconstituenten des Eies: Eiweiss, Nuclein, Lecithin, und sogar ein Theil des Fettes, sowie das Eisen zu einem complexen inactiven Molecül verbunden sind. Es bedarf nur eines Verdauungsfermentes und der intracellulären Verdauung dotterfressender Furchungszellen, so treten die Stoffe so auseinander, wie sie die Zelle braucht.

müssen die Dotterstoffe neuerdings in Lösung treten, chemisch gespalten und vom lebenden Plasma assimilirt werden. So lange dies nicht geschehen ist, erscheinen sie für alle activen Plasmaleistungen, für die Ortsbewegungen und Theilungsvorgänge als verzögernder Ballast.

Die Entwickelung meroblastischer Eier bereitet sich im Allgemeinen dadurch vor, dass sich das Keimplasma von seinen Einlagerungen scheidet und in mehr oder minder reiner Form anhäuft. Dieser Sonderungsprozess kann früher oder später vor sich gehen, bei Knochenfischen erreicht er seinen Höhepunkt nach dem Eintritt der Eier in's Wasser. Bei ihnen geht die Isolirung des Plasmas weiter als bei vielen anderen Eiformen. Bei den meisten niederen Wirbelthieren (bei den Amphibien, Cyklostomen und Selachiern) enthalten nicht nur die ersten Blastomeren, sondern auch die bereits differenzirten Gewebszellen unverdaute Dotterplättchen in oft reichlicher Menge. Der hügelförmig sich empor wölbende Theil des Knochenfischkeimes ist von solchen Einlagerungen beinahe völlig frei, und nur die dem Dotter anliegende Basis, aus der weiterhin des Syncytium des Periblastes hervorgeht, bleibt Anfangs von Dotterbestandtheilen ausgiebiger durchsetzt. Darin liegt der besondere Werth der Knochenfischeier für Protoplasmastudien, dass in deren Keim und Blastomeren die lebende Substanz so rein und von störenden Nebenbestandtheilen frei zur Beobachtung kommt.

An Schnittpräparaten von Knochenfischkeimen treffen wir das rein vorliegende Protoplasma theils in ungegliederter, theils in gegliederter Anordnung. Als ungegliedert oder isotyp bezeichne ich das Plasma, wenn es auf grösseren Strecken hin ein gleichmässiges Ansehen zeigt, als gegliedert oder anisotyp, wenn dies nicht der Fall ist. Plasma, in dem Strahlungen vorhanden sind, oder dessen verschiedene Schichten durch ungleiche Dichtigkeit und Anordnung des Gerüstes von einander sich abheben, sind gegliedert oder anisotyp zu nennen.

Das isotype Plasma erscheint bei schwächerer Vergrösserung fein granulirt, bei stärkerer löst es sich in ein ausnehmend feinmaschiges und feinkörniges Fadengerüst auf, mit gleichmässig ausgebildeten Maschenräumen (Wabenräumen im Sinn der Schaumlehre). Sieht man ab von der körperlichen Ausbreitung, so lässt sich das Gerüst am ehesten mit sehr feinem Mull vergleichen, insofern

auch bei diesem die Maschen des Fadengerüstes eng und gleichmässig gestaltet, und die einzelnen Fäden alle von gleichem Caliber sind. Auch die den Fäden eingelagerten Plasmosomen zeigen keine auffälligen Grössenschwankungen.

Das isotype Plasma findet sich in seiner reinsten und ausgeprägtesten Form kurz vor Beginn der eigentlichen Furchung. Nach Eintritt des Spermatozoon tritt die auf dessen Mittelstück centrirte Strahlung auf, die aber Anfangs auf einen verhältnissmässig kleinen Umkreis beschränkt bleibt. Auch die bei der Theilung des ersten Furchungskernes sich entwickelnden Strahlungen greifen nicht sofort durch den ganzen Keim durch, und selbst während der nachfolgenden Stadien bleiben, allerdings gradweise vermittelt, jenseits von den ausgesprochenen Astrophären grosser Blastomeren immer noch Bezirke vom mehr oder weniger isotypem Plasma zurück.[1]) Je weiter indessen die Furchung fortschreitet, um so ausgeprägter wird innerhalb der einzelnen Zellen die Gliederung des Morphoplasma.

Schon die Aufzählung der thatsächlichen Befunde weist darauf hin, dass die Gliederung des Plasma's mit dessen Zerlegung in kleinere Territorien Hand in Hand geht, und dass es sich bei den verschiedenen Graden der Gliederung darum handelt, in wie weit sich der richtende Einfluss der von der Zeit der Befruchtung ab wirksamen, an Zahl stetig zunehmenden Centren erstreckt. Schon in den ersten Furchungsphasen, den Phasen der Zwei- und Viertheilung wird der Ort der beginnenden Furchenbildung und deren weiteres Fortschreiten durch die Lage der Centren bestimmt. Das

1) Die sauberen Zeichnungen von G. BEHRENS illustriren für die ersten paar Stunden nach der Befruchtung diese Verhältnisse in sehr überzeugender Weise (G. BEHRENS Die Reifung und Befruchtung des Forelleneies in MERKEL u. BONNET anat. Hefte Bd. X Taf. XII—XVII). Fig. 8 zeigt noch vor der Befruchtung die erste Richtungsspindel, ohne sonstige Strahlung, Fig. 10 die 2. Richtungsspindel, 55 Minuten n. d. Befr., dazu den Samenfadenkopf mit Centrosom und Strahlung; Fig. 11 u. 12 zeigen, 40 Min. n. d. Befr., Strahlungen seitlich von der zweiten Richtungsspindel. Fig. 15, 2 St. 40 Min. n. d. Befr., zeigt den in Bildung begriffenen Spermakern mit ziemlich weit reichender Strahlung, ebenso Fig. 17. In Fig. 18—20 sind Doppelstrahlungen des Spermakerns dargestellt und in Fig. 21—23 die ringsherum in isotypes Plasma auslaufenden Astrosphären an den Enden der ersten Furchungsspindel. — Für folgende Furchungsstadien verweise ich auf meine im vorigen Jahre mitgetheilten Photogramme (Zellen- u. Syncytienb. Fig. 3 u. 5), die an grossen Blastomeren das Auslaufen der Sphärenstrahlen in isotypes Plasma zeigen.

erste Auftreten von Furchen an der freien Keimoberfläche ist davon abzuleiten, dass die dem Furchungskeim zugetheilten Centrosomen in der oberen Hälfte des Keimes gelegen sind, und dass die sich ausbreitenden Astrophärenstrahlen hier zuerst bis zum Rande des Keimes vordringen. Die erste Furche entsteht im Kreuzungsgebiete der Strahlen. Zur Zeit ihres Auftretens sind die Strahlen der Astrophären sehr fein, sie hängen durch spitzwinklige Verbindungszüge allenthalben unter einander zusammen, haben somit, wie dies Erlanger und andere Anhänger der Schaumlehre mit Recht betonen, durchaus den Charakter gestreckter Maschen (sog. Waben). Peripheriewärts setzen sie sich ohne bestimmte Gränzen in die mehr isotypen Plasmagerüste fort, innerhalb deren indessen selbst bei grösseren Blastomeren noch auf breite Strecken hin eine radiäre Anordnung angedeutet sein kann.

Die zunehmende Gliederung des Plasmagerüstes innerhalb der Blastomeren verknüpft sich naturgemäss mit einer Erweiterung der Maschenräume, sowie mit einer Vergröberung der Gerüstbälkchen und einer Verminderung ihrer Menge. Das Gerüst lockert sich auf, sei es, dass die früheren feinen Bälkchen erster Ordnung zu solchen zweiter Ordnung zusammentreten, sei es, dass es überhaupt zu einer anderen Substanzvertheilung kommt.

Die membranösen Gränzschichten der Blastomeren.

Nachdem der von Schwann übernommenen älteren Lehre von den Zellenmembranen im Beginn der 60er Jahr der Krieg erklärt worden ist, hat schon der Hauptführer im Streit, M. Schultze darauf hingewiesen, dass die Protoplasmagebilde von einer Oberflächenschicht umgeben sein könnten, die dichter sei, als die unter der Oberfläche liegende Substanz. Solche verdichtete Gränzschichten sind an allen freien Flüssigkeitsflächen vorhanden, und sie beeinflussen, wie dies die Tropfenbildung zeigt, vermöge der ihnen zukommenden Spannung die Form der freien Fläche. Physikalisch bedingte Gränzschichten oder sog. Contactmembranen sind während mancher Jahre die einzige Concession gewesen, die man überhaupt zu Gunsten von Zellmembranen gemacht hat.

Von physikalischen Erwägungen anderer Art ausgehend, hat sodann Pfeffer an allen äusseren und inneren Plasmagränzen eine häutige Einfassung als Substrat diosmotischer Vorgänge an-

genommen.[1]) Er bezeichnet diese Schicht als „Plasmahaut", bemerkt aber ausdrücklich, dass deren Unterscheidung mit Rücksicht auf diosmotisches Verhalten vorgenommen und in morphologischer Hinsicht vielleicht gar nicht geboten ist. In seiner Schrift vom Jahre 1890 erklärt er die in allem Wechsel sich erhaltende Plasmahaut für ein lebendiges Organ des lebendigen Protoplasma, das aber dem übrigen Plasma gegenüber nicht autonom ist. Wie die Haut sich aus dem Plasma bildet, so können auch ihre Bestandtheile in das übrige Plasma zurückkehren.[2])

Der hier angeführte Satz PFEFFER's trifft einen Punkt, in dem meine eigene Auffassung der seinigen begegnet. Gelegentlich einer Arbeit über die Furchungszellen der Selachier habe ich vor 2 Jahren Anlass gehabt, die Frage nach der Natur protoplasmatischer Gränzschichten zu besprechen. Ich habe dort den Nachweis geführt, dass die Blastomeren von einer dünnen Substanzschicht umhüllt sind, die nach einwärts mit dem allgemeinen Spongioplasmagerüst zusammenhängt und die sich wie dieses durch Fuchsin roth färbt, während das unter der Oberfläche liegende Hyaloplasma ungefärbt bleibt. Diese Gränzschicht ist, wie ich damals bemerkte, nicht als isolirbare todte Haut zu verstehen, sondern als Theilstück eines ausgedehnteren Complexes von lebender Substanz. Dem entsprechend sind ihre physiologischen Leistungen zu beurtheilen und ihr Vermögen, den geschlossenen Zusammenhang nach zeitweiser Unterbrechung wiederherzustellen. Indem sie einen Theil des all-

1) W. PFEFFER Osmotische Untersuchungen, Leipzig 1877, und Zur Kenntniss der Plasmahaut und der Vacuolen nebst Bemerkungen über den Aggregatzustand des Protoplasmas und über osmotische Vorgänge. 1890, Abh. der K. S. Ges. d. Wissensch., math.-phys. Cl., Bd. XVI. PFEFFER sagt in der erstgenannten Schrift (S. 123): »Nennt man die ganze hyaline Umkleidung des Protoplasmakörpers Hautschicht, Hautplasma oder wohl am besten Hyaloplasma, so ist da, wo dieses eine dickere Schicht bildet, wahrscheinlich nur eine äusserste Zone maassgebend für die diosmotischen Vorgänge, die wir am Plasma beobachten. Um dieses auszudrücken, habe ich mich entschlossen, diese diosmotisch bestimmende Schicht als „Plasmahaut" oder „Plasmamembran" zu bezeichnen, und es ist natürlich möglich, dass eventuell das ganze Hyaloplasma „Plasmamembran" ist, beide Begriffe also zusammenfallen. Das körnige Plasma werde ich mit STRASSBURGER „Körnerplasma" nennen. ..... Uebrigens ist die Plasmamembran ein Theil des Protoplasmakörpers. ... Die Unterscheidung einer Plasmamembran ist nur mit Rücksicht auf diosmotisches Verhalten vorgenommen und in morphologischer Hinsicht vielleicht überhaupt nicht geboten.«

2) l. c. S. 187 ff.

3) Keimhof der Selachier l. c. S. 21—24.

gemeinen Gerüstes von lebender Substanz bildet, kann voraussichtlich ihre Substanz unter gegebenen Bedingungen in das innere Gerüst aufgenommen und von hier aus wieder erneuert werden. An Forellenblastomeren habe ich Gelegenheit gehabt[1]), festzustellen, dass die Gränzschichten durch Verdickung und transversale Verschmelzung von Morphoplasmabälkchen entstehen. Damit hat wohl die Frage nach deren Natur einen vorläufigen Abschluss erreicht.[2])

Nach Verletzung der Grenzhaut fliesst, wie wir wissen, der Inhalt der von ihnen umschlossenen Blastomeren aus einander. Die Gränzhäute bilden aber auch physiologische Abschlüsse, insofern sie den Uebergang von Strahlungen aus einem geschlossenen Zellengebiete in ein anderes unterbrechen. Auf der Stufe der Syncytiumbildung sind Uebergänge von Strahlungen aus einem Kerngebiete in ein anderes sehr weit verbreitet.

Die Gränzschichten sind wohl characterisirte Bestandtheile der Blastomeren und weit davon entfernt blose Verdichtungslagen von Hyaloplasma zu sein. Dagegen steht, soweit sie überhaupt geschlossene Bildungen sind, der Annahme kein Hinderniss im Weg, dass sie die Rolle der von Pfeffer physikalisch begründeten Plasmahäute übernehmen können.

Vor kurzem hat v. Bambecke[3]), unter Hinweis auf Waldeyer's und auf meine Erörterungen der Membranfrage, die Darstellung in Erinnerung gebracht, die Fol im Jahre 1879 von der Abgränzung von Zellen gegeben hat[4]), und er stellt ein an Fol sich anlehnendes Eintheilungsschema auf für die verschiedenen Formen von Gränzgebilden. Fol hatte vorgeschlagen, nur solche Gränzgebilde als Membranen zu bezeichnen, die doppelte Contour haben, die fester sind als das von ihnen umschlossene Plasma, und die das Vermögen verloren haben, sich als lebende Substanz mit dem letzteren wieder zu vermengen. Als weiche Grenzschichten (couches limi-

1) Zellen u. Syncytien l. c. S. 456.

2) In der Discussion bei der diesjährigen Tübinger Versammlung hat Waldeyer an die Möglichkeit erinnert, dass die Gränzschichten von Zellen vielleicht die Natur von Gitterwerken besitzen. Nach der Entstehungsweise der Gränzschichten aus ursprünglich getrennten Bälkchen ist wenigstens für die erste Zeit ihres Bestehens der Gittercharakter wahrscheinlich.

3) van Bambecke A propros de la délimitation cellulaire Bull. de la Soc. belgique de Microscopie Bd. XXIII. 1897. S. 72.

4) Fol Recherches sur la fécondation et le commençement de l'hénogénie. Genf 1879. S. 237 ff.

tantes oder couches plastiques) unterscheidet FOL dagegen solche Lagen, die das Vermögen haben, dem Plasma (Sarkode) in allen seinen Formveränderungen zu folgen und durch einfache Mischung wieder in den protoplasmatischen Kreislauf zurückzukehren. v. BAMBECKE scheint recht zu haben, wenn er die couches molles plastiques von FOL mit meinen zonae limitantes von Blastomeren in eine Reihe stellt. Nur lege ich meinerseits besonderes Gewicht auf den Nachweis, dass die von mir unterschiedenen Gränzschichten peripherische Ausbreitungen des Morphoplasma sind, dessen organischen Abschluss sie darstellen.

Die physiologischen Rollen von Morphoplasma und Hyalopasma. Die Frage, ob bei der Bewegung protoplasmatischer Gebilde deren hyaline körnchenfreie Substanz, oder deren körniger Antheil die massgebende Rolle spielen, hat schon MAX SCHULTZE beschäftigt.[1]) Bei Amoeben und Myxomyceten hat es nach ihm öfter den Anschein, als wenn die Rinde das vorzugsweise Contractile, und das körnige Innere das mehr passiv Bewegte sei, wogegen bei den Pseudopodien der Polythalamien nach Allem, was vorliegt, die zerfliessliche, weiche, körnige Substanz mit ausgezeichneter Contractilität begabt sein muss. M. SCHULTZE kommt bei seinen Erwägungen zum Ergebniss, dass wir vorläufig kein Recht haben, im Protoplasma eine Differenzirung von contractilen und nicht contractilen Schichten anzunehmen, und dass sich Organisation und Contractilität überhaupt nicht an eine bestimmte Dichtigkeit der organischen Substanz knüpfen.

Schon bei M. SCHULTZE und ebenso bei neueren Autoren, wie z. B. bei RHUMBLER, gilt es als feststehend, dass die körnerfreie Substanz, mag sie eine Aussenschicht bilden, oder als Axenfaden im Innern von Pseudopodien liegen, die zähere, die körnerhaltige dagegen die flüssigere sei. Der Satz basirt auf den an Rhizopoden gemachten Erfahrungen, indessen bleibt der Beweis dafür, dass der Satz für alle, insbesondere auch für sehr jugendliche Protoplasmagebilde gültig sei, noch zu führen übrig. Das Hyaloplasma lebender Keimzellen ist unzweifelhaft flüssig. Aus verletzten Zellen läuft es aus, und die aus benachbarten Zellen kommenden Ströme fliessen zusammen. Es ist, wie sich aus seiner Verbreitungsweise ergiebt, sehr zähflüssig. Von einer inneren

---

1) MAX SCHULTZE 1863 Bewegungserscheinungen l. c. S. 58.

Organisation desselben haben wir aber bis jetzt keine Anzeichen, wir müssen daher die Möglichkeit zugeben, dass, wie bei andern Flüssigkeiten, seine Vermischung in beliebiger Weise vor sich gehen kann, ohne dass die Eigenschaften des Ganzen andere werden. Für das Morphoplasma trifft eine solche Möglichkeit sicher nicht zu. Bei aller inneren Verschiebbarkeit, die dieser Substanz zukommt, erscheint ihr Aufbau doch als ein streng gesetzmässiger, und es ist nicht denkbar, dass eine durch äussere Kräfte bewirkte Zerstörung dieses Aufbaues wieder ausgeglichen werden kann. An gesetzlich geordnete Vorgänge im Morphoplasma knüpfen sich die Auflösung und Neubildung von Zellenkernen, das Erscheinen und Verschwinden von Strahlungen, die Ansammlung und Vertheilung von Attractionscentren und eine Reihe anderer verwandter Erscheinungen. Dem Morphoplasma eingelagert sind die verschiedenen kleineren Festgebilde, die Plasmosomen (Granula) des Gesammtgerüstes, die Chromosomen des Kernes und die Centrosomen der Sphären. Die Verschiebungen dieser Gebilde innerhalb der Zellen sind auch ihrerseits an gesetzmässig ablaufende Vorgänge im Morphoplasma geknüpft. Dabei erscheint es von secundärer Bedeutung, ob man sich das Morphoplasma als freies Gerüst gebildet denkt oder als Fachwerk eines Schaumes, denn auch die letztere Vorstellung ist nur unter der Voraussetzung haltbar, dass dem Fachwerk eine räumlich bestimmte Organisation zukomme. Die nachweisbare Organisation im Morphoplasmagerüst der Zellen und das Fehlen einer solchen im Hyaloplasma lassen darauf schliessen, dass die activen Leistungen der Zellen, mögen sie sich auf äussere Formveränderungen beziehen oder auf innere Verschiebungen, vom morphoplasmatischen Gerüst ausgehen, und dass das Hyaloplasma dabei eine secundäre, mehr passive Rolle spielt. Der Grund, den man für die active Leistung der hyalinen Substanz bei Zellconstruction anführen konnte, war die anscheinende Spontaneität, mit der sich zunächst die hyaline Rindenschicht hervortreibt. Von dem Moment an, wo wir aber wissen, dass die hyaline Rinde ihrerseits noch von einer morphoplasmatischen Haut überzogen und von morphoplasmatischen Strahlen durchsetzt ist, ergiebt sich, wie ich dies schon oben ausgeführt habe, die Möglichkeit einer völligen Umdeutung der thatsächlichen Befunde. Eine Erschlaffung der Gränzschicht und der zu ihr hinführenden Strahlen muss zu einer peripheren Ausbreitung

vom Hyaloplasma bez. zur Bildung eines buckelförmigen Pseudopodiums führen, Contraction jener Theile kann dieses wieder zum Schwinden bringen. Ob das nachträgliche Einströmen körniger Massen in ein hyalines Pseudopodium als Contractions- oder als Erschlaffungsvorgang zu deuten sei, das mag vorläufig unerörtert bleiben. Auf die Besprechung vorhandener Möglichkeiten komme ich nachher noch einmal zurück.

Mit der oben gegebenen Darstellung von der Organisation des Keimplasmas ist auch die Frage entschieden, was man vom frei fliessenden Plasma zu denken habe. Eine gewöhnliche Emulsion kann geschüttelt, d. h. es können ihre Bestandtheile durch einander gemengt und verlagert werden, ohne dass die Eigenschaften des Ganzen dadurch wesentlich andere werden. Versucht man aber die Emulsions- oder Schaumtheorie in diesem Sinne auf das Protoplasma zu übertragen, so führt sie zur Absurdität. Man kann, wenn man der Schaumlehre anhängen will, dies nur unter der Voraussetzung thun, dass das Fachwerk protoplasmatischen Schaumes gemäss der Organisation der Gesammtzelle angeordnet sei. Wird durch Verletzung der Blastomerenoberfläche das Plasma zum Ausströmen gebracht, so kann dies Ausströmen nur unter Zerstörung des früheren Zusammenhanges geschehen. Das zunächst fliessende Hyaloplasma nimmt die auseinandergerissenen Theile des Morphoplasmagerüstes mit und mengt sie in regelloser Weise durcheinander. Es stellt somit das frei fliessende Plasma Reste einer zertrümmerten Organisation dar. Damit steht auch in Uebereinstimmung, dass an Fragmenten ausgeflossenen Plasma's weder amöboide Bewegungen, noch anderweitige, als selbständige Lebenserscheinungen deutbare Veränderungen wahrzunehmen sind.

Ich kann nicht umhin, an dieser Stelle einige Sätze aus der Schrift von G. BRÜCKE[1]) über die Elementarorganismen anzuführen, einer Schrift, die man noch heute nach vollen 38 Jahren mit Genuss und mit grösster Bewunderung für den Scharfblick ihres Verfassers durchliest. BRÜCKE sagt, anlässlich seiner Kritik des älteren Zellenschema's: „Für uns ist der Zelleninhalt, die Hauptmasse des Zellenleibes selbst, ein complicirter Aufbau aus festen und aus flüssigen Theilen. Wenn man uns fragt, ob wir, da wir

1) E. BRÜCKE Die Elementarorganismen. Sitzungsb. d. math.-naturw. Classe der k. k. Ak. d. Wissensch. in Wien 1861 Bd. XLIV. S. 401.

den Zelleninhalt nicht als Flüssigkeit anerkennen, glauben, dass er fest sei, so antworten wir: Nein, und wenn wir gefragt werden, ob er denn doch flüssig sei, so antworten wir wieder: Nein. Die Bezeichnungen fest und flüssig, wie sie in der Physik Geltung haben, finden auf die Gebilde, mit denen wir es hier zu thun haben, in ihrer Gesammtheit keine Anwendung. Ich kann den Aggregatzustand des Zellenleibes weder mit dem des Eisens, des Bleies oder Schwefels in festem, noch mit dem dieser Körper in flüssigem Zustande vergleichen, und die Frage, ob der lebendige Zellenleib fest oder flüssig sei, ist im Grund ebenso absurd, als wenn ich fragen wollte, ob der Leib einer Qualle oder einer Schnecke fest oder flüssig sei, in dem Sinn, welchen die Physik diesem Ausdrucke beilegt. Auch mit den Ausdrücken für die sog. gemischten Aggregatzustände richten wir nichts aus und, wenn wir sagen, der Zelleninhalt sei eine schleimige oder eine gallertartige oder sulzige Masse, so ist dies nicht besser, als wenn jemand, der von der Organisation der Medusen Nichts weiss, dieselben als sulzige Massen, als belebte Gallerten bezeichnen wollte. Wir werden mit Nothwendigkeit dazu geführt, im Zelleninhalt einen im Verhältniss complicirten Bau zu erkennen, wenn wir die Lebenserscheinungen berücksichtigen, welche wir an demselben wahrnehmen."

Von den Complicationen des Zellenbaues, die BRÜCKE s. Z. nur erschliessen konnte, hat die offizielle Wissenschaft erst nach 2 bis $2\frac{1}{2}$ Jahrzehnten angefangen Notiz zu nehmen. Noch gegen Ende der 70er Jahre wissen die Lehrbücher vom Protoplasma nicht mehr zu erzählen, als dass es „eine mehr oder minder weiche, meist zähflüssige und schleimige Substanz sei, die in einem glashellen Bindemittel eine sehr wechselnde Menge von Eiweiss- und Fettkörnchen umschliesst"[1]), und in den populären Schriften jener Periode wird die Zelle zu einem „einfachen Klümpchen eines eiweissartigen Bildungsstoffes" oder zu einem „einfachen Schleimklümpchen". Erst das intensivere Studium der die Mitose begleitenden Vorgänge hat einen allgemeinen Wandel der Vorstellungen vorbereitet.[2])

1) H. FREY Handbuch der Histologie u. Histochemie. 5. Auflage. S. 73.

2) Ueber die Stellung, welche neuere Physiologen in der Frage nach der Organisation des Plasmas einnehmen, vergleiche man, ausser den Arbeiten von ENGELMANN, J. BERNSTEIN Die Constitution und Reizleitung der lebenden Substanz. Biol. Centralblatt XIX S. 289.

Der Wechsel in der Organisation der lebenden Substanz.

Die Organisation der lebenden Substanz findet ihren Ausdruck in der gesetzmässigen räumlichen Anordnung ihrer Bestandtheile. Nun ist aber diese Anordnung erfahrungsgemäss einem ausgiebigen Wechsel unterworfen. Der Kern kann allseitig umgränzt, oder er kann nach dem Zellplasma hin offen sein, das Zellplasma kann Strahlungen zeigen oder eine mehr diffuse Anordnung seines Gerüstes, die Blastomeren können durch gesonderte Gränzschichten zu Zellen abgeschlossen, oder sie können mit Nachbargebilden zu Syncytien verbunden sein. Diese und andere Schwankungen in der Anordnung der Theile verknüpfen sich in gleichfalls gesetzmässiger Weise mit den physiologischen Zuständen der lebenden Substanz. Dadurch compliciren sich natürlich die Aufgaben der Plasmaerforschung in ganz erheblichem Maasse, denn es genügt nicht, an einem fixirten Object das Vorhandensein von Plasmagerüsten, von Kernstructuren, Gränzschichten u. s. w. nachzuweisen. Wir wollen verstehen, wie diese Einrichtungen in der lebenden Zelle sich verhalten und wie sie mit deren wechselnden Zuständen ihren Charakter zu ändern vermögen. Naturgemäss greifen wir zunächst zur Beobachtung lebender Zellen, allein diese Erfahrungsquelle fliesst nicht so ergiebig, als wir wünschen möchten, weil die optischen Gegensätze zwischen den verschiedenen Plasmabestandtheilen nur wenig ausgesprochen sind. So werden wir eben immer wieder darauf hingewiesen, die Erfahrungen am lebenden Material zu combiniren mit den am fixirten gewonnenen. Es ist dies ein Weg zur Gewinnung einheitlicher Vorstellungen, der seinerseits an gar manchen Fehlerquellen vorbeiführt, auch stelle ich vor Allem nochmals die thatsächlichen Erfahrungen zusammen.

Der Wechsel in der Vertheilung von Morphoplasma und Hyaloplasma tritt einestheils hervor bei den amöboiden Bewegungen der Blastomeren, anderntheils im Verlauf der Kern- und Zellentheilung. Am bekanntesten ist das Verhalten lebender Zellen beim Eintritte amöboider Bewegungen, das Hervortreten hyaliner Buckel und das Nachströmen körniger Substanz in dieselben. Diese Vorgänge sind oben bereits besprochen worden, und es bleibt hier nur zu erwähnen, was sich hierüber an fixirtem Material erforschen lässt. Ein grosser Theil der Blastomeren fixirter Keime

zeigt rundliche regelmässige Formen, wie wir sie der ruhenden Zelle zuzuschreiben pflegen. In andern Fällen stossen wir dagegen auf Blastomeren, die mit mehr oder minder breiten hyalinen Vortreibungen besetzt sind, denen völlig entsprechend, die wir an lebenden, in Bewegung begriffenen Zellen wahrnehmen. Diese so charakteristisch aussehenden Zellenformen dürfen wir als fixirte Bewegungsformen deuten. Ich theile die Zeichnungen einiger solcher Zellen mit, die aus einem Lachskeim von 4 Tagen stammen. Zwei dieser Zellen (*a* und *b* Fig. 18) zeigen an ihrem linken Ende scharf abgesetzte hyaline Buckel die von sehr feinen und vereinzelten körnertragenden Fäden durchsetzt werden. Das Hyaloplasma

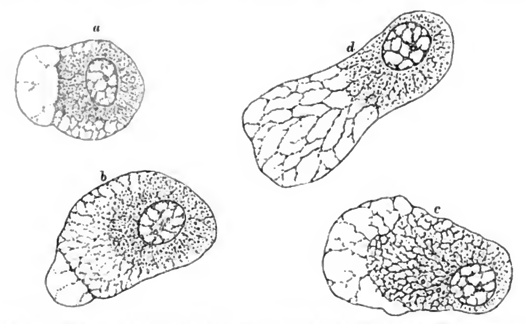


Fig. 18 u. 19. Zellen aus einem Lachskeim, 3. Tag 22 Stunden nach der Befruchtung. Fixirte Bewegungsformen. Vergr. 1000 fach.

tritt aber nirgends nackt zur Oberfläche heran, es bleibt stets von einer plasmatischen Gränzschicht umhüllt, und in diese inseriren sich die feinen, aus der Tiefe der Zelle kommenden Gerüstpfeiler. Der hyaline Vorsprung aller dieser Zellen besteht nicht aus reinem Hyaloplasma, er unterscheidet sich vom übrigen Zellenleib nur dadurch, dass das Morphoplasmagerüst sehr fein und sparsam ist, das Hyaloplasma demnach mächtig überwiegt. Andere hyaline Randgebiete der Zellen sind von einem lockeren Gerüst netzförmig verbundener Fäden durchzogen. So die linksseitigen Abschnitte der Zellen *c* und *d* Fig. 19 und der untere Vorsprung an Zelle *a* Fig. 18. Auch im Hauptkörper der Zellen

scheiden sich dichter nnd minder dicht gefügte Abschnitte, so zeigt z. B. Zelle b einen auffallenden Unterschied im Verhalten des den Kern umgebenden und des nach Aussen davon liegenden Gebietes. Je lockerer das Gefüge, um so klarer tritt das Fadengerüst des Zellenleibes hervor.

Die beschriebenen Verschiedenheiten im Gefüge des Zellengerüstes sind in völlig ungezwungener Weise mit dem Wechsel im Aussehen der lebenden Zellen in Zusammenhang zu bringen. Den frisch hervorbrechenden hyalinen Buckeln der lebenden entsprechen die völlig gerüstarmen hellen Auswüchse der fixirten Zellen. Wenn wir in jenen vereinzelte dunkle Körnchen bis zum Rande vordringen sehen, so zeigt uns die Beobachtung am fixirten Material, dass solche Körnchen nicht frei im Hyaloplasma zu liegen pflegen, sondern dass sie in zarten, wegen ihrer Feinheit und Blässe unsichtbar bleibenden Fäden eingeschlossen sind. Die Trübung hyaliner Zellenabschnitte kann an der lebenden Zelle entweder rasch, durch anscheinendes Einströmen der Körnermasse vor sich gehen, oder allmählig. In letzterem Fall trübt sich die Substanz anfangs fast unmerklich, sie sieht zunächst wie fein durchstäubt aus und gewinnt erst nach und nach ein eigentlich körniges Ansehen. Diesen Stufen fein durchstäubten Ansehens entsprechen die lockeren Gerüstbildungen. Mit der Verdichtung der letzteren treten die zunehmende Trübung und das körnige Ansehen hervor.

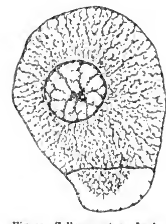


Fig. 20. Zelle aus einem Lachskeim 3 Tage 5 Stunden n. d. Befr. Fixirte Bewegungsform. Vergr. 1000fach. Die Basis des hyalinen Buckels enthält einen Klumpen dichten Plasmas.

Die Abgränzung hyaliner Auswüchse gegen die getrübte Plasmamasse wechselt in ihrer Schärfe. An manchen Zellen tritt eine scharfe dunkle Gränzlinie hervor, die den Eindruck einer ächten zona limitans macht. Gegenüber solchen Bildern kann man die Frage aufwerfen, ob vielleicht die Entstehung hyaliner Auswüchse auf einem Durchbruch der primären Zona limitans beruhen mag, wobei der ausfliessende Tropfen nachträglich vom Morphoplasma wieder eingeholt und umschlossen wird. Die innere Gränze des hyalinen Vorsprunges wäre dabei als die primäre Zona limitans, und die im Vorsprung gelegenen Fäden wären als neue Bildungen anzusehen. Eine derartige Annahme halte ich deshalb

nicht für zulässig, weil uns die Beobachtung keinerlei Zwischenglieder von hyalinen Zellenauswüchsen ohne umgebende Zona limitans zeigt, und weil das aus verletzten Blastomeren ausströmende Plasma nie in Form von flachen Buckeln, sondern stets in der von langausgezogenen Fäden sich verbreitet.

Wenn die oben beschriebenen Zellenformen in der That fixirte Bewegungsformen sind, so ergiebt sich daraus, in Verbindung mit der Beobachtung an lebendem Material, dass völlig gerüstarme hyaline Massen an Stellen auftreten können, die zuvor von einem dichten Plasmagerüst durchsetzt waren und in denen zahllose kurze und dicht beisammenstehende Fäden den Zusammenhang mit der Gränzschicht unterhalten hatten; andererseits können hyaline, von sparsamen Fäden durchzogene Stellen wieder von dichteren Gerüsten erfüllt werden. Dabei denkt man zunächst an die Möglichkeit, dass infolge von Contraction und Erschlaffung der Gerüstbalken, die von ihnen umschlossenen Maschenräume starke Erweiterungen und Verengerungen erleiden können. Man kommt aber meines Erachtens mit einer solchen Erklärung des Thatbestandes nicht aus. Die so rasch erfolgende Bildung weiter gerüstfreier Räume ist kaum verständlich ohne die Annahme, dass vorhandene Plasmaverbindungen aufgelöst worden sind, und ebenso führt die Art, wie hyaline Bezirke wieder mit Gerüsten erfüllt werden, zur Ueberzeugung, dass es sich dabei um wirkliche Neubildungen, um eine Art von innerer Pseudopodienbildung handle.

Den gesetzmässigen Wechsel in der Vertheilung von Hyaloplasma und Morphoplasma während Mitose und Zelltheilung verfolgt man am besten an den körnerreichen grossen und bis zum Rande hin trüben Blastomeren früherer Furchungsstufen. Ueber diese Verhältnisse, soweit ich sie an Blastomeren von Salmoniden erforschen konnte, habe ich in meiner vorjährigen Arbeit über Zellen- und Syncytienbildung berichtet, und meine Ergebnisse stehen ja in ihrem thatsächlichen Inhalt, wenn auch nicht in der Form der Darstellung mit denen von anderen Forschern überein.[1])

---

1) Ich verweise speziell auf: Henneguy Nouvelles recherches sur la division indirecte des cellules. Journal de l'Anat. et de la Physiol. 1891. S. 397 ff. Vejdovsky und Mrazek Centrosom und Periplast. Sitzungsber. der k. böhm. Gesellsch. der Wissensch., math.-naturw. Classe 1898.

In den allerfrühesten Furchungsstufen der Zwei- und Viertheilung ist, wie oben hervorgehoben wurde, das Morphoplasmagerüst noch sehr dicht und engmaschig, und sein Gefüge bleibt sich fast bis zum Rande hin ziemlich gleich. Inmitten der an gefärbten Schnitten dunkeln Substanz hebt sich das Kerngebiet stets durch seine Durchsichtigkeit hervor. Während der Anaphase der Theilung bildet sich inmitten der zuvor dichten Sphäre ein helles Plasmafeld, das Centralplasma von Erlanger[1]), in das die Chromosomen eintreten und das das Material zur Bildung des Kernplasmas liefert. Die ersten Kerne entstehen anscheinend in Stücken. Jedes dieser Kernstücke besteht aus einem durchsichtigen Körper, um den herum ein Chromatingerüst sich lagert. Auch während der nächstfolgenden Entwickelungsstufen leitet sich die Kernbildung stets durch Ansammlung von hyalinem Plasma im Innern der primären Sphäre ein. In diesem Innenfeld treten sodann die secundären Sphären auf, die zu einer partiellen Wiederverdichtung desselben führen. Dabei hellt sich aber der Bezirk immer mehr auf, in den die Chromosomen eintreten, und er bleibt zuletzt nur noch von einem sehr lockeren Gerüst durchsetzt. Er liefert das durchsichtige Kernplasma und verdient somit die Bezeichnung des plasmatischen Karyoblasten.[2])

Die eben besprochenen Vorgänge führen uns in das Gebiet der Asterbildung und hier tritt uns der physiologische Wechsel in der Vertheilung der Plasmasubstanzen in seiner vollen Breite entgegen. Gehen wir von der isotypen Anordnung des Plasmagerüstes auf sehr frühen Stufen aus, so führt schon das erste Auftreten von Strahlungen zu einer Störung der Isotypie, zu stellenweiser Verdichtung und stellenweiser Auflockerung des Gerüstes (s. oben Fig. 15). Das Gerüst verdichtet sich in der unmittelbaren Umgebung des Centrums, indem seine strahlig sich anordnenden Balken in dessen Nähe immer enger aneinander rücken. Während sich so ein centraler Herd maximaler Verdichtung, die Attractionssphäre der Autoren bildet, lockert sich

1) Erlanger biol. Centralblatt 1898, S. 6 ff. Erlanger stellt die Verhältnisse in dem Sinne dar, dass das helle Gebiet des ursprünglichen Kernes (»der Kernsaft«) abnimmt, während das am Ort der Tochterkernbildung liegende Centroplasma sich reichlicher anhäuft.

2) Ich verweise hier auf die Photogramme meines vorjährigen Aufsatzes Fig. 16, Figg. 28—32 u. bes. auch auf Fig. 33 u. 34.

der Zusammenhang der Theile in den peripherischen Aussengebieten. Diese Aussengebiete hellen sich demnach auf, und wo zwei Aussengebiete benachbarter Astrosphären zusammentreffen, da bilden sich jene hellen Zwischenstrassen aus, die die Vorläufer der Zellentheilung sind, und die ich als Diasteme bezeichnet habe.

Das Studium dieser aufgelockerten Stellen ist deshalb besonders wichtig, weil man dadurch über gewisse im Gerüst vor sich gehende Veränderungen Aufschluss erhält. Wollte man voraussetzen, dass die Gerüstbälkchen aus einer dehnbar elastischen Substanz gebildet sind, die mit wechselnder Spannung entweder mehr zusammengezogen oder auseinander gezerrt wird, so müssten dessen centrale Abschnitte aus dicken, die peripherischen aus dünnen Bälkchen bestehen, denn jene würden dem contrahirten, diese dem gespannten Theil des Gerüstes entsprechen. Damit stimmt die Beobachtung nicht. In den Diastemen sind die von Hyaloplasma erfüllten Maschenräume erweitert, die Bälkchen aber nicht verdünnt. Es leitet sich vielmehr die Trennung der Zellen durch eine Verdickung der Gerüstbälkchen ein, diese bekommen knotenförmige Anschwellungen, und durch Verschmelzung der verdickten Stellen erfolgt schliesslich die Bildung der sondernden Gränzschichten. Dies Verhalten weist eben auch seinerseits auf eine innere Verschiebbarkeit des Gerüstmateriales hin, wie wir sie im Grund nur von Flüssigkeiten kennen und spricht meines Erachtens für die schon oben auseinandergesetzte Annahme, wonach das Bindemittel des Morphoplasmagerüstes eine zähe mit dem Hyaloplasma nicht sich mischende Flüssigkeit ist.

Sehr bemerkenswerth ist die Aufhellung, die im Bereiche der Spindel nach dem Auseinanderweichen der Chromosomen auftritt. Der die Verbindungsstrahlen enthaltende, aequatorialwärts gerichtete Theil der Spindel erscheint von früh ab auffallend hell. Dieser helle Abschnitt wird später durch Bildung der Zellplatte halbirt, er ist seiner Natur nach als eine Diastembildung zu verstehen. In auffallender und vorläufig schwer zu erklärender Weise wechselt die Stellung der Verbindungsstrahlen. Während einer gewissen Zeit erscheinen sie stark auseinandergetrieben, dann aber auf den Schlussstufen der Trennung sanduhrförmig zusammengefasst. (Taf. III Figg. 21 u. 22.)

Die Verdichtung des Plasmagerüstes im Mittelpunkt der Sphären und seine Auflockerung an der Peripherie kann man versuchen

unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen, indem man eine im Centrum wirksame, mit zunehmender Entfernung abnehmende Zugkraft voraussetzt. Das Material, das nach dem Centrum hingezogen wird, muss den peripherischen Bezirken entnommen werden und dafür wird in diese das Hyaloplasma hinausgedrängt. Solch einfache Deutung der Verhältnisse reicht indessen höchstens für die Anfangsphasen der Sphärenbildung. Die secundäre Ausweitung des Verdichtungshofes während der Anaphase, die Bildung des hellen Innenhofes und dessen secundäre Wiederverdichtung von der Peripherie her sind Vorgänge, die auf complicirtere Entstehungsbedingungen hinweisen. Ich habe diese Vorgänge nach der Art ihres Fortschreitens mit Ringwellen verglichen, womit natürlich über ihre Natur nichts weiteres ausgesagt ist.

Wie seit M. SCHULTZE fast alle Forscher (v. BENEDEN, BOVERI, ENGELMANN, HEIDENHAIN u. A.) hervorgehoben haben, so liefert das Phänomen der Muskelcontraction die unmittelbarste Parallele zu den im Protoplasma ablaufenden Vorgängen. Man schreibt dem Plasmagerüst gleich der Muskelsubstanz Contractilität zu. Es bietet auch keine Schwierigkeiten, sich die Entstehung von ringförmig sich ausbreitenden Contractionswellen im Plasmagerüst vorzustellen. Dagegen liegen die Verhältnisse nach einer anderen Richtung hin viel complicirter, als im Muskel, indem das Plasmagerüst seine Gesammtanordnung stetig zu wechseln, Bälkchen einzuziehen und wieder neue zu bilden vermag. Für derartige Vorgänge bietet der sich contrahirende Muskel keine Parallele und ebenso wenig für die sog. Körnchenströmungen innerhalb der gegebenen Plasmabälkchen.[1])

Noch treten uns an dieser Stelle andere wichtige Fragen entgegen, und dahin gehört vor Allem die Frage über einen Wechsel im quantitativen Verhältniss von Morphoplasma und Hyaloplasma. Die eine Thatsache liegt ja vor, dass in unbefruchteten Keimen und während der allerersten Furchungsstufen die Menge das Morphoplasma unverhältnissmässig viel grösser ist, als später. Je weiter der Keim in seiner Entwickelung fortschreitet, um so lockerer wird das Plasmagerüst seiner Zellen, um so durchsichtiger

---

1) Ausser den classischen älteren Beschreibungen von DUJARDIN, M. SCHULTZE, KÜHNE, LIEBERKÜHN, DE BARY, ENGELMANN u. A. vergleiche man die neueren von M. HEIDENHAIN »Einiges über die sogen. Protoplasmaströmungen«. Sitzungsber. d. Würzburger phys.-med. Ges. 1899.

seine gesamte Substanz. Darüber aber, ob sich das Verhältniss zwischen den Quantitäten von Morphoplasma und Hyaloplasma im Verlauf einer Contractionswelle ändert, und ob es beim Verlauf einer Mitose sich gleich bleibe, giebt uns bis jetzt die Beobachtung nur ungenügenden Aufschluss. Nach ENGELMANN's[1]) Inotagmentheorie beruhen die Contractionsveränderungen im Muskel sowohl, als im Protoplasma auf rasch erfolgender Quellung kleinster doppelbrechender Theilchen der sog. Inotagmen. Diese ändern bei der Wasseraufnahme Form und Volumen, und mit dem Ablauf der Contraction geben sie das aufgenommene Wasser wieder an ihre Umgebung ab. Will man diese Vorstellung auf die Structurelemente des Plasma's übertragen, so kommt man zum Schluss, dass während der Contraction des Morphoplasmagerüstes entweder das Verhältniss zwischen Bindemittel und Plasmosomen, oder das zwischen Morphoplasma und Hyaloplasma sich ändern muss. In letzterem Fall liegt es nahe, die bei amöboiden Bewegungen junger Blastomeren so rasch hervorbrechenden Mengen hyaliner Substanz grossentheils auf Ausscheidungen von Quellungswasser zurückzuführen, und es lässt sich weiterhin damit in Zusammenhang bringen, dass das Hervortreten hyaliner Buckel an der Oberfläche von Blastomeren nicht sowohl eine Contractions- als vielmehr eine Erschlaffungsäusserung ist.

Die Beobachtungen an grösseren Blastomeren geben uns nur wenig Aufschluss über Veränderungen, die während der Mitose im Mengenverhältniss von Morphoplasma und Hyaloplasma eintreten. Solche scheinen indessen nicht zu fehlen, dafür spricht die bekannte Thatsache, dass die in Mitose begriffenen Zellen embryonaler Gewebe von ihren Nachbarn durch grössere Helligkeit abstechen, so die Keimzellen der Medullarplatte, der Urwirbel und embryonalen Epithelien, sowie die des embryonalen Bindegewebes.

Besonders schwierig ist das Problem von der Vermehrung der lebenden Substanz. Solange der Keim noch feste Dotterkörner aufnimmt, können wir deren Weg in's Innere der Zellen und deren allmählige Auflösung verfolgen, aber ob die sich lösenden Substanzen zuerst dem Hyaloplasma sich beimengen, oder ob sie zu Bindemittel des Gerüstes oder zu Plasmosomen werden,

---

1) W. ENGELMANN Protoplasma- und Flimmerbewegung in HERMANN's Hdb. der Physiologie 1879 Bd. I. 378.

das sagt uns die Beobachtung nicht. Die Frage nach dem Wachsthum lebender Substanz hängt ihrerseits wieder innig zusammen mit der nach der Bedeutung der Plasmosomen. Ich selber stelle mich auf die Seite derer, die ächte Plasmosomen als integrirende Plasmabestandtheile annehmen und sie von anderweitigen, den Zellen als Nahrungsmaterial oder als Sekretstoffe eingelagerten Körnern unterscheiden. Auch ist vielleicht die Möglichkeit zuzugeben, dass die Plasmosomen gleich den Centrosomen durch Theilung sich vermehren. Selbstverständlich braucht man dabei nicht alle Consequenzen der ALTMANN'schen Bioblastenlehre anzunehmen. Dagegen darf man aus der Voraussetzung, dass die Plasmosomen integrirende Zellenbestandtheile sind, die weitere Consequenz ziehen, dass ihre Menge, gleich der der Zellen für jede Entwickelungsphase gesetzlich normirt ist, im andern Falle müsste sie von Zufälligkeiten der Ernährung abhängig sein.

Die Reconstruction der Kerne in den Blastomeren des Salmonidenkeimes.

Die Frage vom Wiederaufbau der Kerne in den Forellenblastomeren ist schon von HENNEGUY (1891) eingehend besprochen worden.[1]) HENNEGUY hat hervorgehoben, dass der Vorgang nicht nach dem FLEMMING'schen Schema verläuft, indem die von diesem Schema geforderten rückläufigen Phasen der Diaster- und Dispirembildung überhaupt nicht zu beobachten sind. Nach HENNEGUY's Darstellung bestehen die Chromosomen schon während der Metaphase und weiterhin im Beginn der Anaphase aus dunkel gefärbten Körnern, die der Länge nach an einander gereiht sind. Dieser Aufbau erhält sich bis zum Eintritt der Chromosomen in die gefärbte Asterzone. Bei diesem Eintritt nehmen die Chromosomen an Volumen zu und jedes wandelt sich in einen kleinen Schlauch (boyau) um, dessen Centrum hell und durchsichtig, dessen Peripherie dunkel und aus einer Kette kleiner nach einwärts vorragender Körnchen gebildet ist. Indem sich die Hohlgebilde der Mitte des Asters nähern, vergrössern sie sich und nehmen die Form von rundlichen Bläschen an; diese

1) HENNEGUY l. c. S. 412 ff.

bestehen auch ihrerseits aus einer hellen Innenmasse, die von gefärbten Körnchen eingefasst wird. Die Bläschen vergrössern sich, werden durch gegenseitigen Druck theilweise polyedrisch und scheinen schliesslich zu verschmelzen. Die einen Körner bilden das innere Chromosomengerüst, die andern die Kernmembran. Eine Zeit lang behält der Kern noch eine höckerige Gestalt bei. Als günstigste Beobachtungsstufe bezeichnet HENNEGUY die Blastomeren von 100 μ, bemerkt aber ausdrücklich, dass in grossen Blastomeren die Wiedertheilung der Kerne beginnt, bevor die Verschmelzung der Theilstücke zu einem einfachen ruhenden Kern zu Stande gekommen ist. Mit Hinweis auf VAN BENEDEN's Beobachtungen am Ascarisei giebt HENNEGUY an, dass die Kerne ausschliesslich durch Aufblähung von Chromosomen entstehen und dass das Zellplasma nur mittelbar an dem Prozess theil nimmt, indem es den Chromosomen das Material zur Aufquellung darbietet.

Die Beobachtungen von HENNEGUY sind so genau, dass seinen thatsächlichen Befunden nur wenig beizufügen ist. Dagegen sind diese Befunde einer anderen als der gewählten Darstellung und Deutung zugänglich. VAN BENEDEN beim Ascarisei und HENNEGUY beim Forellenei führen den Prozess der Kernbildung auf eine Aufblähung (gonflement) und nachträgliche Verschmelzung von Chromosomen zurück. In dem Sinne spricht HENNEGUY von kleinen Schläuchen, die weiterhin zu rundlichen Bläschen werden und schliesslich zum Gesammtkern zusammentreten. Diese Deutung der Verhältnisse scheint durch den Augenschein so geboten, dass es schwer ist, sich derselben zu entziehen. Sehr bestimmt ist nämlich zu verfolgen, wie die stäbchenförmigen Chromosomenketten beim Uebergang in den Verdichtungshof von hellen länglichen Lücken durchsetzt werden und wie dann weiterhin im Innenhofe (Centroplasma) das Chromatin in Form von geschlossenen Ringelchen vertheilt erscheint. Diese Ringelchen, die Chromocyklen, wie ich sie nennen will, ist man um so mehr veranlasst für Kernfragmente zu halten, als alle Uebergänge zwischen Anhäufungen derselben und geschlossenen Kernformen zu beobachten sind (Fig. 23 u. Taf. III Fig. 22 u. Fig. 25).



Fig. 23. Helle Lückenräume innerhalb der Chromosomenketten bei ihrem Eintritt in den Verdichtungshof. Regenbogenforelle 32 Stunden n. d. Befr. Vergr. 2000fach. Dasselbe Präparat ist als Photogramm in Fig. 16 bei 1350facher Vergrösserung dargestellt

Der Prozess einer blasenartigen Aufblähung oder Quellung der Chromosomen ist indessen von vornherein schwer verständlich, da die tingirbare Substanz zwar ihre Vertheilung, aber nicht ihre sonstigen Eigenschaften ändert. Bei einer Quellung auf das Vielfache des ursprünglichen Volumens wäre ein entsprechendes Abblassen der Chromosomensubstanz zu erwarten. Ebenso unbewiesen erscheint die Blasennatur der scheinbaren Kernfragmente. Bei Hoch- und Tiefstellung des Tubus kommen zwar einzelne Körner zur Anschauung aber keine zusammenhängenden Wandschichten. Auch zeigt sich das Bild der kleineren und grösseren Ringelchen, wie dies HENNEGUY durchaus correct beschreibt, aus einzelnen Körnchen zusammengesetzt, von denen manche gegen den hyalinen Binnenraum frei hervortreten.

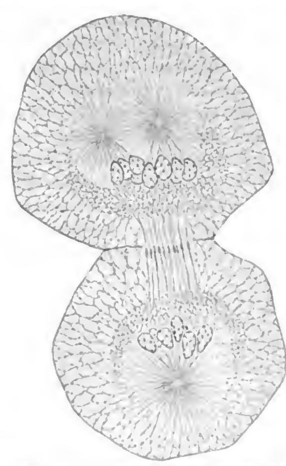


Fig. 24. Doppelblastomere am Schluss der Anaphase. Keim der Regenbogenforelle 41 Stunden n. d. Befr. Vergr. 1500fach. Die Zeichnung zeigt in beiden Blastomeren birnförmig gestaltete Chromocyklen in Verbindung mit Strahlen der secundären Sterne. In der einen Blastomere sind zwei, in der andern nur ein Stern sichtbar.

Die Beobachtung gut tingirter Präparate ergiebt noch einige Einzelheiten, die von HENNEGUY unerörtert geblieben sind:

1) erkennt man während der Schlussstufen der Anaphase in dem vom Centroplasma eingenommenen Innenraume jenes helle, oft ziemlich scharf umgränzte Feld, das ich in meinem vorigen Aufsatz als plasmatischen Karyoblasten bezeichnet und in verschiedenen Photogrammen[1]) wiedergegeben habe. Das Feld liegt zwischen den secundären Centren und dem inneren Abschnitt des Verdichtungshofes, und es ist von einem lockeren Plasmagerüst durchzogen.

2) sind die Chromatinringelchen oder Chromocyklen während

1) l. c. Figg. 32—34, besonders Fig. 33.

ihres Durchtritts durch den Verdichtungsring und ihres Eintrittes in's Centroplasma oft von länglicher Form, oder einseitig zugespitzt, und da wo der secundäre Strahlenstern gut ausgebildet ist, da findet man die Spitzen der Chromocyklen mit Strahlen in Verbindung stehend (Fig. 24).

3) entspricht die jeweilige Grösse und Form der Chromocyklen der Grösse der umgebenden Plasmamaschen, d. h. die kleinen länglichen Chromocyklen finden sich innerhalb des engmaschigen Verdichtungshofes, wogegen die grösseren Chromocyklen sich in ihrem Verhalten den Maschen des Centralplasmas anschliessen.

Die letzterwähnten Beobachtungen führen m. E. zu einer einheitlichen Deutung der Verhältnisse. Die Auffassung von v. BENEDEN und von HENNEGUY besagt, dass die ursprünglichen Chromosomen zu Hohlkörpern sich aufblähen, die nun unter stetigem Wachsthum in's Innere des Centroplasma wandern, um als Kernfragmente schliesslich zu einem Gesammtkörper zu verschmelzen. Aber, was sich verschiebt, sind die Chromatinkörner und nicht die angeblichen Chromatinbläschen. Die Körner bewegen sich in den Strassen, die durch das Plasmagerüst vorgeschrieben sind, und je nach dem Charakter des letzteren, combiniren sie sich zu Figuren von verschiedenem Aussehen. Innerhalb der isolirt verlaufenden Hauptstrahlen (der sog. Verbindungsstrahlen) ordnen sich die Chromatinkörner zu längsgerichteten Stäbchen. Beim Uebergang in den Verdichtungshof lösen sich die Strahlen in ein sehr engmaschiges Gerüst auf mit radiärgerichteten Maschen, und von da ab beginnt die Bildung von anscheinend geschlossenen Chromatinfiguren, den sogen. Schläuchen und Bläschen, deren weiteres Verhalten stets durch dasjenige des von den Körnern durchwanderten Gerüstes bestimmt erscheint. Der Kern hat seine volle Ausdehnung erreicht, wenn das Gesammtgebiet des plasmatischen Karyoblasten von Chromatin-Bestandtheilen umgriffen ist. Nunmehr liegt er auch nahe an dem oder an den beiden Centrosomen an und lässt für letztere je eine Bucht oder Delle frei. Die beiden Bedingungen, welche diesen Modus der Kernbildung bestimmen, sind: das Vorhandensein des Plasmagerüstes als Leitungsbahn für die wandernden Chromatinkörner, und die von den Centren aus auf die letzteren ausgeübte Anziehung. Die Annahme dieser beiden Bedingungen stimmt aber völlig mit den Erfahrungen überein, die wir sonst über die Vorgänge der Mitose besitzen.

Es bleiben bei den am Forellenkeim zu machenden Beobachtungen immer noch bemerkenswerthe Einzelheiten übrig, die der genauen Deutung harren. Dahin gehören die so vielfach geschlossenen Ringformen der Chromocyklen und der Umstand, dass das Gebiet des plasmatischen Karyoblasten schon vor dem Eintritte der Chromatintheile Andeutungen einer kugligen Felderung zeigen kann. Es ist nicht in Abrede zu stellen, dass solchen Beobachtungen gegenüber die Vacuolenvorstellung noch etwas weiter führt, als die der einfachen Balkengerüste. Man kann sich dabei denken, dass die Chromocyklen der Wand von hyalinen Plasmatröpfchen angehören. Durch Zusammenfliessen mehrerer Tröpfchen können grössere Gebilde und zuletzt der Gesammtkern entstehen. Damit bleibt dann auch verständlich, weshalb im fertigen Kern das Chromatingerüst stets die Lage an der Oberfläche beibehält. Der Kern erscheint eben als ein grosser Plasmatropfen oder eine Plasmavacuole, in deren Wand das Chromatingerüst eingelagert ist.

Ich will diese Möglichkeiten hier nicht weiter verfolgen, früher oder später wird man an der Hand neuer Beobachtungen noch sicherer als jetzt über die Zulässigkeit solcher Auffassungen entscheiden können. Dagegen möchte ich darauf hinweisen, dass, ganz unabhängig von der Stellung zur Wabenlehre, durch die oben vertretene Annahme von einer Wanderung der Chromatinkörner nach den Centren hin, die Kluft ausgefüllt wird, die zwischen den am Forellenei zu machenden Beobachtungen und dem FLEMMING'schen Schema vorhanden sein soll. Dies Schema beruht auch seinerseits auf unanfechtbaren Beobachtungen, und es ist unwahrscheinlich, dass der Typus der Kernbildung tiefgreifende Schwankungen zeigen wird. Nach meiner Auffassung des Herganges im Forellenkeime wird die Differenz zu einer nebensächlichen: in dem einen und in dem andern Fall wandern die Chromatintheile in vorgeschriebenen Bahnen in der Richtung gegen das Centrum hin, und nur insofern besteht Verschiedenheit, als die Chromosomen beim Forellenkeime mehr fragmentirt sind, und als hier die Plasmabahnen des Innengebietes reichlichere Querverbindungen zeigen. An Stelle einfacher Stäbchen oder Schleifen treten daher die mehr oder minder geschlossenen Chromocyklen.

Welcher Art der von den Centren auf die Chromatinkörner ausgeübte Zug sei, das ist schwer zu beurtheilen. Das Eine muss

auch hier wieder betont werden, dass die Verschiebungen nicht aus einer Verkürzung der Fäden abgeleitet werden können. Die Chromatinkörner oder Chromatinstäbchen verschieben sich längs oder innerhalb der Plasmafäden und sie verhalten sich in der Hinsicht wie die strömenden Körner in den Pseudopodien von Rhizopoden.

Die Veränderungen des unbefruchteten Keimplasmas beim Aufenthalt der Eier in fliessendem Wasser.

Unbefruchtete Salmonideneier können sich im fliessenden Wasser durch Wochen hindurch erhalten, ohne abzusterben. In meinen älteren Baslernotizen finde ich Aufzeichnungen über Lachseier, die einen Monat lang gelegen haben, ohne ihre Durchsichtigkeit zu verlieren. Neuerdings habe ich den Versuch mit unbefruchteten Eiern der Regenbogenforelle wiederholt und auch wiederum durch 4 Wochen durchgeführt (vom 19. April bis 17. Mai).[1] Auch in unbefruchteten Eiern bildet sich nach dem Eintritt in's Wasser ein Plasmahügel, der sich später wieder verliert. Die Stufe der Hügelbildung erstreckt sich bei der Regenbogenforelle über die ersten drei bis vier Tage, nach welcher Zeit das Keimplasma zu einer flachen, etwa 2 mm grossen Scheibe sich umbildet.

Das Keimplasma erhält sich, wie dies ja von vornherein zu erwarten steht, bei längerem Liegen der Eier nicht unverändert. Schon die Betrachtung unverletzter Eier zeigt, dass die Scheibe im Laufe der Zeit durchsichtiger wird, dass sie nach einiger Zeit ein unregelmässig wolkiges Ansehen annimmt und dass ihre Abgränzung gegen die Rindenschicht unscharf wird. Im Verlaufe der 4. Woche machten sich bei der Regenbogenforelle innerhalb der Keimscheiben grössere durchscheinende Kugeln (0,4 bis 0,7 mm) bemerkbar, es waren dies, wie die nachträgliche Beobachtung von Schnittpräparaten ergab, Tropfen von flüssigem Dotter, die durch das rareficirte Plasma hindurch bis dicht unter die Oberfläche emporgedrungen waren.

---

1) Dies ist um so bemerkenswerther, als eine gleichzeitig eingelegte Brut befruchteter Eier während der Umwachsungsperiode, d. h. schon im Verlauf der 2. Woche völlig abgestorben ist. Wie früher erwähnt, so habe ich auch bei Züchtung von Lachseiern mit dem Leipziger Wasser keine guten Erfahrungen gemacht.

Die aus dem frischen Ei entleerte Keimsubstanz zeigt in der ersten Zeit noch die Eigenschaften normalen Plasma's; hat sie ihren Zusammenhang bewahrt, so erscheint sie von einer scharfen Gränzschicht umgeben, und ihre Oberfläche zeigt noch spontane Formveränderungen. Wird sie zersprengt, so fliesst die Masse in breiteren und feineren Stromfäden auseinander. Später verliert das Plasma seinen zähen Zusammenhang. Aus Eiern, die 2 bis $2\frac{1}{2}$ Wochen gelegen hatten, erhielt ich beim Anstechen neben den sehr zahlreichen rothen Fetttropfen, kleinere zusammenhängende Plasmafetzen. Bei raschem Zusehen zeigten diese noch das Bild von fliessenden, theils hyalinen, theils getrübten Strängen und Fäden. Das Bild war indessen von kurzer Dauer, denn die sich dehnenden Fäden zerrissen weiterhin und zogen sich entweder zu durchsichtigen rundlichen Tropfen oder zu unregelmässigen, von

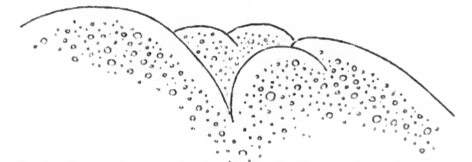


Fig. 26. Randstrecke eines unbefruchteten Keimes der Regenbogenforelle, einen Tag nach Abstreichen der Eier. Die Anfangs gleichmässig gewölbte Oberfläche zeigte sich nach Verlauf der ersten Viertelstunde nach Eröffnung des Eies mit rundlichen, ihre Form verändernden Buckeln besetzt.

Körnern durchsetzten Klumpen zusammen. (Ich zeichne in Figur 28 einen solchen Stromfaden in 2 kurz auf einander folgenden Augenblicken a) noch zusammenhängend und b) zerrissen und zu Tropfen sich sammelnd.) Breitere Stränge ausfliessender Substanz pflegen von zahlreichen kleineren und grösseren Kugeln und Tropfen durchsetzt zu sein, und sie besitzen vielfach ein längsstreifiges Ansehen. Die Einschlüsse sind verschiedener Art: ausser den bekannten farbigen Fetttropfen finden sich im Plasma sowohl, als im gesammten Gesichtsfeld, reichliche Mengen von theils sehr blassen, theils stärker lichtbrechenden farblosen Kugeln von 10 bis 20 oder selbst bis 30 μ Durchmesser, dazu kommen zahllose kleinere Körner und Tröpfchen von 1—2 μ und darunter (Fig. 27 ff.). Die grösseren farblosen Kugeln scheinen Vitellingebilde (wahrscheinlich in verschiedenen Modificationen) zu sein. Sie widerstehen der

Alkohol- und Xylolbehandlung, färben sich mit Eisenhämatoxylin dunkel, mit Fuchsin intensivroth. Manche derselben sind von Lücken durchsetzt, d. h. in innerlicher Auflösung begriffen. Die farbigen Fetttropfen schwimmen theils einzeln herum, theils sind sie grösseren Plasmamassen eingelagert. Auch die einzeln schwimmenden Tropfen sind durchweg noch von einem Plasmamantel umschlossen, der bald hyalin, bald durch Einlagerungen getrübt ist. Ein mässiger Druck genügt, um den Zusammenhang der Theile zu zerstören und das Gesichtsfeld mit Trümmermassen zu erfüllen.

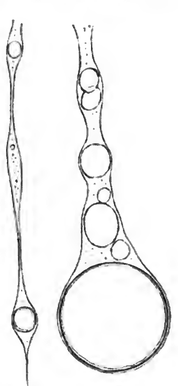


Fig. 27. Fliessende Plasmastränge aus dem unbefruchteten Keim einer Regenbogenforelle nach 10 tägigem Aufenthalt im Wasser. Die farbigen Fetttropfen sind doppelcontourirt gezeichnet. Die Vitellinkugeln mit einfachen Contouren, letztere färben sich auch am frischen Präparate durch Fuchsin intensiv roth. Vergr. 300fach.

Am Ende der 4. Woche fand ich bei der Regenbogenforelle zwar noch dieselben Bestandtheile, wie im Beginn der dritten, aber die Menge der die Tropfen und Kugeln zusammenhaltenden Substanz war sehr vermindert. Damit stehen die Ergebnisse der Schnittbetrachtung in völliger Uebereinstimmung. Das Plasma ist jetzt auf das ausgiebigste von gröberen und feineren Lückenräumen durchsetzt (vacuolisirt), es bildet keine grösseren Anhäufungen mehr, sondern meistens nur schmale, filigranartig durchbrochene Bälkchen und Blätter. Auch die Plasmalamellen, die die freie Fläche des Keimes abgränzen, sind stellenweise sehr dünn, und wie dies schon oben erwähnt wurde, so treten nunmehr einzelne Tropfen flüssigen Dotters bis dicht an die Oberfläche des Keimes heran.

Die oben mitgetheilten Beobachtungen zeigen zwar, dass in den unbefruchtet liegenden Eiern die Menge des Plasmas allmählich abnimmt und dessen Aussehen sich ändert, immerhin behält noch bis zum Zeitpunkt, da das Ei weiss wird, das Plasma die Eigenschaften lebender Substanz bei, und es fragt sich, wie wir uns dasselbe organisirt zu denken haben, ob es noch Kerne und Centrosomen einschliesst, und wie sich diese verhalten. Meine Beobachtungen an gut fixirtem Material beziehen sich erst auf die dritte und vierte Woche nach dem Eintritte der

Eier in's Wasser. Die Ergebnisse sind indessen bemerkenswerth genug, um hier mitgetheilt zu werden.

An Eiern der Regenbogenforelle die 17 Tage gelegen haben, ist das Keimplasma von Fetttropfen und von Vitellinkugeln[1]) schon ausgiebig durchsetzt, aber noch zeigen die Schnitte breitere Streifen undurchbrochenen Plasmas. In solchen Streifen finden sich ziemlich reichliche Strahlungen. Die Abstände benachbarter Sphärenmittelpunkte gehen bis auf 20 μ herunter und die Strahlungen greifen theilweise in einander über (Fig. 30). Im Uebrigen lösen sich die Strahlen peripheriewärts in ein dichtes Fadengerüst von mehr isotypem Character auf. Alle Hohlräume, mögen sie von Fetttropfen oder von Vitellinkugeln erfüllt gewesen sein, sind von

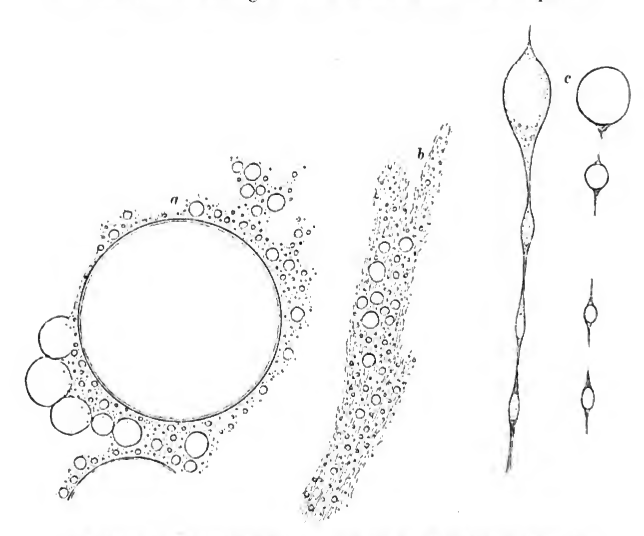


Fig. 28. Keimplasma der Regenbogenforelle nach 17 Tagen *a* ein grosser Fetttropfen mit Plasmahülle; *b* ein streifiger Plasmafetzen; *c* ein fliessender Plasmastrang, der während der Beobachtung in mehrere Stücke zerriss, die nun Tropfenform annahmen. Vergr. 300fach.

1) Note auf S. 180.

scharf gezeichneten Gränzschichten umfasst. Im Mittelpunkt der Sphären liegen sehr kleine Centrosomen oder Centralkörner und zwar stets in kleinen Gruppen (als Mikrocentren mit Centrodesmose im Sinn von M. HEIDENHAIN).

Das oben beschriebene Bild des von Sphären durchsetzten Plasmas erinnert an die Syncytien, wie sie an der Basis des befruchteten Keimes während früherer Furchungsstufen gefunden werden. Indessen besteht ein wichtiger Unterschied: im Bereich der Sphären liegen, ausser vielleicht einigen sparsamen und unregelmässig zerstreuten Körnchen, keine als Chromosomen oder als Kernanlagen zu deutenden Gebilde. Dagegen finden sich, in Vacuolen des Plasma's eingeschlossen, und davon scharf abgesetzt, zahlreiche helle von einem dunkeln körnigen Fadengerüst durchsetzte ellipsoide Gebilde, die durch ihre Grösse und Beschaffenheit an Kerne erinnern. Ich glaubte in der That zuerst, dass diese Gebilde Kerne seien, obwohl mir ihre völlige Unabhängigkeit von den Astrosphären und ihre scharfe Trennung vom umgebenden Plasma etwas befremdend erschienen. Mein Urtheil ist indessen bei genauerem Studium der Verhältnisse ein anderes geworden. Die fraglichen Körper sind in Verdauung begriffene Vitellinkugeln. Ich finde nämlich die vom Plasma umschlossenen Vitellinkugeln[1]) in sehr verschiedenen Phasen der Auflösung begriffen. Ein grosser Theil derselben zeigt am Rand oder im Innern kreisrunde helle Lücken. Bei andern Kugeln ist das Lückensystem unregelmässig umgränzt und vielfach confluirend. Schliesslich zeigen sich die Kugeln von gröberen oder feineren körnigen Gerüsten durchsetzt, die eine gewisse Aehnlichkeit mit Kerngerüsten darbieten (Fig. 31).

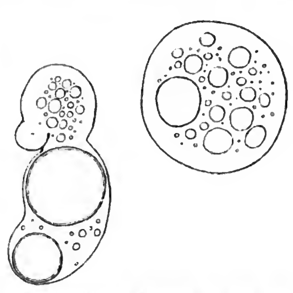


Fig. 29. Unbefruchtetes Keimplasma wie oben, nach 4 Wochen. Grössere Hyaloplasmatropfen mit Fett- und Vitellineinschlüssen.

1) Ich brauche den Ausdruck »Kugeln« der Bequemlichkeit halber, in Wirklichkeit weichen die betr. Gebilde mehr oder minder von der regelmässigen Kugelform ab.

Als Uebergangsformen finden sich Kugeln, die im innern Theil ihrer Substanz bereits ein kernähnliches Aussehen zeigen, während sie im Uebrigen nur von vereinzelten Lücken durchbrochen sind. Ja, nicht nur Pseudokerne, sondern auch Pseudozellen begegnet man, es sind dies scharf umgränzte Körper, die in ihrem Innern ein helles von lockerem Gerüst durchsetztes Feld umschliessen. Die Täuschung kann allerdings nur bei schwachen Vergrösserungen eintreten. Mit guten Systemen untersucht, zeigen diese Gebilde eine Unregelmässigkeit der Structur wie sie weder Zellen noch Zellenkernen zukommt. In Fig. 31 habe ich mehrere Uebergangsstufen von in Verdauung begriffenen Vitellinkugeln gezeichnet:

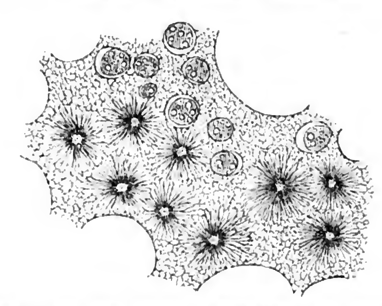


Fig. 30. Schnitt durch unbefruchtetes Keimplasma der Regenbogenforelle nach 17tägigem Aufenthalt im Wasser. Das Plasma enthält zahlreiche Strahlungen mit Mikrocentren. In der oberen Hälfte der Figur liegen Vitellinkugeln, die von hellen Vacuolen durchsetzt sind. Vergr. 500fach.

a) eine noch grossentheils undurchsichtige von einzelnen runden Lücken durchsetzte Kugel, b) eine Kugel, deren beide Hälften ungleich weit verändert sind, c) einen Pseudokern und Fig. 32 eine Pseudozelle.

Gebilde, die als Kerne deutbar waren, habe ich auch in solchen unbefruchteten Eiern nicht auffinden können, die 4 Wochen lang gelegen hatten. In Eiern, die so lange gelegen hatten, war das Keimplasma so rareficirt und durchbrochen, dass nirgends mehr grössere Plasmaanhäufungen vorhanden waren. Auch habe ich keine Strahlungen mehr darin wahrgenommen.

So fragmentarisch obige Beobachtungen sein mögen, so bieten sie doch im Zusammenhang mit anderen, während der letzten

Jahre bekannt gewordenen Thatsachen, ein lebhaftes Interesse. Entwickelungsvorgänge an unbefruchteten thierischen Eiern sind wiederholt beschrieben worden. So hat schon COSTE[1]) gefunden, dass sich der Keim von Hühnereiern, die unbefruchtet den Eileiter durchwandern, verändert und eine Art von Fragmentirung erfährt. Eingehend hat OELLACHER[2]) diese Verhältnisse studirt und angegeben, dass der Keim unbefruchtet gelegter Eier aus zahlreichen kernhaltigen Zellen bestehen kann. Beim Kaninchen hat V. HENSEN[3]) eine Fragmentirung unbefruchteter Eier nachgewiesen. Ueber Kerntheilungen im unbefruchteten Ei von Seeigeln liegt eine ausführliche Arbeit von R. HERTWIG[4]) vor. Im oben beschriebenen Verhalten des Forelleneies liegen zwar auch progressive Veränderungen vor, aber diese beschränken sich auf Vermehrung der Centren. Weder kommt es zu einer Anhäufung von Kernen noch zu einer Zertheilung des Plasmas in einzelne Zellen. Die nächste Frage ist die nach der Herkunft der Centrosomen. Nach der von BOVERI, R. FICK u. A. begründeten Auffassung thierischer Eireifung und Befruchtung enthält das Ei nach Ausstossung des zweiten Richtungskörpers keine Centrosomen mehr. Die Centrosomenfolge des befruchteten Eies führt sich ausschliesslich auf das Mittelstück des die Befruchtung bewirkenden Sper-

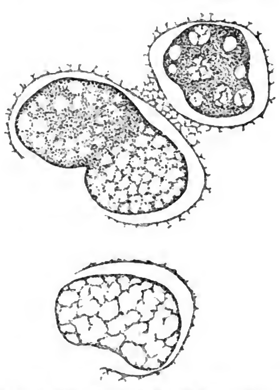


Fig. 31. Verschiedene, in Auflösung begriffene Vitellinkugeln aus dem unbefruchteten Keim der Regenbogenforelle (17 Tage). Vergr. 1000fach.

1) COSTE Histoire générale et particulière du développement des êtres organisés. Paris 1847—1859.

2) OELLACHER Die Veränderung des unbefruchteten Keimes des Hühnereies im Eileiter. 1872. Ztschr. für wissensch. Zool. Bd. XXII S. 1 ff.

3) V. HENSEN Ueber die Züchtung unbefruchteter Eier. Centralblatt f. med. Wissensch. 1869 Nr. 26.

4) R. HERTWIG Ueber die Entwickelung des unbefruchteten Seeigeleies. 1896. Festschrift für CARL GEGENBAUR. Bd. II. Leipzig.

matozoon zurück. Speziell für das Forellenei vertritt G. BEHRENS auf Grund seiner Beobachtungen diese Auffassung.[1]) Wenn dem aber so ist, woher stammen dann die zahlreichen Strahlungen mit Centrosomen (Centralkörnern), die im unbefruchteten Forellenei auftreten? Aehnliche Fragen haben sich schon frühere Forscher, R. HERTWIG, H. E. ZIEGLER und BOVERI gestellt anlässlich der Beobachtung von Theilungsvorgängen am Kern spermatozoenfreier Eier oder Eifragmente. Die von diesen verschiedenen Beobachtern gewonnenen Ergebnisse decken sich unter einander und mit den meinigen nur theilweise. R. HERTWIG beobachtete Erscheinungen der Mitose an Eiern von Seeigeln, die mit Strychninlösung von 0,1% behandelt worden waren. Er nimmt an, dass durch die Strychnineinwirkung ein Entwickelungsreiz ausgelöst worden sei, der zum mindesten beschleunigend auf den Prozess gewirkt habe.[2]) Das Centrosom der von ihm beobachteten Strahlung, sein „Ovocentrum" leitet R. HERTWIG von Spindelfasern des Eikernes, bez. von dessen achromatischer Substanz ab, und er fasst dabei den Ausdruck Centrosom im weiteren Sinne von BOVERI.[3])

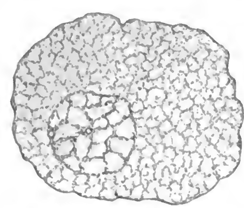


Fig. 32. Eine Pseudozelle aus demselben Object.

H. E. ZIEGLER arbeitete gleichfalls mit Eiern von Seeigeln und es gelang ihm mittelst eines Fadens befruchtete Eier so zu

1) G. BEHRENS sagt l. c. 247 von der zweiten Richtungsspindel: »An den Spindelpolen fehlt jede Spur eines Centrosomas oder eines centrosomaähnlichen Gebildes. Ebenso ist keine Andeutung einer Polstrahlung zu sehen, denn die bereits erwähnten Seitenstrahlen stellen jedenfalls keine Polstrahlung dar.« Als solche Seitenstrahlen zeichnet BEHRENS in seinen Figuren 11 u. 12 Strahlenbüschel, die von den Spindelpolen aus seitwärts ins Plasma ausstrahlen. Weshalb diesen Strahlen die Bezeichnung von Polstrahlungen versagt wird, ist mir nicht klar geworden.

2) R. HERTWIG l. c. S. 56.

3) R. HERTWIG sagt l. c. S. 68: »Ich bin zur Ansicht gekommen, dass man den schwarzen Körnchen, welche bei der Eisenhämatoxylinbehandlung so häufig an den verschiedensten Stellen, und so auch in den Sphären ab und zu sichtbar werden, viel zu viel Ehre angethan hat, indem man ihnen eine besondere morphologische Bedeutung zumass und sie als Centrosomen deutete. Ich halte das gesammte Mittelstück des Spermatozoon und demgemäss auch die gesammte Sphäre für das Centrosoma.«

zerlegen, dass das eine Theilstück das Spermatozoon, das andere den Eikern enthielt.[1]) Das spermahaltige Stück bildete zunächst eine Spindel nebst Strahlungen und durchfurchte sich. Im Stück mit dem Eikern kam es nicht zur Furchung, dagegen bildete sich eine Strahlung aus, der Kern wurde unsichtbar, trat dann wieder auf und dieser Prozess der Kernauflösung und Reconstruction wiederholte sich in einem gegebenen Fall dreimal. Nach ZIEGLER's Deutung befinden sich am Eikern zwei Centren, denen aber nicht die „volle Theilungskraft" gewöhnlicher Centren zukommt. Sie können Attractionssphären bilden und den Kern in Mitose überführen, aber die Kerntheilung können sie nicht durchführen, und es wird daher am Ende der Theilungsperiode der Kern reconstruirt. Wie die Centren sich als physiologisch rudimentäre Bildungen erweisen, so sind die zugehörigen Centrosomen wahrscheinlich auch morphologisch rudimentär und daher nicht mit Sicherheit aufzufinden.

BOVERI hatte das Glück, beim Zerschütteln von Seeigeleiern Stücke zu bekommen, die nur ein Centrosoma aber keine Kernsubstanz enthielten. In solchen Stücken theilte sich die Astrosphäre regulär weiter, es kam aber zu keiner Zelltheilung, vielmehr wurde die einheitliche Protoplasmamasse allmählich ziemlich gleichmässig und dicht von Strahlensonnen durchsetzt. Andererseits hat BOVERI bei Ascariseiern in zwei Fällen, in denen die Spermatozoen nicht in's Innere des Eies vorgedrungen waren und die Eier weder Strahlung noch Centrosom zeigten, die typische Metamorphose des Eikerns beobachtet. Er schliesst daraus auf einen „Dualismus der Kerntheilungsphänomene" d. h. auf das Vorhandensein von zwei anscheinend unabhängig neben einander hergehenden cyklischen Prozessen, der Metamorphose des Kerns einerseits, und der Theilung von Centrosom und Sphäre andererseits. Während die autonomen Vorgänge in den Astrosphären durch BOVERI's Beobachtungen wohl ausser allen Zweifel gestellt sind, wird man der Annahme autonomer Theilungsvorgänge im Kern noch etwas zurückhaltend gegenüberstehen. Es bedarf, wie mir scheint, zur Begründung einer so einschneidenden Annahme noch weiterer un-

1) H. E. ZIEGLER Experimentelle Studien über die Zelltheilung. 1898. Arch. für Entw.-Mechanik VI. S. 265 ff., andere Beobachtungen ähnlicher Art S. 271 ff., man vergl. auch die Erörterungen S. 278.

anfechtbarer Beweise. BOVERI spricht sich übrigens bei Beurtheilung der Ergebnisse R. HERTWIG's und ZIEGLER's selber recht vorsichtig über die Entbehrlichkeit der Centrosomen für das Zustandekommen der Kernmitosen aus. Sowohl hinsichtlich der von R. HERTWIG als der von ZIEGLER beschriebenen Fälle nimmt er das Vorhandensein entweder eines typischen (rudimentären) Centrosomes oder eines Aequivalentes für ein solches an, und auch in Betreff seiner eigenen Beobachtungen am Ascarisei giebt er zu, dass sie ihres fragmentarischen Charakters halber anfechtbar sein möchten. Bis auf bestimmten Gegenbeweis muss man meines Erachtens an der Annahme festhalten, dass die Spindelbildung und die Auflösung und Reconstruction des Kerngefüges von den Centren aus eingeleitet und beherrscht werden.[1]) Über die Vorstellung, dass das unbefruchtete Ei noch functionsfähige, wenn auch geschwächte oder, wenn man will, rudimentäre Centren enthalte, kommt man schwer hinaus.

Meine eigenen am unbefruchteten Forellenei gemachten Beobachtungen nehmen insofern eine besondere Stellung ein, als sie sich auf eine späte Entwickelungsstufe beziehen. Die Existenz von zahlreichen Centren im lange liegenden unbefruchteten Ei ist ein neuer und ziemlich unerwarteter Befund. Diese Centren sind nur aus der Theilung eines ursprünglich vorhandenen Ovocentrum ableitbar, ihr Theilungstempo ist aber jedenfalls ein sehr viel langsameres gewesen, als das der Centren des befruchteten Keimes, denn die Zahl der nach 17 Tagen im Keimplasma vorhandenen Astrosphären entspricht nicht entfernt der Zahl der Zellen in einem gleichaltrigen Embryo.

Die weitere Frage, was aus dem Eikern geworden sei, bedarf einer besonderen von Anfang ab systematisch durchgeführten Untersuchung. Es ist denkbar, dass sich das Chromatinmaterial des Eikernes ohne Hinzutreten des Spermatozoenkopfes ungenügend regenerirt und im Verlaufe wiederholter Theilungen erschöpft. Das Ausbleiben einer Plasmazerlegung in getrennte Zellenterritorien bei

1) Es kann hier auch auf SALA verwiesen werden, der an künstlich abgekühlten Eiern von Ascaris Strahlungen und Centrosomen beobachtet hat, und der zur Vermuthung kommt, dass das Centrosoma den normalen Ascariseiern nicht fehlt, sondern dass es aus irgend welcher Ursache nur unsichtbar bleibt. SALA Experimentelle Untersuchungen über die Reifung und Befruchtung der Eier etc. 1895. Arch. f. mikr. Anat. Bd. 44 S. 475.

vorhandener Trennung der Sphärengebiete schliesst sich an BOVERI's Beobachtungen von kernfreien aber centrenreichen, gleichfalls ungefurcht bleibenden Stücken von Seeigeleiern an.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Das frische Protoplasma des Salmonidenkeimes und seiner Blastomeren kommt beim Platzen der umschliessenden Gränzschicht ins Fliessen und zeigt dabei alle Eigenschaften einer ausnehmend zähen, fadenziehenden Flüssigkeit. Man unterscheidet am frischen Plasma eine trübe körnige und eine durchsichtige Substanz, das Körner- oder Morphoplasma und das Hyaloplasma.

2. Das Verhältniss zwischen Morphoplasma und Hyaloplasma ändert sich mit fortschreitender Entwickelung, In den grossen Blastomeren früher Furchungsstufen tritt das Hyaloplasma sehr zurück, die Substanz ist bis an den Rand trüb und nur beim Beginn amöboider Bewegungen treten breite hyaline Buckel hervor. Je weiter die Entwickelung fortschreitet, um so mehr nimmt das Hyaloplasma zu, das Körnerplasma ab.

3. Die Blastomeren des Salmonidenkeimes führen stundenlang andauernde amöboide Bewegungen aus. Die Bewegungen leiten sich ein durch Bildung hyaliner Vorsprünge von gerundeten Formen. Rasch nehmen die hervortretenden Vorsprünge an Umfang zu und sie sind zur Zeit ihres Hervorbrechens am durchsichtigsten. Weiterhin verlieren sie ihre Durchsichtigkeit, entweder rasch durch anscheinendes Nachströmen von Körnermasse, oder allmählig, indem sie sich in mehr gleichmässiger und fast unmerklich beginnender Weise trüben. Nach erfolgter Trübung pflegen die Vorsprünge wieder eingezogen zu werden.

4. In den ersten paar Minuten nach Eröffnung der Eier bilden während späterer Furchungsperioden fast sämmtliche Zellen des Keimes an ihrer freiliegenden Seite fingerförmige Fortsätze, indem ihr Hyaloplasma in einseitig hervortretenden cylindrischen Fortsätzen sich ansammelt. Die Bildung ist vorübergehend, die Zellen runden sich in der Folge wieder ab und die einzelnen Gruppen können sich sogar mit epithelartig geglätteten Flächen umgränzen. Ich kenne im Verlauf der normalen Entwickelung keinen Vorgang, der sich der Bildung fingerförmiger Fortsätze zur Seite stellen lässt.

5. Das Morphoplasma der Blastomeren bildet, wie sich aus der Beobachtung von Schnitten ergiebt, ein feines von Körnchen, den Plasmosomen, durchsetztes Gerüst, das nach einwärts das Kerngebiet mit umfasst, nach aussen in einer membranösen Gränzschicht seinen Abschluss findet. Die Maschen des Gerüstes sind vom Hyaloplasma eingenommen.

6. Der grosse und rasch eintretende Wechsel in Form und Anordnung des Morphoplasmagerüstes macht es wahrscheinlich, dass sein Bindemittel eine mit dem Hyaloplasma nicht sich mischende zähe Flüssigkeit ist.

7. Das Hyaloplasma verhält sich gegen die eiweissfällenden Fixationsmittel indifferent.

8. Nach dem Eintritt der Fischeier in's Wasser erfolgt ein concentrisches Zusammenströmen des Keimplasma's, und dieses sammelt sich zu einem runden Hügel, an dem weiterhin die Furchung abläuft. Der Keim im engeren Sinn enthält nur an seiner Peripherie unorganisirte Einlagerungen, er stellt somit eine von Nebenbestandtheilen verhältnissmässig freie Anhäufung von lebender Substanz dar. Vor Beginn der Furchung ist sein Gefüge auf grosse Strecken hin gleichmässig, sein Morphoplasmagerüst sehr feinmaschig und dessen Maschen sowohl, als dessen Gerüstfäden variiren nach verschiedenen Richtungen und in verschiedenen Bezirken nur unerheblich. Auf dieser Entwickelungsstufe kann man das Plasma als isotyp bezeichnen.

Langsam breiten sich die ersten Strahlungen aus, und der isotype Character des Plasmas verliert sich bei fortschreitender Furchung immer mehr. Je grösser die Zahl der wirksamen Centren und je kleiner die einzelnen Territorien, um so durchgreifender gestaltet sich die innere Gliederung der lebenden Substanz.

8. Die membranösen Gränzschichten der Blastomeren entstehen durch Verdickung und transversale Verschmelzung von Morphoplasmabälkchen. Sie bestehen gleich dem übrigen Morphoplasma aus lebender Substanz, deren organischen Abschluss sie liefern. Sie hemmen das Zerfliessen des Plasma's und das Uebergreifen von Strahlungen aus einer Zelle in die andere.

9. Wir haben keine Anzeichen einer inneren Organisation des Hyaloplasma und können hieraus, sowie aus der nachweisbaren Organisation des Morphoplasma schliessen, dass die activen Leistungen der Zellen, mögen sie sich auf äussere Formveränderungen beziehen

oder auf innere Verschiebungen, vom morphoplasmatischen Gerüst ausgehen, und dass dem Hyaloplasma dabei eine secundäre Rolle zukommt.

10. Frei fliessendes Plasma ist nicht mehr als organisirte lebende Substanz anzusehen.

11. Mit dem Wechsel physiologischer Zustände wechselt die Organisation der lebenden Substanz. Die Vertheilung von Morphoplasma und Hyaloplasma ändert sich im Verlauf amöboider Bewegungen und in dem der Kern- und Zellentheilung.

12. Die hyalinen Buckel amöboid bewegter Zellen sind noch von einer membranösen Gränzschicht umkleidet und von einem sehr feinen und sparsamen Plasmagerüst durchsetzt. Letzteres wird weiterhin dichter und der hyaline Buckel trübt sich. Die Entstehung hyaliner Buckel bedarf zu ihrer Erklärung nicht der Annahme einer autonomen Beweglichkeit der hyalinen Substanz. Sie lässt sich als Erschlaffungserscheinung der Gränzschicht und des anstossenden Morphoplasmagerüstes deuten.

13. Während der Vorgänge der Kern- und Zellentheilung ändert sich die Vertheilung der hyalinen und der Gerüstsubstanz in streng gesetzmässiger Weise. Unter Hinweis auf meine vorjährige Arbeit über Zellen- und Syncytienbildung, hebe ich hier nur hervor, dass Zellentheilungen sich stets durch eine Auflockerung des Gränzgerüstes einleiten, und dass die Ansammlung eines hyalinen von einem lockeren Gerüst durchsetzten Plasmafeldes (des plasmatischen Karyoblasten) der Neubildung von Kernen vorausgeht.

14. Mit der Annahme ENGELMANN'S, dass die Contractionsvorgänge im Plasma als Quellungserscheinungen zu deuten seien, steht die Beobachtung der Vorgänge an bewegten Blastomeren in keinem Widerspruch. Das Hervorbrechen hyaliner Buckel an der Oberfläche vom Blastomeren lässt sich gemäss jener Annahme auf austretendes Quellungswasser beziehen.

15. Unsere Kenntnisse vom Wachsthume der lebenden Substanz sind noch völlig fragmentarisch.

16. Beim Wiederaufbau der Blastomerenkerne treten gegen das Ende der Anaphase geschlossene, dunkle Ringe auf, die von verschiedenen Autoren als in Quellung begriffene bläschenförmige Chromosomen beschrieben worden sind. Die fraglichen Figuren deute ich nicht als aufquellende und zu Kernfragmenten werdende Chromosomen, sondern als Maschen des Plasmagerüstes,

die von den wandernden Chromatinkörnern durchsetzt werden. Das Gerüst des plasmatischen Karyoblasten bestimmt die Endanordnung des Chromatins im neu entstehenden Kern.

17. Unbefruchtete Salmonideneier können sich durch wenigstens 4 Wochen hindurch im fliessenden Wasser erhalten, ohne abzusterben. Es bildet sich während der ersten Tage ein Plasmahügel, der sich in der Folge wieder verliert. Allmählig wird das Keimplasma durchsichtiger und minder zäh, als zuvor; auch nimmt seine Menge unzweifelhaft ab und es wird mehr und mehr von Fetttropfen und von Dotterkugeln durchsetzt. Letztere können im Verlauf ihrer Verdauung kernähnliche Structuren bekommen.

18. In Eiern von Regenbogenforellen, die 17 Tage lang unbefruchtet im Wasser lagen, habe ich zahlreiche kleine Astrosphären aufgefunden mit mehrgliedrigen Mikrocentren. Kerne oder Chromosomen waren nicht mehr zu erkennen. Die vom Sperma unabhängige Entstehung von Astrosphären und von inneliegenden Centrosomen lässt auf das ursprüngliche Vorhandensein autonomer Eicentren zurückschliessen. Es kommt im Keim des unbefruchteten Salmonideneies nicht zur Trennung von Zellen, der Keim bleibt auf der Stufe eines Syncytiums stehen. Bemerkenswerth bleibt dabei die Verkümmerung der Chromosomenentwickelung.

Nachtrag.

Seitdem obiger Aufsatz zum Druck eingereicht worden ist, ist das Buch von Prof. ALFRED FISCHER „Fixirung, Färbung und Bau des Protoplasmas“ erschienen, das die Zusammenstellung der kritischen Untersuchungen enthält, die der Verfasser während einer Reihe von Jahren über Technik und Theorie der neueren Zellenforschung angestellt hat. Beim jetzigen Stande der Forschung entsprechen diese und ähnliche kritische Arbeiten einem unstreitig vorhandenen wissenschaftlichen Bedürfniss. Da sie aber in erster Linie destructiv vorgehen müssen, so erwecken sie zunächst ein Gefühl des Unbehagens. Wohl oder übel werden wir dadurch gezwungen, mancherorts die Arbeit von Grund auf neu zu beginnen, wo wir geglaubt hatten, uns eines sicheren Besitzes zu erfreuen. Vom FISCHER'schen Buche darf man jedenfalls sagen, dass es mit seinem reichen thatsächlichen Inhalt viel zu denken giebt, und man muss dem Verfasser auch das Lob lassen, dass

er in seiner Zerstörungsarbeit maassvoll vorgegangen ist, und sich im Allgemeinen mit dem Aufwerfen kritischer Zweifel gegenüber von bestehenden Vorstellungen und mit der Mahnung zur Vorsicht begnügt hat. Wo er zu weit gegangen sein mag, da wird die läuternde Gegenkritik nicht ausbleiben. Auf einzelne Bedenken, die mir beim Durchlesen des Buches gekommen sind, habe ich hier nicht einzugehen, dagegen muss ich allerdings prüfen, wie sich die Ergebnisse meines obigen Aufsatzes zu FISCHER's Auffassung von der Organisation des Protoplasmas stellen.

In manchen Hauptpunkten stehen wir offenbar auf demselben Boden. Mein Bestreben ist es gewesen, die Beobachtungen am lebenden bez. am frischen Plasma mit dem am fixirten in Zusammenhang zu bringen, und ich habe auch meinerseits besonderes Gewicht auf den stetigen, den physiologischen Vorgängen sich anpassenden Wechsel in der Organisation des Plasmas gelegt. Gerüste, Strahlungen und verwandte Bildungen werden von FISCHER nicht in Abrede gestellt, es wäre dies auch kaum durchführbar, da solche Bildungen gleich mannigfachen Formen von Plasmosomen am lebenden Object zu beobachten sind. Was FISCHER mit vollem Recht bekämpft, das ist die Starrheit jener Organisationen.

Weniger Uebereinstimmung besteht zwischen FISCHER und mir in der Auffassung cellulärer Gränzschichten und in der Deutung der daran stossenden hyaloplasmatischen Lagen. FISCHER hält die „homogene Hautschicht" (hyaline Mantelschicht) protoplasmatischer Gebilde für durch Wasser gequollenes Körnerplasma, das an der Oberfläche fortlaufend durch Wasser gelöst und von Innen her durch neu quellendes Körnerplasma regenerirt wird (l. c. S. 287). Das steht, wie man sieht, mit meiner Auffassung von der Existenz morphoplasmatischer Gränzschichten und ihrer durch feine Fäden vermittelten Verbindung mit dem Innenplasma in schroffem Gegensatz. Die Deutung der von mir beschriebenen cellulären Gränzschichten als blosse Gerinsel ist deshalb nicht annehmbar, weil jene Schichten an der lebenden Zelle durch ihre mechanische Leistung sich kund geben. Das Ausfliessen des Plasmas aus den Blastomeren erfolgt erst nach Zersprengung der Gränzschichten. Selbstverständlich ist auch der im Anfang dieses Aufsatzes beschriebene rasche Wechsel in Vorhandensein und Mächtigkeit hyaliner Mantelschichten mit der FISCHER'schen Auffassung in keiner Weise zu vereinbaren.

Der Zusammenhang der morphoplasmatischen Gränzschicht mit dem innern Körnerplasma durch feine Verbindungsfäden, der an fixirten Präparaten so bestimmt hervortritt, ist an der lebenden Zelle aus dem Verhalten der Körnerbewegungen zu erschliessen. Wenn man mitten durch die hyaline Substanz einzelne Körner rücken sieht, und wenn diese Körner bald langsam, bald stossweise ihren Ort ändern, stellenweise sich überholend, so sind dies Bewegungsweisen, die unverständlich bleiben, sofern die Körner im Hyaloplasma, als in einer homogenen Flüssigkeit, frei suspendirt sein sollen. Sie werden dagegen verständlich unter der Voraussetzung von pseudopodienartig das Hyaloplasma durchsetzenden und in die Gränzschicht übergehenden Fäden, als Trägern jener Körner.

Mehr als je stehen wir nunmehr vor der Aufgabe, die an der lebenden Zelle vorhandenen Structuren optisch zu differenziren. Ob mit polarisirtem Lichte oder mit anderen Hilfsmitteln mehr als auf bisherigen Wegen erreichbar sein wird, muss die Zukunft lehren.

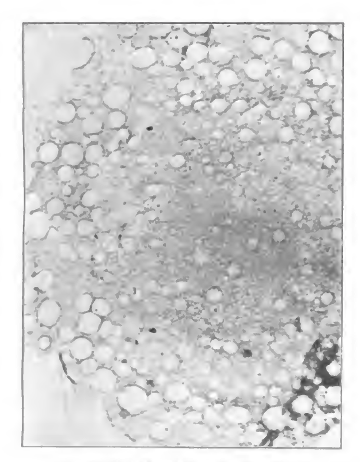


Fig. 1. Eine Minute nach der Befruchtung.

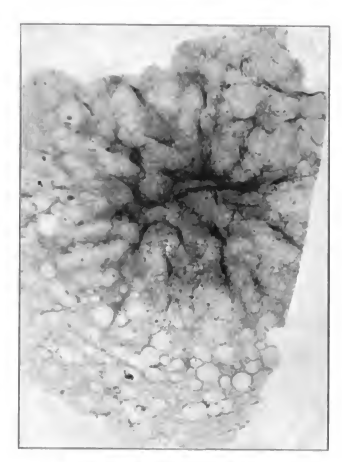


Fig. 2. Dreissig Minuten nach der Befruchtung.

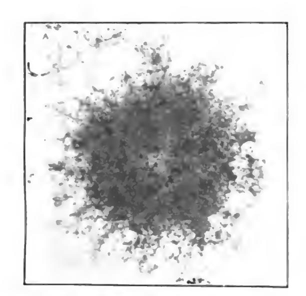


Fig. 3. Fünf Stunden nach der Befruchtung.

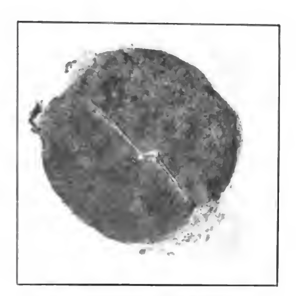


Fig. 4. 21 Stunden nach der Befruchtung.

Fig. 1—4. Flächenansichten fixirter Fischkeime aus den ersten Zeiten der Befruchtung.
Fig. 1—3 Forelle, Fig. 4 Lachs.

Fig. 16.

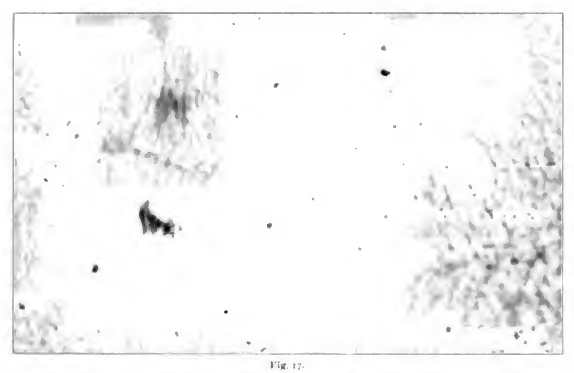


Fig. 17.

Fig. 16 u. Fig. 17. Theilungsfiguren von Blastomeren früher Stufen; Anaphase; Diastem- und Gränzschichtenbildung. Bei Fig. 16 und noch mehr bei Fig. 17 sieht man die Verdickungen der Plasmabälkchen im Gränzgebiet. Starke Vergrösserung, bei Fig. 16 ca. 1350fach; bei Fig. 17 1800fach.

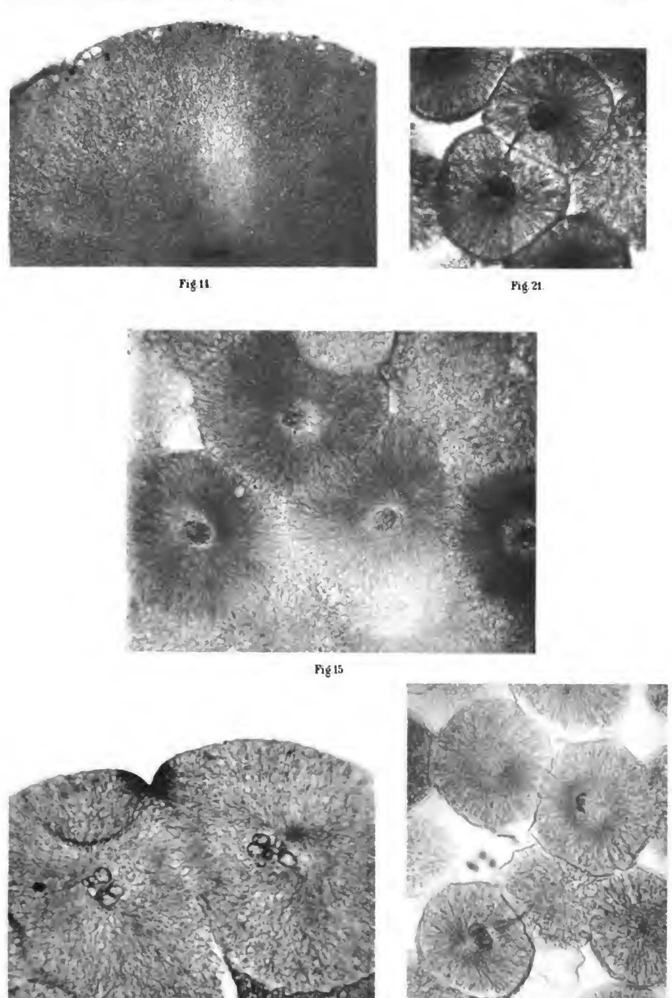


Fig. 14. Fig. 21.

Fig. 15

Fig. 23 Fig. 22

PERIODISCHE ERSCHEINUNGEN

BEI DER AUFLÖSUNG DES CHROMS IN SÄUREN

VON

W. OSTWALD.

Des XXV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° IV.

MIT 6 TAFELN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1899.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 3. Juli 1899.
Das Manuscript eingeliefert am 7. August 1899.
Der Abdruck vollendet am 9. December 1899.

PERIODISCHE ERSCHEINUNGEN

BEI DER AUFLÖSUNG DES CHROMS IN SÄUREN;

ERSTE MITTHEILUNG

VON

W. OSTWALD.

1. An dem metallischen Chrom, welches gegenwärtig nach dem ausgezeichneten Verfahren von H. GOLDSCHMIDT[1]) in grossen Mengen und von vorzüglicher Reinheit dargestellt wird, hat vor einem Jahre W. HITTORF[2]) sehr merkwürdige elektrochemische Verhältnisse beobachtet. Er fand, dass das Metall auf zwei, bezw. drei ganz verschiedene Weisen sich als Glied einer VOLTA'schen Kette verhält. In gewissen Fällen erscheint es als ein leicht oxydirbares Metall, das in der Spannungsreihe zwischen Zink und Cadmium steht, sich unter lebhafter Wasserstoffentwicklung in Säuren auflöst und dabei ein Salz des zweiwerthigen Chroms bildet. Unter anderen Umständen verhält es sich ungefähr wie Quecksilber in der Spannungsreihe, wird von Säuren nicht angegriffen und giebt als Anode eines Stromkreises von genügender Spannung Chromsäure an Stelle des Chromosalzes. Ausserdem kann es noch in Zuständen auftreten, in denen es eine Chromiverbindung liefert.

Der gewöhnliche Zustand des Metalls ist nach HITTORF der passive, d. h. durch verdünnte Säuren nicht angreifbare. Er stellt sich freiwillig her, wenn das Metall an der Luft liegt, auch wenn es sich vorher im aktiven, d. h. in verdünnten Säuren löslichen Zustande befunden hatte. Der aktive Zustand entsteht, wenn man das passive Metall mit Säuren oder auch Lösungen neutraler Salze erwärmt; bei einer gewissen Temperatur, die von der Natur und Concentration des gelösten Stoffes abhängt, beginnt plötzlich die Wasserstoffentwicklung, und der so entstandene aktive Zustand hält einige Zeit, im günstigsten Falle einige Tage an.

Im Besitze einer Probe metallischen Chroms, die ich von Hrn. Dr. GOLDSCHMIDT bald nach der Erfindung seines Verfahrens erhalten hatte, habe ich mich leicht mit den von HITTORF entdeckten Thatsachen aus eigener Anschauung bekannt machen können. In der Hoffnung, eine Erklärung für sie zu finden, studirte ich das Verhalten des Metalls bei der Auflösung im aktiven Zustande

1) LIEBIGS Annalen.
2) Ztschr. f. phys. Chemie 25, 729. 1898.

genauer, indem ich der Geschwindigkeit der Gasentwicklung in ihrer Abhängigkeit von der Natur der Säure und der Gegenwart vorhandenen Chromosalzes meine Aufmerksamkeit zuwendete; ich glaubte in einem katalytischen Einflusse des vorhandenen Salzes auf die Reactionsgeschwindigkeit einen Schlüssel für die erwähnten Erscheinungen finden zu können. Wiewohl meine ersten Versuche diese Meinung zu unterstützen schienen, traten mir alsbald andere Thatsachen entgegen, die der Arbeit eine wesentlich veränderte Richtung gaben.

Zu dem erwähnten Zwecke der Geschwindigkeitsbeobachtungen hatte ich ein Stückchen des Metalls nebst einer gemessenen Menge

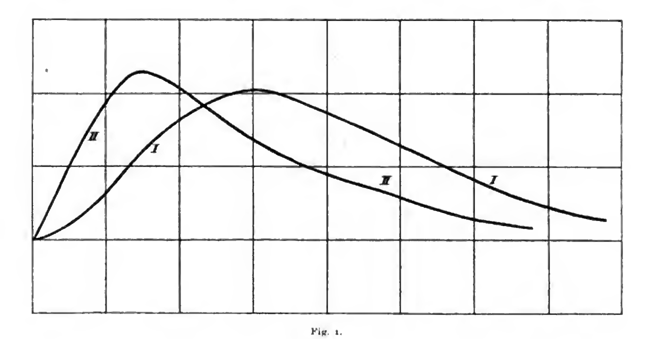


Fig. 1.

Säure in ein Gläschen gebracht, und dies durch Stopfen und Gummischlauch mit einer Gasbürette verbunden, an der ich alle Viertelminuten eine Ablesung machte. Trägt man die Unterschiede im Stande der Bürette für jede Viertelminute als Ordinaten gegen die Zeit als Abscissen ab, so erhält man Curven von der Gestalt Fig. 1. Diese lehren, dass die Gasentwicklung nicht augenblicklich mit ihrer vollen Stärke einsetzt, sondern ihre Geschwindigkeit allmählich steigert, bis ein Maximum erreicht ist. Darüber hinaus nimmt infolge der Erschöpfung der Säure die Geschwindigkeit langsam ab, um bei Null zu enden.

Die erwähnte Hypothese bestätigte sich insoweit, als die erste Periode weit kürzer ausfiel, wenn bereits Chromosalz (von einem

früheren Versuche) sich neben der frischen Säure im Entwicklungsgefässe befand. Die Linie I stellt den Lösungsvorgang eines Stückes Chrom in einem Cubikcentimeter doppelt normaler Salzsäure dar; II denselben Vorgang, als nach erfolgter Sättigung die gleiche Menge frischer Säure zur Lauge gefügt wurde.

2. Bei der weiteren Untersuchung, namentlich mit grösseren Säuremengen wurde ich indessen durch anscheinende Unregelmässigkeiten gestört, welche bald einen ausgeprägt periodischen Charakter aufwiesen. Die Gasentwicklung ging nach erreichtem Maximum auf einen kleinen Werth herunter, dann begann wieder eine neue schnelle Entwicklung, und so konnten bei unverändertem Apparate mehrere Maxima beobachtet werden, deren Abstände auffallend regelmässig erschienen, und deren Anzahl sich durch Vermehrung der Säuremenge beliebig steigern liess.

Da die Bürettenablesungen sich bei der grossen Dauer der Versuche bald als sehr ermüdend und mit den Pflichten eines vielbeschäftigten Institutsdirektors nicht wohl vereinbar erwiesen, so sann ich darauf, die anscheinend ohne Beispiel in der Chemie dastehende Erscheinung der Geschwindigkeitsperioden zu einer selbstthätigen Aufzeichnung ihres Verlaufes zu bringen. Dies gelang auf Grund der nachstehenden Ueberlegung.

Lässt man ein mit veränderlicher Geschwindigkeit sich entwickelndes Gas durch eine lange Capillare ins Freie treten, so wird, da die Geschwindigkeit der Ausströmung durch eine Capillare dem Drucke proportional ist, sich im Entwicklungsgefässe ein Druck herstellen, der in jedem Augenblicke der Entwicklungsgeschwindigkeit proportional ist. Dies gilt allerdings streng nur unter der Voraussetzung, dass im Apparate kein todter Raum vorhanden ist; die unvermeidliche Anwesenheit eines solchen wird dahin wirken, dass die Drucke den Geschwindigkeiten ein wenig nachhinken, doch um so weniger, je geringer der Gesammtraum des Apparates ist, in welchem sich der Druck herstellt. Die Erscheinung wird sich in den Aenderungen des Druckes also ein wenig verwischt und abgerundet darstellen, doch wird ihr wichtigstes Element, die Periode, dadurch nicht gefälscht.

Veränderliche Drucke zu registriren, ist eine Aufgabe, deren Lösung durch die physiologische Praxis längst gefunden ist. So konnte ich mich der hier ausgebildeten Methoden bedienen und fand die nachstehend beschriebene Anordnung einfach und sicher.

Fig. 2 zeigt das Entwicklungsgefäss, das aus den eben erwähnten Gründen immer möglichst gefüllt sein muss. In diesem befindet sich das Metall; damit es nicht in der schwerer gewordenen gesättigten Lösung am Boden liegt, wird es in ein Säckchen aus weitmaschigem Schleiertüll mittelst eines durch den Stopfen eingeklemmten Fadens in der Nähe der Oberfläche gehalten.[1]) Der entwickelte Wasserstoff geht durch ein kleines Trockenrohr mit Watte und Natronkalk, um die mitgerissenen Säuretröpfchen zu verlieren und etwas getrocknet zu werden. Auch diese Vorsicht ist wesentlich, da sich sonst Feuchtigkeit in der Capillare absetzt, und durch deren Verengung die Aufzeichnung erheblich fälschen kann. Damit die mitgerissene Säure aus dem Entwicklungsrohr abfliessen kann, ohne in den Apparat geführt zu werden, ist dieses innerhalb des Gefässes mit einem seitlichen Loche versehen, und an seinem unteren Ende ausgezogen und etwas nach oben gekrümmt. Dadurch kann das Gas immer frei zum Seitenloche eintreten und die abgesetzte Flüssigkeit läuft unten wieder ab. Die Aufkrümmung des unteren Endes ist nöthig, damit nicht durch unmittelbar eintretende Gasblasen doch Flüssigkeit in die Leitung gedrückt wird.

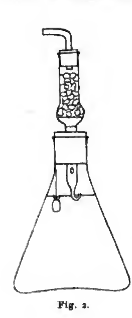


Fig. 2.

Von dem Entwicklungsgefäss tritt das Gas in die aus weiten Capillaren zusammengesetzte Leitung (Fig. 5, S. 226), welche bei *B* ein verschliessbares Seitenrohr (um jederzeit den Druck aufheben zu können) und bei *C* die Ausflusscapillare an einem *T*-Stücke trägt. Wegen der Verstopfungsgefahr ist es am besten, die Capillare eher weit und lang, als eng und kurz zu nehmen; die meinen waren 50 cm lang und hatten einen Durchmesser von etwa 0.1 mm.

Der Druckschreiber besteht aus einer mit dünnem Gummi überzogenen Kapsel, die einen ungleicharmigen Hebel trägt. Die Bewegungen der Gummihaut bethätigen den Hebel, und eine Feder an dessen Ende schreibt seinen Stand auf einen langsam mittelst eines Uhrwerkes bewegten Papierstreifen auf. Die einzelnen Theile sind folgendermaassen eingerichtet. Die Kapsel (Fig. 3) wird her-

1) Die Vernachlässigung dieser Vorsicht hat mir einige anfangs schwer erklärliche Unregelmässigkeiten gebracht, die später nicht mehr auftraten.

gestellt, indem man einen Ring aus 2 mm dickem Messingdraht auf ein passend geschnittenes Blech löthet; dabei entsteht zwischen Ring und Blech eine Rille, welche ein luftdichtes Festbinden des Gummihäutchens gestattet. Das Blech trägt auf der anderen Seite ein eingelöthetes Messingrohr, und ferner das Axenlager des aus dünnem Blech gefertigten Schreibhebels. Bei meinen Apparaten war dessen Länge 20 cm, und in 2 cm Entfernung von der Drehaxe befand sich der Druckpunkt für die Gummihaut in Gestalt einer angelötheten Stecknadel, deren Kopf durch Vermittelung eines zwischengelegten Kreisplättchens die Bewegungen der Haut aufnahm. Die Stellung war so geregelt, dass beim Drucke Null der Hebel noch sanft gegen die Haut lastete.

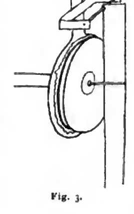


Fig. 3.

Die Empfindlichkeit des Apparates war sehr genügend; sie lässt sich durch Verengerung der Capillare beliebig steigern. Ich habe sie so geregelt, dass die grössten vorkommenden Geschwindigkeiten höchstens 2 bis 3 cm Ausschlag gaben.

Da die beobachteten Perioden meist mehrere Minuten (bis Stunden) betrugen, so war eine ziemlich geringe Geschwindigkeit für die Bewegung des Papiers erforderlich. Ich erhielt sie, indem ich mit der Stundenaxe einer gewöhnlichen Weckeruhr eine Walze von etwa 4 cm Durchmesser verband, welche den Papierstreifen mit einer Geschwindigkeit von 12.8 cm in der Stunde fortführte. Um eine sichere Fortführung ohne zu grosse Belastung der Uhr zu erzielen, erwies es sich am zweckmässigsten, die aus Messingrohr gefertigte Walze mit Bernsteinlack, dem etwas Terpentin zugesetzt war, zu überziehen. Die ganz wenig klebrige Beschaffenheit der Oberfläche verhinderte vollständig das Gleiten, ohne dass das Papier mehr als nöthig festgehalten wurde. Zum sicheren Anschluss lag eine zweite, mit Ringen von Sammet überzogene Walze in einem Schlitzlager über der ersten, und drückte durch ihr Gewicht das Papier genügend fest an.

Zum Schreiben diente eine Glasfeder nach C. Ludwig. Eine solche stellt man sich her, indem man ein dünnwandiges Rohr von 0.3 bis 0.4 cm Weite capillar auszieht, die Capillare mit einem scharfen Glasmesser eben abschneidet und rund schmilzt. Soll die Feder fein schreiben, so muss die Capillare sehr dünn sein, und

das für den leichten Gang der Feder wesentliche Rundschmelzen führt leicht zu einem völligen Verschluss. Man muss daher den Handgriff ein wenig üben und eine sehr kleine Flamme anwenden. Federn, die nicht eben abgeschnitten sind, schreiben nicht zuverlässig; man untersucht sie daher vor dem Gebrauche unter einer guten Lupe. Die Capillare wird schliesslich rechtwinklig abgebogen, so dass das Ganze die Gestalt Fig. 4 erhält. Eine gute derartige Feder schreibt mit einer Füllung von zwei bis drei Tropfen Tinte ebensoviele Tage.

Fig. 4.

Als Tinte dient eine Lösung irgend eines wasserlöslichen Anilinfarbstoffes. Im Interesse einer späteren photographischen Wiedergabe der Curven nimmt man nicht das gewöhnlich benutzte Anilinviolett, sondern einen rothen oder braunen Farbstoff; ich habe Eosin angewendet.

Um die Versuche, von denen sich jeder durch eine Anzahl Stunden ausdehnte, nach Bedarf vervielfältigen zu können, habe ich die Walze lang genug machen lassen, um fünf Papierstreifen

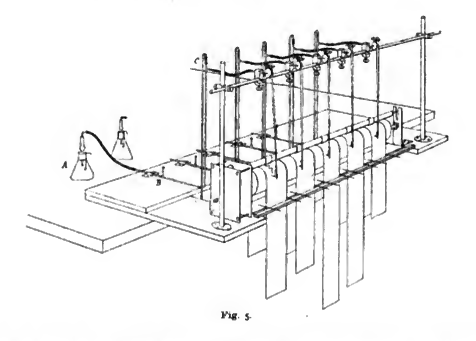


Fig. 5.

neben einander zu fördern, und fünf Druckschreiber angebracht. Das Uhrwerk erwies sich auch dieser Aufgabe gewachsen, und durch die Anwendung der Druckwalze mit Sammetringen liess sich auch ein sicheres Mitnehmen aller fünf Papierbänder (das anfangs Schwierigkeiten machte) erzielen. Fig. 5 giebt eine Vorstellung von dem Apparate.

3. Was nun das allgemeine Verhalten des Chroms bei der Auflösung in verdünnten Säuren anlangt, so sind die grundlegenden Beobachtungen hierüber bereits von Hittorf in seiner oben erwähnten Arbeit mitgetheilt worden. Hinzuzufügen ist noch, dass der passive Zustand dem Metall durch Behandeln mit einem beliebigen Oxydationsmittel ertheilt werden kann. Ich habe Kaliumpermanganat, Jodjodkalium, Ferricyankalium, Eisenchlorid, Kaliumnitrit, Chromsäure mit wesentlich gleichem Erfolge angewendet; auch der Luftsauerstoff scheint insbesondere das feuchte Metall ziemlich schnell inaktiv zu machen. Reductionsmittel erzeugen wieder Aktivität, doch müssen sie zu diesem Zwecke ziemlich kräftig sein. Mit Natriumsulfit konnte ich keine Aktivirung erzielen, ebensowenig mit Eisenvitriol. Sicher wirkt die Berührung mit Zink, Cadmium, Eisen; Zinn und Blei liegen an der Grenze. Hieraus lässt sich das elektrische oder chemische Potential, das für die Aktivirung erforderlich ist, abschätzen. Genauere Messungen über diesen Gegenstand habe ich zur Zeit nicht beabsichtigt.

Beim Liegen unter Salzsäure — unter welcher Bezeichnung fortlaufend eine ungefähr doppelt normale Lösung, 73 g im Liter verstanden werden soll — wird das inaktive Metall wieder aktiv, und beginnt nach kürzerer oder längerer Zeit sich unter lebhafter Gasentwicklung aufzulösen. Die Zeit, bis zu der dies eintritt, hat sich bei mehreren ganz gleich behandelten Stücken als sehr verschieden erwiesen, so dass sie von Zufälligkeiten abhängt. Den wesentlichsten Einfluss haben anscheinend die Spalten und Risse, die in dem stark krystallinischen Metalle immer vorhanden sind. In die feineren von ihnen dringt das Oxydationsmittel nicht vollständig ein, und nach längerem Liegen unter der Säure kriecht schliesslich diese vermöge der Capillarwirkung bis zu solchen nicht inaktiv gewordenen Stellen vor. Da, wie der Versuch alsbald lehrt, ein inaktives Stück Chrom durch Berühren mit einem aktiven unter der Säure gleichfalls aktiv wird, so genügt die kleinste aktive Stelle, um das ganze Stück activ zu machen.

Unter Umständen hat sich indessen eine sehr lange währende Inaktivität beobachten lassen, wenn auch das Metall mit Säure in Berührung stand. Man wird daher die Möglichkeit zugeben dürfen, dass, wenn sekundäre Einflüsse der eben geschilderten Art vermieden werden, das inaktive Metall auch bei Berührung mit Salzsäure seinen Zustand beibehält.

4. Wenn man ein Stück des Metalls in dem oben beschriebenen Apparate in Salzsäure auflöst, so zeigt die vom Druckschreiber aufgezeichnete Linie eine lange Reihe von regelmässigen Oscillationen oder Wellen.

Die regelmässigsten Erscheinungen erhielt ich, wenn das Metall erst durch ein Oxydationsmittel passiv, und dann durch Berühren mit Zink oder Cadmium — ich habe fast immer das letzte Metall benutzt — unter der Säure wieder aktiv gemacht wurde. Fig. 6, Taf. I. stellt die Linie dar, welche ein Stück Chrom, das mehrere Tage unter einem Gemisch von Kaliumbichromat und Salzsäure gelegen hatte (wobei sein Glanz unverändert geblieben war), nach dem Aktiviren mit Cadmium bei der Auflösung in zweifach normaler Salzsäure ergab. Die Linie ist fast in natürlicher Grösse (16:15) ohne jede Aenderung photographisch getreu wiedergegeben; sie ist in Stücke geschnitten, von denen jedes eine Stunde bedeutet, und die Stücke sind unter einander gesetzt. Wie man sieht, hat sich das Metall zuerst etwas unregelmässig zu lösen angefangen; dann haben nach Verlauf einer Viertelstunde die regelmässigen Perioden begonnen, und haben sich während der sieben Stunden, durch welche die Erscheinung verfolgt wurde, ununterbrochen fortgesetzt. Aus der Form der Linien am Ende der siebenten Stunde ersieht man, dass man die Beobachtung noch sehr viel länger hätte ausdehnen können, ohne dass sich Erhebliches geändert hätte.

Für die Deutung der Linie ist zu beachten, dass die Ordinaten, welche den Geschwindigkeiten annähernd proportional sind, nicht durch Gerade dargestellt werden, sondern durch Kreisbogen von 18.75 cm Radius, die senkrecht auf der unteren Geraden, die den Druck und damit die Geschwindigkeit Null darstellt, stehen.[1])

Die allgemeine Form der Linie zeigt, dass am Anfange jeder neuen Periode die Beschleunigung sehr plötzlich einsetzt; die nach links liegenden Seiten der Wellen weichen nur wenig von der kreisförmigen Ordinatenlinie ab. Das Absinken von diesem schnell erreichten Maximum erfolgt immer langsamer und ist, namentlich am Anfange der Versuche, durch häufige kleine Unstetigkeiten unterbrochen. Auf letztere soll später eingegangen werden.

1) Der Radius in den Originalen ist 20 cm; um aber die Ablesung der Curven zu erleichtern, sind die Figuren im Verhältniss von 16:15 verkleinert worden, sodass jede Minute durch 2 mm dargestellt wird.

Im Laufe des Versuches wird die Periode immer länger. Die Zunahme ist ziemlich regelmässig, und würde wohl noch regelmässiger sein, wenn nicht die Temperatur, auf deren Constanterhaltung zunächst noch nicht Bedacht genommen wurde, sich langsam geändert hätte. Die Zunahme der Reactionsdauer ist durch die allmähliche Erschöpfung der Säure bedingt; später wird der Einfluss der Verdünnung der Säure besonders betrachtet werden.

Die Perioden sind nicht immer so regelmässig, wie in dem eben beschriebenen Falle, beiläufig dem ersten, der mit dem oben geschilderten Apparate aufgenommen wurde. Fig. 7, Taf. I. stellt die Linie dar, welche ein anderes Stück geschrieben hatte. Es war ohne jede weitere Vorbereitung in die Säure gebracht worden, und hatte sich nach etwa 20 Minuten zu lösen begonnen. Wie man sieht, ist eine Wiederholung der Erscheinung zwar vorhanden, indem namentlich die Spitze am Anfange jeder Periode, und die annähernd constante starke Entwicklung, auf die eine viel kürzere Pause folgt, sich regelmässig wiederholen. Die Länge der Periode schwankt aber ohne ersichtliche Regelmässigkeit hin und her.

Eine so wenig regelmässige Linie ist indessen eine Seltenheit. Von den mehr als hundert Linien, die ich beobachtet habe, ist die vorliegende eine der unregelmässigsten.

Bemerkt sei noch, dass die kleinen Schwankungen kurz vor jedem Abfall keineswegs zufällige Unregelmässigkeiten des Apparates sind. Sie stellen wirkliche schnelle Aenderungen in der Entwicklung des Gases dar, die in ähnlicher, nur viel regelmässigerer Gestalt häufig genug auftreten.

5. An dem Auftreten der Perioden konnte nun die Beschaffenheit des Metalls, der Lösung, oder beider bestimmend betheiligt sein. Um diese Frage zu entscheiden, stellte ich folgende Versuche an.

Es wurden zwei Entwicklungsgefässe mit Salzsäure und je einem Stück Metall beschickt, und durch ein T-Stück mit demselben Druckschreiber verbunden. Dann musste in jedem Gefäss sich eine eigene Periode herstellen, und der Apparat musste die Summe beider Geschwindigkeiten angeben, d. h. eine Linie schreiben, die sich aus der Addition zweier Linien von verschiedener Periode ergiebt. In Fig. 8, Taf. II. ist diese Linie dargestellt; gemäss dem Gesetz der langsam zunehmenden Perioden lassen sich die zu jedem der beiden Metallstücke gehörigen Gipfel leicht von einander

unterscheiden, und in der Figur sind sie durch die Bezeichnung a und b erkennbar gemacht.

Nun wurde der gleiche Versuch angestellt, indem zwei Stücke Metall in dasselbe Gefäss gehängt wurden, doch so, dass sie nicht in metallische Berührung kommen konnten. Wurde die Erscheinung durch Vorgänge in der Flüssigkeit bedingt, so war zu erwarten, dass eine Linie mit einfacher Periode, wie Fig. 6, Taf. I. auftreten würde. Waren dagegen die Metallstücke mit ihrer besonderen Beschaffenheit die Ursache der Perioden, so war eine Summenlinie nach Art der Fig. 8, Taf. II. zu erwarten. Fig. 9, Taf. II. stellt die erhaltene Linie dar: sie ist eine Summencurve, und daher liegt die Ursache der Periodicität in dem Metalle und nicht in der Lösung.

Nun wurde endlich ein dritter Versuch derart angestellt, dass zwei verschiedene Stücke Metall so in die Lösung gehängt wurden, dass sie in metallischer Berührung mit einander standen. Gemäss der Thatsache, dass ein passives Stück Chrom durch Berührung mit einem aktiven gleichfalls aktiv wird, durfte man erwarten, dass beide Stücke wie eines wirken, und eine einfache Linie geben würden. Dies wurde denn auch beobachtet, wie Fig. 10, Taf. II. ausweist. Aber ein glücklicher Zufall gestaltete diesen Versuch noch lehrreicher. Während der Auflösung sind die Stücke ausser Berührung gekommen; man sieht daher in der dritten Stunde bei * plötzlich eine Summenlinie auftreten. Dann haben sich die Stücke wieder berührt und drei gemeinsame Perioden geschrieben; schliesslich bei ** sind sie dauernd ausser Berührung gekommen und haben bis zum Abbrechen des Versuches eine Summenlinie geschrieben.

Daraus geht also hervor, dass die metallische Berührung genügt, aber auch nothwendig ist, um zwei verschiedenen Stücken Chrom dieselbe Periode zu ertheilen. Im Anschluss an die oben gemachte Bemerkung über die Aktivirung eines passiven Stückes durch ein aktives ist es von Interesse zu bemerken, dass die gemeinsame Periode bei der Berührung die kleinere von beiden ist. Es hat also das Stück, welches schneller aktiv wurde, das andere jedesmal mitgenommen, und dieses hat seine eigene Periode eingebüsst. Ein Einfluss des langsameren Stückes lässt sich vielleicht darin erkennen, dass die gemeinsamen Perioden ein wenig länger sind, als die des einzelnen geschwinderen Stückes. Doch kann dies auch mit der grösseren Fläche der beiden Stücke, die

aktiv werden musste, zusammenhängen; ohnedies ist der Unterschied nur klein.

6. Die Dauer der Perioden ist nicht nur von der Natur des Metalls und der Säure, bez. ihrer Temperatur und Concentration abhängig, sondern auch noch von anderen Umständen, unter denen die vorgängige Behandlung der Oberfläche eine Rolle zu spielen scheint. Man erhält im allgemeinen unter sonst gleichen Umständen mit Stücken derselben Probe des Metalls verschiedene Perioden, und es ist mir nicht gelungen, bestimmte Werthe willkürlich hervorzurufen.

Wenn man indessen ein Stück Metall mit frischer Säure angesetzt hat, und man überträgt es, nachdem die Reaction eine Stunde oder einige gedauert hat, in eine neue Menge frischer Säure, so stellen sich im wesentlichen dieselben Formen der Schwingung ein, doch mit Unterschieden, welche die vollständige Uebereinstimmung verhindern. Fig. 11, Taf. II. zeigt einen derartigen Versuch, der durch die auffälligen Gestalten der Curve besonders charakteristisch ist. In I ist der Verlauf der ersten Reaction dargestellt; man sieht nach der ersten scheinbaren[1]) Erhebung die guirlandenförmigen Gestalten der Reactionscurven auftreten, welche anders verlaufen, als die gewöhnlicheren Gestalten, wie sie z. B. Fig. 6, Taf. I. aufweist. An Stelle des plötzlichen Anstiegs am Beginn jeder neuen Periode erfolgt hier die Beschleunigung der Reaction langsam; dafür treten dann über der Hauptschwingung Nebenschwingungen von ganz kurzer Periode, von der Ordnung einer Minute, ein, welche das Minimum jeder Hauptschwingung überlagern. Ueberaus merkwürdig ist hierbei die Genauigkeit, mit der sich die Formen dieser Nebenschwingungen wiederholen, indem sie sich gleichzeitig langsam umbilden; beide Thatsachen schliessen

1) Am Anfange jedes Versuches ist der Apparat mit Luft gefüllt, welche allmählich durch den entwickelten Wasserstoff verdrängt wird. Da die innere Reibung der Luft viel grösser ist, als die des Wasserstoffs, so stellt sich während ihres Durchganges durch die Capillare ein entsprechend grösserer Druck ein, und die Curven zeigen sämmtlich am Anfange jeder neuen Reihe eine starke Erhebung, welche nicht ein Ausdruck einer besonders grossen Geschwindigkeit ist. Ich habe davon abgesehen, durch vorgängiges Füllen des Apparates mit Wasserstoff diese Erscheinung zu vermeiden, da die absoluten Grössenwerthe der Geschwindigkeiten nie zu Schlüssen benutzt worden sind, sondern nur die Periode ihrer Veränderlichkeit. Doch habe ich nicht unterlassen wollen, zum richtigen Verständniss der Linien auf diesen Punkt hinzuweisen.

die Möglichkeit eines Zufalles oder einer durch irgend einen Fehler des Apparates bewirkten Nebenerscheinung aus.[1])

Kehren wir zu der Betrachtung von Fig. 11, Taf. II., I, zurück, so finden wir, dass nach 6 „Guirlanden“ eine neue Form einsetzt, die etwa doppelt so lang ist, und eine viel zusammengesetztere Beschaffenheit hat. Auch diese Form wiederholt sich mit allen Einzelheiten (man beachte die kleine Spitze unmittelbar vor dem Abfall der Periode).

Wird nun das Stück in frische Säure übertragen, so wiederholt es zunächst die Anfangsform mit grosser Annäherung, schreibt dann Guirlanden, und ersetzt diese nach einiger Zeit durch die zusammengesetzte Form mit der Schlussspitze. Während soweit volle Uebereinstimmung herrscht, sogar in kleinen Besonderheiten, die sich leichter an der Figur verfolgen, als beschreiben lassen, so ist doch insofern eine Verschiedenheit vorhanden, als die Guirlanden hier viel zahlreicher sind; statt nach einer Stunde tritt die neue Form erst nach mehr als zwei Stunden ein.

Es folgt hieraus, dass auch die Beschaffenheit der Lösung einen mitbestimmenden Einfluss auf die Art hat, in welcher sich das Chrom auflöst. Ob in diesem Falle die im Laufe des Vorganges eintretenden Verschiedenheiten von der Anhäufung des Chromsalzes in der Säure, oder von dem Verschwinden des vorhandenen aufgelösten Sauerstoffs in der Flüssigkeit, oder irgend einem anderen Umstande herrühren, welcher sich gleichzeitig geändert hat, ist noch nicht festgestellt worden. An späterer Stelle wird dargelegt werden, dass die Periode in der mannigfaltigsten Weise durch verschiedene Stoffe beeinflusst wird.

7. Um die Frage zu beantworten, ob die Verschiedenheiten der Formen, welche die Schwingungen von Fall zu Fall zeigen, von der vorausgegangenen Behandlung der Oberfläche der Metallstückchen abhängen, habe ich eine Anzahl kleinerer Stückchen aus derselben Schmelze mit verschiedenen Oxydationsmitteln passiv gemacht und dann unter Salzsäure bei Zimmertemperatur freiwillig aktiv werden lassen. Es wurden in der That sehr ver-

1) An späterer Stelle wird ein weiterer Beweis für die objective Existenz dieser schnellen Geschwindigkeitsänderungen erbracht werden, indem gleiche Aenderungen in der elektromotorischen Kraft des Chroms auftreten. Auch gelingt es leicht, durch unmittelbare Beobachtung der Entwicklungsgeschwindigkeit des Wasserstoffs mittelst Blasenzählen sich von der Wirklichkeit dieser kleinen Perioden zu überzeugen.

schiedene Gestalten erhalten, welche in den Figuren 12 bis 16, Taf. II. u. III. wiedergegeben worden sind. Zu diesen ist ausserdem zu bemerken, dass sie der besseren Uebersicht wegen in halb so grossem Maassstabe wie die früheren dargestellt sind; jedes Millimeter der Abscissenaxe bedeutet eine Minute und jedes Stück ist somit zwei Stunden lang.

Von den Linien bezieht sich Fig. 12, Taf. II auf ein Stück, das mit Jodlösung vorbehandelt war; Fig. 13, Taf. II. ist mit Eisenchlorid, Fig. 14, Taf. II. mit Kaliumpermanganat[1]), Fig. 15, Taf. II. mit Ferridcyankalium, Fig. 16, Taf. III. mit Kaliumnitrit passiv gemacht worden. Wie man sieht, sind die erhaltenen Formen in der That sehr verschieden, und wenn diese Unterschiede constant mit der Vorbehandlung verknüpft wären, so würde auf ihre Ursache ein erhebliches Licht fallen. Um hierüber Gewissheit zu erlangen, habe ich drei Stücke desselben Metalls in möglichst gleicher Weise behandelt, indem ich sie eine Stunde neben einander in derselben Eisenchloridlösung liegen liess, und sie nach dem gemeinsamen Abwaschen ohne Aktiviren in Salzsäure übertrug.

Die erhaltenen Resultate zeigten, dass hierdurch die Stücke kein gleichartiges Verhalten erlangt hatten. Aus den entsprechenden Figuren 17, 18 und 19[2]), Taf. III. geht zunächst hervor, dass die Zeit des Angehens bei allen dreien wesentlich verschieden war. Fig. 17, Taf. III. brauchte dazu fast zwei Stunden, Fig. 18, Taf. III. eine halbe und Fig. 19, Taf. III. eine ganze Stunde.

Ferner sind auch die Gestalten der drei Linien so verschieden, wie die der mit verschiedenen Oxydationsmitteln erhaltenen. Die Vorbehandlung hat somit keinen constanten Einfluss auf die Gestalt der Linien, und diese rührt also von einem Umstande her, der im Metall und nicht auf seiner Oberfläche befindlich ist.

Der gleiche Schluss wird durch die auffällige Genauigkeit bestätigt, mit welcher sich bei der fortdauernden Lösung die Formen wiederholen. Ich habe oft den Versuch bis zum vollständigen Verbrauch des sich lösenden Metalls durchgeführt, und die Perioden haben sich bis zu Ende beobachten lassen.

Auch habe ich vergeblich versucht, die an den mit Kaliumpermanganat vorbehandelten Stücke, Fig. 14, Taf. II., aufgetretenen

1) In Fig. 14 hatte sich die Feder zeitweilig vom Papier entfernt und so die Curve lückenhaft gemacht.

2) Maassstab 1 Min. = 1 mm.

„Guirlanden“ auf gleiche Weise an anderen Stücken hervorzubringen. Sie traten oft genug auf, wenn kein Permanganat angewendet wurde, und blieben bei Stücken fort, die mit Permanganat passiv gemacht worden waren.

8. Als meine Versuche etwa bis zu diesem Punkte gediehen waren, hatte sich der kleine Vorrath an Chrom, den ich besass, soweit vermindert, dass ich mich an Herrn Dr. Goldschmidt mit der Bitte wandte, mir neues Material zu schicken. Mit der grössten Bereitwilligkeit stellte er mir beliebige Mengen zur Verfügung, und sandte mir zunächst eine Probe seines reinsten Metalls, wie er es jetzt ständig herstellt. Als ich dieses unter ganz denselben Verhältnissen untersuchte, unter denen mir die alte Probe die Schwingungen gegeben hatte, traten nur glatte Curven von der typischen Form auf, wie sie alle anderen Metalle zeigen. Ich hatte schon vorher, um mich zu überzeugen, ob es sich nicht etwa um eine allgemeine, nur bisher übersehene Erscheinung bei der Auflösung der Metalle in Säuren handele, eine Anzahl anderer Metalle, insbesondere Zink, Eisen und Mangan untersucht, aber niemals Schwingungen beobachten können. Vielmehr verlief die Gasentwicklung immer in derselben Weise: nach einer „Inductionszeit“, in welcher einerseits die Oberfläche des Metalls die rauhe Beschaffenheit annimmt, die sie während der Auflösung beibehält, andererseits die Sättigung und Uebersättigung der Lösung mit Wasserstoffgas erfolgt, wird bald ein Höchstwerth der Geschwindigkeit erreicht, der dann in Folge der Abstumpfung der Säure abnimmt, und zwar um so langsamer, je geringer die Auflösungsgeschwindigkeit und je grösser die benutzte Säuremenge ist. Ebenso verhielt sich das reine Chrom.

Es begann nun für mich eine sehr grosse Reihe von Versuchen, womöglich Umstände ausfindig zu machen, unter denen das neue Chrom gleichfalls Schwingungen zeigt, doch waren sie vergeblich. Es konnte kein Verfahren gefunden werden, durch welches Schwingungen an diesem Metall hervorgerufen wurden. Es wurde dadurch wahrscheinlich gemacht, dass die auffallende Eigenthümlichkeit meines Metalls von irgend einer Beimischung herrührte, welche sich in den älteren Proben befand, und in den neuen nicht mehr vorkam.

Die vergeblichen Versuche, das neue Chrom zum Schwingen zu bringen, sollen kurz angegeben werden, da in diesem unbe-

kannten Gebiete auch negative Ergebnisse einen gewissen Werth besitzen.

Wirkungslos war: Kupferchlorid, Natriumsulfit, dauernde Berührung mit metallischem Platin, Benutzung einer Lösung, in welcher ein schwingendes Stück sich theilweise gelöst hatte, Aenderung der Temperatur zwischen 0° und 50°, Vorbehandeln des Stückes mit Chromsäure, Kaliumpermanganat, Schmelzen mit Zinkchlorid, Glühen und Abschrecken in Wasser und in Säuren, Schmelzen mit Salpeter, Glühen mit Natriumphosphat auf Kohle (um das Metall phosphorhaltig zu machen), Umschmelzen im elektrischen Ofen unter Leuchtgas, um ein kohlehaltiges Metall zu erlangen[1]), Benutzung als Anode mit einer Spannung von 10 Volt, Zusatz von Alkohol, Eisenchlorür, Eisenchlorid, colloidalem Platin, Chromsäure, Kaliumnitrit.

Ferner hatte mir Hr. Dr. GOLDSCHMIDT, verschiedene Proben Metall mit Zusatz von Eisen schmelzen lassen; auch diese ergaben keine Schwingungen, so dass es aussah, als wenn meine weiteren Untersuchungen ein vorzeitiges Ende nehmen müssten, da nur wenige Gramme der ursprünglichen Probe übrig geblieben waren.

Zufällig besass Hr. Dr. GOLDSCHMIDT noch einige Stücke von dem Metall, das er in den ersten Zeiten seiner Versuche dargestellt hatte, und opferte auch diese historischen Seltenheiten meinen Untersuchungen. Sie erwiesen sich glücklicherweise als gleichfalls mit der Eigenschaft des Schwingens ausgestattet, so dass ich die Arbeit, wenn auch unter möglichster Schonung des Materials, fortsetzen konnte. Inzwischen sollen die Versuche synthetisch das schwingende Chrom zu gewinnen, weitergeführt werden, und ich habe Hrn. Dr. GOLDSCHMIDT auch hier für die unermüdliche Bereitwilligkeit zu danken, mit der er allen meinen Wünschen in Bezug auf anzustellende Versuche entgegenkam.

9. Die periodischen Erscheinungen treten nicht als Eigenschaft mit Salzsäure allein auf; sie lassen sich auch mit anderen Säuren erhalten. Die Auswahl geeigneter Säuren ist ziemlich beschränkt, da nur die stärksten schnell genug auf das Chrom wirken; dabei können noch spezifische Eigenthümlichkeiten, wie bei der Salpetersäure und Jodwasserstoffsäure (s. w. u.) das Entstehen der

1) Das Metall war nach dieser Behandlung mit grossen Schuppen von Graphit durchsetzt, und konnte unter Salzsäure überhaupt nicht mehr aktiv gemacht werden.

Schwingungen verhindern. Die meisten Versuche machte ich mit Schwefelsäure.

Diese Säure ist zwar bedeutend weniger dissociirt, als die Salzsäure, doch in molekular-normaler Lösung (also äquivalent der gewöhnlich benutzten Salzsäure) wirkt sie stark genug auf das Chrom ein, um die Beobachtung der Schwingungen bequem zu gestatten. Die Erscheinungen sind womöglich noch regelmässiger, als bei der Salzsäure; Fig. 20[1]), Taf. III. zeigt einen Versuch, der über 24 Stunden bis zur völligen Auflösung des Stückes fortgesetzt wurde. Die kleineren Ordinaten der Wellen entsprechen der geringeren Entwicklungsgeschwindigkeit des Wasserstoffes bei der Einwirkung der Schwefelsäure; dieser Umstand bewirkt andererseits die grosse Dauer der ganzen Erscheinung. Auch hier kann man die durch die allmähliche Sättigung der Säure bedingte Zunahme der Dauer einer Periode gut beobachten.

10. Die Concentration der Säure hat einen bedeutenden Einfluss in solchem Sinne, dass die Dauer der Perioden zunimmt, wenn die Concentration abnimmt. Fig. 21, Taf. III. zeigt diese Verhältnisse an Salzsäure. Ia ist eine Linie mit der gewöhnlichen, doppelt normalen Säure; unter Ib ist der Versuch an demselben Stücke mit frischer Säure wiederholt, zum Zeichen, dass es sich constant verhält.

Dasselbe Stück, in eine halb so starke Säure gebracht, gab die Linie II, an welcher sich die Verlängerung der Perioden gleichzeitig mit der Abnahme der Höhe, d. h. der Entwicklungsgeschwindigkeit, sehr deutlich erkennen lässt. Als dann die Säure nochmals um die Hälfte schwächer, also $\frac{1}{2}$-normal genommen wurde, erschien die Linie III, an der die gleichen Veränderungen in verstärktem Maasse auftreten.

Dass es sich hier um constante Erscheinungen handelt, geht aus Fig. 22 und 23, Taf. III. hervor, in denen entsprechende Beobachtungen an anderen Stücken wiedergegeben sind. Die Bezeichnung ist die gleiche, nur sind die Linien für die letzte Verdünnung fortgelassen worden, da in der halbnormalen Salzsäure diese Stücke überhaupt nicht schwangen, sondern sich sehr langsam stetig auflösten.

Das gleiche Ende war auch beim ersten Stück schliesslich eingetreten, nachdem es einige Schwingungen mit sehr langer Periode

1) Maassstab 1 Min. = 1 mm.

geschrieben hatte. Es handelt sich hier um eine allgemeine Erscheinung, die sehr häufig eintritt, wenn die Auflösungsgeschwindigkeit durch einen Umstand sehr gering geworden ist. In solchem Sinne wirkt ausser der Verdünnung insbesondere noch die Gegenwart negativer Katalysatoren, von denen später die Rede sein wird.

11. Dieses „Ausklingen" der Schwingungen tritt auch bei einzelnen Stücken des Metalls ohne fremde Zusätze ein. Fig. 24, Taf. III. zeigt einen solchen Fall. Es war Chrom, das mir Dr. Goldschmidt als aus seinen ersten Schmelzen herrührend geschickt hatte, und von dem die meisten Stücke in gewöhnlicher Weise zum Schwingen zu bringen waren. Dieses gab mit der doppelt normalen Salzsäure anfangs sehr schöne Wellen; bald aber trat die charakteristische Verlängerung der Perioden ein, die bis zum vollständigen Aufhören der Schwingungen führt. Der Versuch wurde noch mehrere Stunden über die aus der Fig. 24, Taf. III. ersichtliche Zeit fortgesetzt, ohne dass neue Schwingungen eintraten. Als das Stück durch längeres Berühren mit Cadmium wieder aktiv gemacht worden war, traten ganz dieselben Erscheinungen wieder ein: zunächst regelmässige Schwingungen, die langsamer wurden und dann ganz aufhörten. Dieses Verhalten zeigte das Stück, bis es aufgelöst war.

12. Der Einfluss der Temperatur liegt in solchem Sinne, dass die Dauer der Perioden mit steigender Temperatur, d. h. steigender Wirksamkeit der Säure abnimmt, während sinkende Temperatur die entgegengesetzte Wirkung hat. In Fig. 25, Taf. III. sind die typischen Erscheinungen mit der gewöhnlichen Salzsäure dargestellt. Die Vorgänge bei Zimmertemperatur (etwa 18°) sind unter I verzeichnet. Dann wurde das Entwicklungsgefäss in Eis gesetzt, worauf sehr schnell die mehr als fünfmal so langsamen Schwingungen von entsprechend geringer Amplitude einsetzten, die mit II bezeichnet sind. Bei III wurde das Gefäss in Wasser von Zimmertemperatur gestellt, worauf wieder die früheren Schwingungen einsetzten. Dann stellte ich das Entwicklungsgefäss in einen auf 30° erwärmten Thermostaten; die Folge ist eine erhebliche Beschleunigung der Schwingungen (IV). Die Wellen bei V sind bei 40° geschrieben worden. Nun wurde der Regulator ausgeschaltet und die Temperatur langsam bis auf 60° gesteigert (VI); schliesslich liess ich den Apparat erkalten (VII).

Wie man sieht, entspricht jeder Temperatur eine ganz be-

stimmte Periode in dem oben angegebenen Sinne. Das Verhältniss zwischen 0° und 60° ist 1:60 bis 1:80, entspricht also dem allgemeinen Geschwindigkeitsgesetz, nach welchem eine Steigerung von 10° die Geschwindigkeit annähernd verdoppelt.

So regelmässige Vorgänge finden sich nicht immer, da die Neigung zum „Ausklingen" starke Abweichungen hervorrufen kann.

In Fig. 26, Taf. IV. sind die Erscheinungen dargestellt, welche sich mit Schwefelsäure (ein Mol im Liter) ergeben hatten. Unter I steht die bei Zimmertemperatur erhaltene Curve; nach einigen Schwankungen stellen sich regelmässige Perioden von ziemlich kurzer Dauer ein.

Dann wurde das Entwicklungsgefäss in Eis gesetzt. Bei dieser Temperatur wurde zunächst nur die eben begonnene Periode beendet (II); dann schien das Schwingen ganz aufzuhören, doch nach zwei Stunden traten schwache Perioden von annähernd der Dauer der bei Zimmertemperatur vorhandenen ein. Dann wurde das Gefäss wieder aus dem Eise entfernt und der freiwilligen Erwärmung an der Luft überlassen (III). Man sieht, wie die Amplituden in Folge der steigenden Temperatur zunehmen, bis wieder die gewöhnliche Regelmässigkeit da ist. Dann wurde das Gefäss in einen auf 37.5° erwärmten Thermostaten gebracht (IV). Die Folge ist eine bedeutende Zunahme der Entwicklungsgeschwindigkeit, aber unter gleichzeitigem Aufhören der Periodicität. Anfangs sind noch Schwingungen vorhanden, und ganz geringe Spuren solcher lassen sich noch im weiteren Verlaufe der Auflösung verfolgen; sie sind aber so gering, dass man sie unter anderen Umständen nicht als sicher vorhanden bezeichnen dürfte.

Als nun das Gefäss wieder auf Zimmertemperatur erkaltete, nahm die Reactionsgeschwindigkeit bedeutend ab, und gleichzeitig verschwanden die letzten Spuren der Schwingungen (V).

Durch diese Behandlung war das Stück Chrom abgeneigt geworden, überhaupt wieder periodisch sich zu lösen. Als die Säure erneut wurde, blieb es inaktiv, und als es durch Berührung mit Cadmium in den aktiven Zustand versetzt worden war, vollführte es vier regelmässige Schwingungen und wurde dann wieder inaktiv. Dieser Zustand war dauernd; der Versuch wurde über 10 Stunden fortgesetzt, ohne dass Perioden eintraten.

Schliesslich wurde das wirksamste Mittel auf das Stück angewendet, welches ich zur Erzeugung von Schwingungen kenne:

es wurde in geschmolzenem Zinkchlorid erhitzt.[1]) Der Erfolg war, dass das in die Säure zurückgebrachte Metall sich wieder periodisch löste. Dies dient gleichzeitig als Beweis dafür, dass die Ursache der Abneigung gegen die periodische Lösung in der Oberfläche des Stückes liegen kann.

Auch der Salzsäure gegenüber verhielten sich manche Stücke bei 0° in solcher Weise, dass sie entweder keine, oder bald aufhörende Schwingungen gaben. Ein solches Stück, das bei 0° keine Schwingungen geben wollte, wurde wiederholt abwechselnd auf 0° und 18° gebracht: immer traten bei Zimmertemperatur die Schwingungen ein, um bei 0° zu verschwinden. Auch hier erwies sich das Schmelzen mit Zinkchlorid wirksam; nach dieser Behandlung vollführte es schliesslich in Salzsäure bei 0° nach einigen Präliminarien, die etwa 3 Stunden dauerten, sehr schöne Schwingungen (Fig. 27, Taf. IV., zweite und dritte Reihe). Auf Zimmertemperatur gebracht (II), verkürzte es wie gewöhnlich seine Periode. Als es dann wieder auf 0° abgekühlt wurde (III), ging es zu sehr langsamen Schwingungen von ungewöhnlich niedriger Amplitude über, die während langer Zeit andauerten und keine Neigung zum Verklingen zeigten.

Man sieht aus diesen Beobachtungen, auf welches verhältnissmässig enge Temperaturgebiet das Auftreten regelmässiger Schwingungserscheinungen beschränkt ist. Es ist daher als ein besonderer Zufall anzusehen, dass sie überhaupt zur Beobachtung gelangen konnten, und man kann es als nicht unwahrscheinlich ansehen, dass auch andere Metalle ein ähnliches Verhalten aufweisen würden, wenn man die geeigneten Bedingungen von Temperatur und Beschaffenheit der Säure einzuhalten wüsste.

13. Wir wenden uns nun zu dem weitschichtigen Gebiete der gemischten Lösungsmittel. Benutzt man an Stelle der reinen Säuren Gemische derselben, oder macht man Zusätze anderer Art zu den Säuren, so ergeben sich ausserordentlich mannigfaltige Verhältnisse, die in das Gebiet der katalytischen Erscheinungen gehören. Und zwar sind hier sowohl Beschleuniger wie Verzögerer vorhanden; es giebt Stoffe, welche die Perioden verkürzen, und solche, die sie verlängern. Namentlich die negativen Katalysatoren

---

1) Hittorf giebt (a. a. O.) dies Mittel zur Erzeugung der andauerndsten Aktivität an.

zeigen dabei eine ausserordentlich grosse Wirkung bei Verdünnungen, die an oder ausserhalb der Grenze der analytischen Nachweise liegen. Diese neuen Thatsachen erhöhen nicht unbedeutend das Interesse, das den hier beschriebenen Erscheinungen schon ohnedies anhaftet.

Bereits die einfache Vermischung der beiden benutzten Säuren, Salz- und Schwefelsäuren, bewirkt unerwartete Erscheinungen. Fig. 28, Taf. IV. zeigt unter I eine Linie, die in Schwefelsäure von gewöhnlicher Concentration (ein Mol im Liter) geschrieben wurde. Von den 50 cc der Säure wurde nun einer entfernt und durch Salzsäure ersetzt (II), die Folge ist eine Erhöhung der Amplitude, was sich wegen der grösseren Dissociation der Säure erwarten liess, und eine Verlängerung der Periode, was weniger leicht vorauszusehen war. Nun wurden 5 cc Salzsäure auf die gleiche Weise zugesetzt (III); die Perioden werden dadurch wieder länger und die Amplituden grösser. Gleichzeitig macht sich aber eine ausgeprägte Neigung geltend, verwickeltere Formen zu schreiben. Ein weiterer Zusatz von 20 cc Salzsäure an Stelle einer gleichen Menge des Gemisches, die entfernt wurde, steigert diese Eigenthümlichkeiten in noch höherem Grade (IV).

Der Versuch wurde nun sich selbst überlassen und zeigte die bekannte langsame Zunahme der Periodendauer. Gleichzeitig stellt sich ein ausgezeichneter Fall des „Ausklingens“ ein, indem isolirte ziemlich starke Wellen in grossen Zeiträumen aus der niedrig verlaufenden Linie auftauchen. Zwischen den letzten beiden Wellen, die beobachtet wurden, sind mehr als drei Stunden verlaufen.

In gewissem Sinne ähnlich verlief der umgekehrte Versuch, bei dem von reiner Salzsäure ausgegangen wurde, und zu dieser stufenweise mehr und mehr Schwefelsäure gefügt wurde. Fig. 29, Taf. IV. giebt unter I die von der reinen Säure geschriebene Linie; bei II wurde die Hälfte der Säure durch Schwefelsäure ersetzt, wodurch die Periode nicht etwa länger, sondern auffallender Weise kürzer wurde. Bei III wurde wieder die Hälfte der Flüssigkeit entfernt und durch reine Schwefelsäure ersetzt: nun tritt eine bedeutende Verlängerung der Periode ein. Eine weitere Wiederholung dieses Verfahrens, wodurch nur noch $^1/_8$ der Flüssigkeit aus Salzsäure bestand, ergab die langen Perioden bei IV, welche wie im vorigen Falle langsam ausklingen.

In anderen Fällen trat indessen durch den Zusatz einer kleinen Menge Schwefelsäure zur Salzsäure alsbald eine Verlängerung der

Perioden ein; gleichzeitig damit bildete sich eine Neigung zur Gestaltung sehr verwickelter Linienzüge aus. Immer aber wurde nach einer Reihe von Stunden das Entstehen sehr langsamer Schwingungen und die Erscheinung des Ausklingens beobachtet. Von der Mittheilung der entsprechenden Linien soll Abstand genommen werden, da sie noch keine eindeutigen Verhältnisse haben erkennen lassen.

14. Versuche, in denen der zur Lösung dienenden Salzsäure andere Stoffe zugesetzt wurden, ergaben zunächst nur wenige Abweichungen von den beschriebenen Erscheinungen. So hatte ein Zusatz von Kaliumchromat (1 cc normaler Lösung zu 50 cc Salzsäure) ganz die gewöhnliche Wellenlinie Fig. 30, Taf. IV. erscheinen lassen. Da ein grösserer Zusatz von Chromat, bez. Chromsäure die Aktivität ganz aufhebt, so hatte ich einen erheblicheren Einfluss erwartet.

Ferner hatte das von Bredig[1]) durch Zerstäuben von Platinmetall im elektrischen Lichtbogen gewonnene colloidale Platin, welches höchst bemerkenswerthe katalytische Wirkungen besitzt, gleichfalls keinen erheblichen Einfluss erkennen lassen. Fig. 31, Taf. IV. zeigt die Linie, welche unter den gewöhnlichen Verhältnissen (doppelt normale Salzsäure) erhalten wurde, als der Lösung einige cc colloidaler Platinlösung zugesetzt worden waren. Da eine saure Lösung von Chromchlorür durch colloidales Platin katalytisch zur Entwicklung von Wasserstoff unter Bildung von Chromichlorid veranlasst wird, so durfte ein gewisser Einfluss erwartet werden. Der Unterschied gegen die anderen Fälle beschränkt sich indessen darauf, dass die Schwingungen sehr bald einsetzen, und dass die Wellenthäler auffallend horizontal sind, während sie sonst ein merkliches Abfallen bis zum Minimalpunkt zeigen.

Als zu diesem Versuch eine Spur Kaliumbichromat gefügt wurde, nahm die Länge der inaktiven Perioden sehr zu und nach acht Schwingungen blieb das Stück dauernd inaktiv. Ich habe den Versuch noch nicht wiederholt, so dass ich nicht sagen kann, ob dies Verhalten constant ist.

Dieselbe Eigenthümlichkeit des ebenen Wellenthals zeigt Fig. 32, Taf. IV., welche mit der gewöhnlichen Salzsäure erhalten wurde, während sich das Chrom dauernd in metallischer Berührung mit

1) Ztschr. f. phys. Chemie, Bd. 31.

einem 1 cm langen Stückchen blanken Platindrahts befand; unter diesen Umständen entwickelt sich natürlich ein Theil des Wasserstoffs am Platin. Gleichzeitig ist die Periode viel kleiner geworden, eine Erscheinung, die sich bei späteren Versuchen mit Platin wiederholt hat, wenn auch nicht ohne Ausnahme.

Ferner konnte vermuthet werden, dass die Gegenwart von Salzen edlerer Metalle die Gasentwicklung beeinflussen würde, wie dies beim Zink wohlbekannt ist. Fig. 33, Taf. IV. zeigt einen in solcher Richtung mit Kupfer angestellten Versuch. Unter I ist die mit gewöhnlicher Salzsäure erhaltene Linie; sie zeichnet sich durch die sekundären Schwingungen oder Guirlanden aus, die wie in früheren Fällen regelmässig im Wellenthal erscheinen. Bei II wurde ein wenig Kupferchlorid zugesetzt. Wie man sieht, wiederholen sich die Erscheinungen sehr getreu; ein besonderer Einfluss des Zusatzes lässt sich nicht erkennen. Bei III wurde weiter etwa 0.5 g festes Kupferchlorid zugesetzt; es entstand alsbald durch die reducirende Wirkung des Chromosalzes ein Niederschlag von metallischem Kupfer, und die Wellenlinie nahm einen anderen Charakter an, behielt aber ihre Periode bei. Der Unterschied ist nicht sehr bedeutend, und von einem wesentlichen Einflusse eines solchen metallischen Zusatzes kann nicht die Rede sein.

Ganz ähnlich waren die Erscheinungen, als Silberlösung zum Versuch gefügt wurde.

15. Einen grossen Einfluss dagegen hat Jodkalium. Als zu 50 cc der Salzsäure 10 cc normaler Jodkaliumlösung gesetzt worden waren, wurde die Linie Fig. 34, Taf. V. erhalten. Wie man sieht, setzen einige geringe Schwingungen an, um alsbald zu verlöschen. Der Versuch wurde über drei Stunden fortgesetzt, ohne dass das Metall wieder aktiv wurde. Die Lösungsgeschwindigkeit war dabei sehr vermindert, aber doch nicht völlig Null, denn als bei * der Apparat geöffnet wurde, fiel die Linie noch um ein Geringes.

Dann wurde das Metall abgewaschen und in frische Salzsäure gebracht; es schrieb die schnellen Perioden bei II. Dann wurde zu der Säure 0.3 cc derselben Jodkaliumlösung gesetzt; das Ergebniss (Linie III) ist eine deutliche Zunahme der Periodendauer.

Um diesen auffälligen Einfluss des Jodkaliums genauer kennen zu lernen, wurde zunächst ein Stück Chrom, um möglichst kurze Perioden zu haben (S. 241) mit einem Stückchen Platindraht in metallischer Berührung zur Lösung gebracht, es schrieb die Linie

Fig. 35, Taf. V. Dann wurde zu den benutzten 50 cc Salzsäure 1 cc normaler Jodkaliumlösung gesetzt. Es wurde die Linie II geschrieben, deren Periode fast viermal länger ist. Ein weiterer cc der Jodlösung brachte die Linie III mit einer noch längeren Periode hervor, und ein dritter cc die unter IV dargestellte Erscheinung: die Perioden werden immer länger, und schliesslich hören die Schwingungen ganz auf.

Als schliesslich das inaktiv sich verhaltende Metall abgespült und in frische Salzsäure gebracht wurde, schrieb es die Linie V, welche der Welle I gegenüber zwar die gewöhnliche Verlangsamung zeigt, die an länger angegriffenen Metallstücken auftritt; doch ist die Periode immerhin kleiner, als die des nahezu frischen Metalls mit 1 cc Jodkalium in der Säure.

Entsprechende Versuche mit Bromkalium ergaben keine derartigen Erscheinungen. In Fig. 36, Taf. V. ist die Linie I wieder von einem mit Platin verbundenen Stück geschrieben; und die Linie II von demselben Stück nach Zusatz von 1 cc Norm. Bromkalium. Die Periode ist nicht länger, sondern etwas kürzer geworden.

16. Ausserordentlich viel kräftiger, als Jodionen wirken Rhodanionen. Fig. 37, Taf. V. stellt folgende Versuche dar.

Es wurde in der Hoffnung, dadurch einfache Schwingungsformen zu erhalten, der grösste Theil der Oberfläche eines Stückes Chrom mit Schellackfirniss zugedeckt; es schrieb dann in Salzsäure die kurzen Wellen Fig. 37, Taf. V. I. Dann wurde der Schellack durch Kochen mit Alkohol entfernt; das wieder in die Säure gebrachte Stück schrieb dieselben Perioden (II), nur viel grössere Amplituden. Daraus ist zu schliessen, dass im allgemeinen die Schwingungsdauer eines Stückes durch die des geschwindesten Theiles daran bestimmt wird (vgl. S. 230).

Nun wurde (III) 1 cc normaler Lösung von Rhodankalium in die Flüssigkeit gebracht; die Schwingungen hörten sofort auf. Abwaschen und Uebertragen in frische Säure (IV) bewies, dass das Stück an sich noch schwingungsfähig war.

Ein cc 0·01-normaler Lösung von Rhodankalium liess wieder die Schwingungen sofort aufhören (V). Als das Stück wieder abgewaschen und in frische Säure übertragen wurde, schwang es mit etwas verlängerter Periode (VI), hörte aber bald auf. Nach dem Aktivmachen durch Berührung mit Cadmium schwang es wieder, hörte aber gleichfalls nach einiger Zeit freiwillig auf.

Da angenommen werden musste, dass die Spuren von Rhodan, die in die Spalten des Metalls eingedrungen waren und mit Waschen nicht sich entfernen liessen, durch ihr allmähliches Zutagetreten dieses plötzliche Aufhören verursachten, wurde das Stück verworfen, und ein anderes auf den Einfluss noch verdünnterer Rhodanlösungen untersucht.

Ein mit reiner Salzsäure angesetztes Stück gab die im ganzen selten auftretende Erscheinung Fig. 38, Taf. V., dass während einer ziemlich starken Wasserstoffentwicklung unzählige kleine Schwankungen ohne grosse Regelmässigkeit sich geltend machen. Die Periode ist von der Ordnung einer halben bis Viertelminute; dass die Amplituden klein erscheinen, liegt an der Trägheit des Apparates, welcher so schnellen Aenderungen der Entwicklungsgeschwindigkeit nicht zu folgen vermag. Nachdem dieses Verhalten fast 5 Stunden gedauert hatte, wurde bei II 1 cc einer 0·001-normalen Rhodankaliumlösung zugefügt. Trotzdem die schliessliche Verdünnung wegen der 50 cc Säure 0·00002-normal war, liess sich doch alsbald eine merkliche Vergrösserung der Periode erkennen. Noch viel deutlicher wurde diese bei III, wo weitere 2 cc derselben Lösung zugefügt wurden, die Flüssigkeit also 0·00006-normal in Beziehung auf Rhodan wurde. Die Linie sieht aus, als betrachtete man die frühere unter einer Lupe, so gleichartig ist sowohl die Amplitude wie die Periode vergrössert.

Als schliesslich dasselbe Stück Metall abgewaschen und abgerieben in frische Säure übertragen wurde, waren die kleinen Perioden verschwunden, und es wurden die grossen Schwingungen IV geschrieben.

Aehnliche Verhältnisse wurden beobachtet, als andere Stücke mit gewöhnlichen Schwingungsformen unter dem Einflusse einer gleich verdünnten Lösung von Rhodankalium untersucht wurden (Fig. 39, I und II, Taf. V.). Es ergab sich daraus die wichtige Beziehung, dass die Vergrösserung der Periode durch den Verzögerer in erster Annäherung der vorhandenen Periode proportional ist, oder dass eine gegebene Concentration des Katalysators die Schwingungsdauer in einem bestimmten Verhältniss vergrössert, unabhängig vor deren absolutem Werthe.

Wegen der Möglichkeit, dass die nicht schwingenden Chromproben (S. 234) nur wegen zu schneller Perioden ihre Bewegungen nicht aufzeichnen, habe ich solches Metall unter dem Einflusse

von Rhodanlösungen untersucht. Doch ist auch hier nichts zu Tage gekommen, was auf das Vorhandensein von Schwingungen hingedeutet hätte.

17. Zwischen Jod und Rhodan in Bezug auf seine verzögernde Wirkung liegt Cyan, wenigstens, was die Gesammtconcentration des Stoffes anlangt. Ueberlegt man, dass die Cyanwasserstoffsäure einen ausserordentlich kleinen Dissociationscoefficienten hat und somit in der stark sauren Lösung die Concentration der Cyanionen unvergleichlich viel kleiner ist, als die der entsprechenden Lösungen mit Jod- und Rhodanionen, welche mit Wasserstoff starke Säuren bilden, so wird man allerdings auf eine andere Möglichkeit geführt. Macht man die (noch nicht bewiesene) Annahme, dass die katalytische Wirkung von den Ionen ausgeht, so dürfte für gleiche wirkliche Ionenconcentration das Cyan die beiden anderen Stoffe weit übertreffen.

Eine normale Lösung von Cyankalium, im Verhältniss 1:50 zu der Salzsäure gesetzt, hebt die Schwingungen vollständig auf. Eine zehntelnormale Lösung in demselben Verhältnisse verdoppelt ungefähr die Periode, wie aus Fig. 40, Taf. V. ersichtlich ist, wo bei II 1 cc der genannten Lösung der Salzsäure zugefügt wurde.

Ferrocyankalium zeigt anfänglich keine Wirkung, was wegen der Bildung des sehr schwerlöslichen Salzes ganz erklärlich ist. Nach einiger Zeit hören indessen die Schwingungen ganz auf. Man darf vermuthen, dass dies eine Folge der langsamen Abspaltung von Cyanwasserstoff aus der sauren Lösung ist.

Ebenso verhält sich Ferridcyankalium, nur bewirkt es das Aufhören schneller, bez. bei grösserer Verdünnung. Bei der grösseren Zersetzlichkeit dieses Salzes gegenüber der Ferroverbindung kann dies Verhalten als eine Bestätigung der eben ausgesprochenen Vermuthung angesehen werden.

Der stärkste Verzögerer von allen, die ich kennen gelernt habe, ist das Formaldehyd. Ein cc der käuflichen, 10- bis 20-prozentigen Lösung auf 50 cc Säure liess die Schwingungen alsbald aufhören; in gleicher Weise wirkten die weiteren Verdünnungen bis 0·0001 der urspründlichen Flüssigkeit. Es genügte mit anderen Worten etwa ein Milliontel des Stoffes, um die Periodendauer praktisch unendlich zu machen.

Dies wurde mit frisch hergestellten Lösungen beobachtet. Als nach einigen Stunden dieselben Lösungen wieder untersucht wurden, erwiesen sie sich als viel weniger wirksam. Erst die auf 1/100

verdünnte Lösung liess eine ziemlich starke Verzögerung erkennen. Man darf dies wohl der schnellen Oxydation des Aldehyds in der lufthaltigen verdünnten Lösung zuschreiben. Andere Aldehyde habe ich noch nicht untersucht.

Aethyl- und Methylalkohol liessen im Verhältniss 1:50 keinen erheblichen Einfluss erkennen.

Da die erstgenannten Verzögerer den Umstand gemein haben, dass sie mit Chrom complexe Verbindungen zu bilden vermögen, untersuchte ich einen Zusatz von Oxalsäure auf die gleiche Wirkung. Es erwiess sich indessen, dass die Oxalsäure keine Aenderung der Periode hervorruft, wenigstens bei den angewandten Verhältnissen von 1:50 und darunter.

18. Ausser den Stoffen, durch deren Gegenwart die Periode verlängert wird, giebt es auch positive Katalysatoren oder Beschleuniger, welche die Periode verkürzen. Unter den bisher untersuchten Stoffen sind mir allerdings noch keine entgegengetreten, welche ihre Wirkung bereits bei so geringer Concentration geltend machen, wie die Verzögerer Rhodan und Formaldehyd, doch lassen sich auch hier schon durch mässige Zusätze sehr deutliche Aenderungen hervorbringen.

Als Beschleuniger wirkt zunächst Salpetersäure oder ein niederes Oxyd des Stickstoffs. Setzt man Salpetersäure oder ein Nitrat zu der Chromchlorür enthaltenden Lösung, in welcher sich das Metall unter Schwingungen auflöst, so färbt sich die Flüssigkeit braungrün, ohne dass eine erhebliche Gasentwicklung eintritt. Die Erscheinung rührt von der Bildung eines stickoxydhaltigen complexen Kations, analog dem längstbekannten beim Eisen, her, über welche vor Kurzem eine Notiz von Chesneau[1]) erschien, der diese Verbindung untersucht und ihre Zusammensetzung auf $3\,CrCl_2 . NO_2$ festgestellt hat.

Gleichzeitig hiermit tritt eine merkliche Beschleunigung der Perioden ein. Diese ist gut sichtbar, wenn der Zusatz 1 Procent der Säure beträgt, und sehr auffallend bei 10 Procent. Fig. 41, Taf. VI. zeigt die Wirkung eines Zusatzes von 5 cc doppeltnormaler Salpetersäure auf die Periode des in gewöhnlicher Salzsäure sich lösenden Chroms. Nachdem bei II der Zusatz erfolgt war, zeigt sich die Periode anfangs weniger verkürzt; bald aber tritt die

1) Comptes rendus 129, 100. 1899.

sehr erhebliche Abnahme ein. Es ist dies wohl auf die langsame Reduction der Salpetersäure in der Lösung zurückzuführen. Ich habe wegen der in den Lehrbüchern sich findenden Angabe, dass Chrom in Salpetersäure unlöslich sei, ein baldiges Eintreten des inaktiven Zustandes erwartet und deshalb den Versuch längere Zeit fortgesetzt. Doch hat die Auflösung mit der kleinen Periode acht Stunden angehalten und bis zum vollständigen Verbrauch des Stückes gedauert.

Einen anderen Versuch mit Salpetersäure zeigt Fig. 42, Taf. VI. Ein schon zu anderen Zwecken benutztes Stück Chrom schrieb in Salzsäure nach dem Uebertragen in reine Säure die Schwingungen I. Auf Zusatz von 5 cc doppeltnormaler Salpetersäure wurde das Metall inaktiv (II), konnte aber durch Berühren mit Cadmium alsbald (III) wieder aktiv gemacht werden, und schrieb nun drei Stunden lang die kleinen Perioden. Als es dann wieder abgewaschen und in frische Salzsäure gebracht wurde, traten wieder längere Perioden auf, die indessen doch erheblich kürzer waren, als die früheren ohne Salpetersäure.

Eine Lösung von Kaliumnitrit gab ganz ähnliche Erscheinungen, was dafür spricht, dass das Wirksame bei diesen Versuchen die oben erwähnte Stickoxydverbindung ist. Ich habe noch nicht unternommen, diese Frage eindeutig zu entscheiden.

19. Ein guter Beschleuniger ist Chlorsäure. Fig. 43, Taf. VI. zeigt die Wirkung von 2 cc normaler Natriumchloratlösung auf 50 cc doppeltnormaler Salzsäure. Bei III ist das Stück wieder in reine Säure übertragen worden; auch in diesem Falle ist die Periode nach Einwirkung des Beschleunigers kleiner geworden.

Fig. 44, Taf. VI. zeigt einen ähnlichen Versuch, bei welchem die Zunahme der Wirkung des Beschleunigers mit zunehmender Concentration in die Erscheinung tritt. I ist die Linie mit reiner Salzsäure, bei II ist ein cc, bei III sind noch zwei cc normaler Natriumchloratlösung zugefügt worden. Bei IV wurde das Stück wieder in reine Säure übertragen.

Endlich hat sich auch Bromsäure als starker Beschleuniger erwiesen. In Fig. 45, Taf. VI. ist unter I die Linie mit reiner Säure angegeben; bei II ist 1 cc sechstelnormales Kaliumbromat zugegeben worden; bei III sind zwei, und bei IV noch fünf cc derselben Lösung zugefügt worden, so dass die schliessliche Flüssigkeit etwas weniger als ein Procent (in Aequivalenten) der Salz-

säure an Bromsäure enthielt. Wie man sieht, ist die Beschleunigung beträchtlich.

Bei V wurde das Stück in reine Säure übertragen und schrieb wie immer in ähnlichen Fällen kürzere Perioden als am Anfange des Versuches. Die Lösung, welcher das Bromat zugefügt worden war, roch stark nach Brom, so dass unentschieden bleibt, ob das Bromat oder das freie Brom als Beschleuniger gewirkt hat.

Beim Vergleich der Stoffe, die als Beschleuniger wirken, mit den Verzögerern fällt auf, dass die ersten Oxydationsmittel, die letzteren Reductionsmittel sind. Ob es sich hier um eine allgemeine Beziehung handelt, müssen spätere Versuche lehren. Beachtenswerth ist, dass nach vorläufigen Versuchen Wasserstoffhyperoxyd sich als Verzögerer verhält, also in solchem Zusammenhange als ein Reductionsmittel anzusprechen wäre.

20. Für die Beurtheilung des Charakters dieser katalytischen Wirkungen ist es wesentlich, zu wissen, ob sich dieselben superponiren. Es wurden deshalb die Versuche Fig. 46, Taf. VI. angestellt.

Nachdem das Chrom unter reiner Salzsäure regelmässige Wellen ausgebildet hatte, wurde bei I 1 cc 0.002-normales Rhodankalium zugefügt; die verzögernde Wirkung ist sehr deutlich. Dann wurden bei II 2 cc normales Natriumchlorat in die Lösung gebracht; es tritt alsbald eine Beschleunigung ein, welche die Verzögerung durch das Rhodan übertrifft. Dann wurde wieder 1 cc derselben Rhodanlösung zugefügt: die entsprechende Verzögerung tritt wieder ein (III), doch hörte das Chrom bald auf zu schwingen.

Nachdem das Metall wieder in reine Säure gebracht worden war (IV), wurde der Versuch in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt, indem zuerst der Beschleuniger in Gestalt von 2 cc Natriumchlorat beigegeben wurde (V). Die Beschleunigung wurde durch 1 cc der sehr verdünnten Rhodanlösung nicht erheblich (VI), sehr deutlich dagegen durch ein zweites cc davon (VII) aufgehoben und übertroffen.

Hieraus ergiebt sich also, dass sich in der That die Beschleunigungen und Verzögerungen im Wesentlichen superponiren. Ob dies rein additiv geschieht, geht aus diesen Versuchen noch nicht hervor, da sie noch nicht zu quantativen Messungen ausgebildet sind; doch scheinen erhebliche Abweichungen von dieser einfachsten Annahme nicht aufzutreten.

21. Schliesslich verdienen die elektrischen Erscheinungen, die diesen Verschiedenheiten der Reactionsgeschwindigkeit parallel gehen, einige Erwähnung, wenn auch ihre genauere Untersuchung auf eine spätere Zeit verschoben werden muss. Aus den oben angeführten Mittheilungen Hittorf's geht hervor, dass zwischen dem Metall, das Chromsalz und dem, das Chromsäure giebt, ein Spannungsunterschied von etwa 1 V besteht. Die schnelle und langsame Lösung des Metalls in Säuren ist gleichfalls von Spannungsunterschieden begleitet, doch sind diese viel geringer und betragen nach einigen Messungen, die ich angestellt habe, ziemlich genau 0.1 V. In ganz regelmässiger Weise ist das Metall bei der schnellen Lösung in Säuren um 0.1 V anodischer, als bei der langsamen; die Unterschiede gegen die Normalelektrode von Quecksilber unter Chlorkalium betragen 0.7 und 0.8 V.

Verbindet man mit dem sich lösenden Metall und einer in derselben Flüssigkeit befindlichen platinirten Platinplatte ein Elektrometer oder Galvanometer, so macht es ganz ähnliche Schwankungen, wie der Schreibhebel des Druckmessers. Mittelst eines Apparates, der später eingehender beschrieben werden soll, habe ich die Einstellungen eines Galvanometers mit 360 Ohm Widerstand und starker Dämpfung sich in derselben Weise aufschreiben lassen, wie dies mit den Druckmessungen geschah, und die Fig. 47, Taf. VI. zeigt das Ergebniss.[1]) Ich habe noch nicht unternommen, beide Apparate auf demselben Papierstreifen ihre Wellen schreiben zu lassen. Da aber die Unterschiede in der Entwicklungsgeschwindigkeit des Wasserstoffs in beiden Zuständen des Chroms ohne jede Unsicherheit sich unmittelbar erkennen lassen, so besteht bei mir schon jetzt kein Zweifel an der Uebereinstimmung beider Perioden.

Von der Aeusserung meiner Ansichten über die Ursache dieser merkwürdigen Erscheinungen möchte ich so lange Abstand nehmen, bis es gelungen ist, durch die willkürliche Herstellung von „schwingendem“ Chrom ihnen eine experimentelle Unterlage zu geben.[2])

7. August 1899.

---

1) Bei der Ausführung dieser Versuche hat Hr. E. Brauer den grössten Theil der Arbeit geleistet, wofür ich ihm auch hier meinen Dank ausspreche.

2) Soeben (7. December) habe ich die Vermuthung von Hrn. Dr. Goldschmidt bestätigen können, dass ein geringer Schwefelgehalt ($^1/_2$ Procent) die Schwingungen hervorruft.

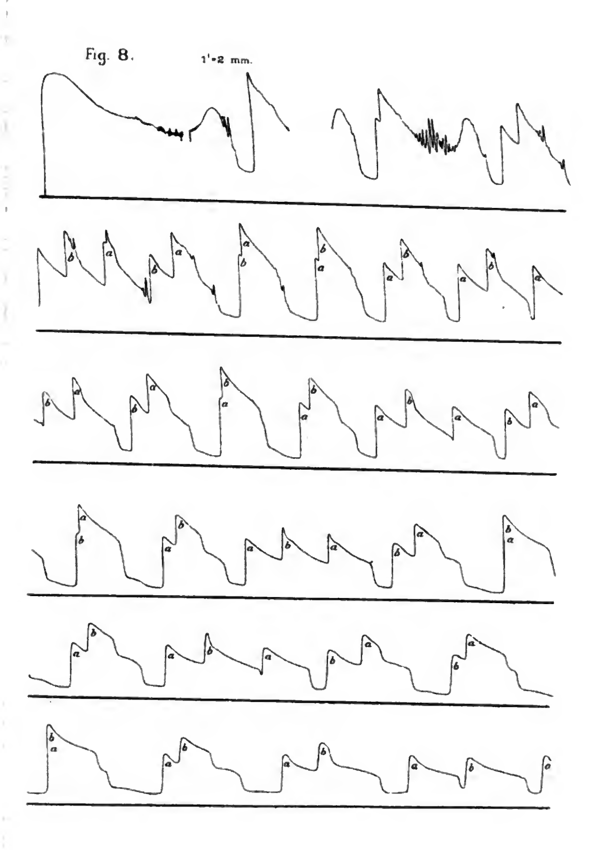

Fig. 8.
1'=2 mm.



Fig. 11.

1'- 2 mm.

I

II

Fig. 14. 1'-1mm.

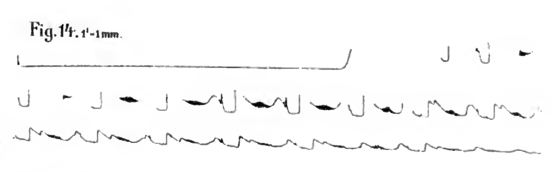


Fig. 15. 1'-1mm.

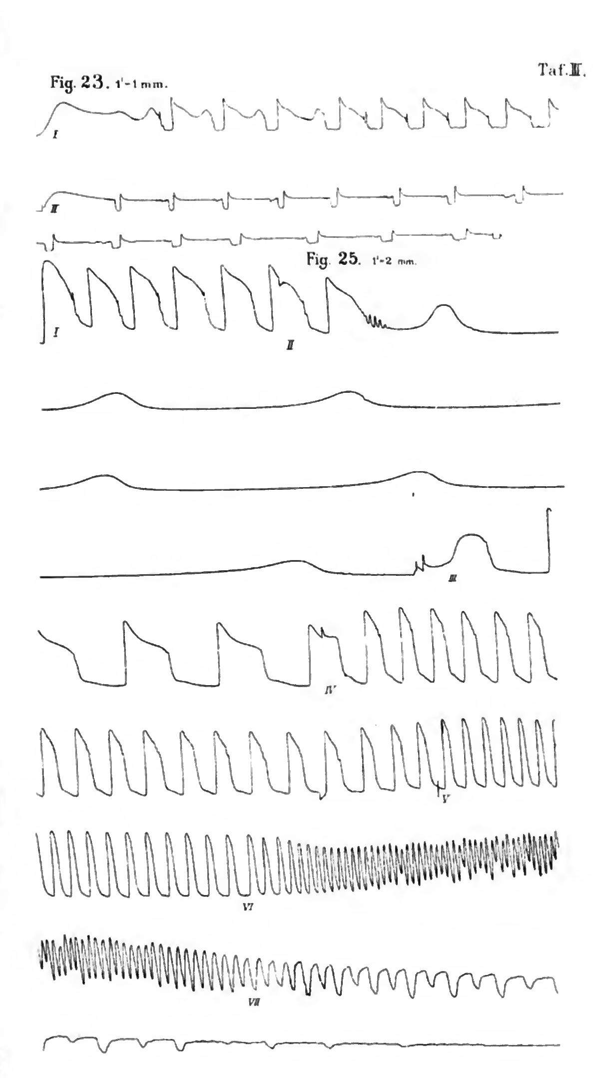
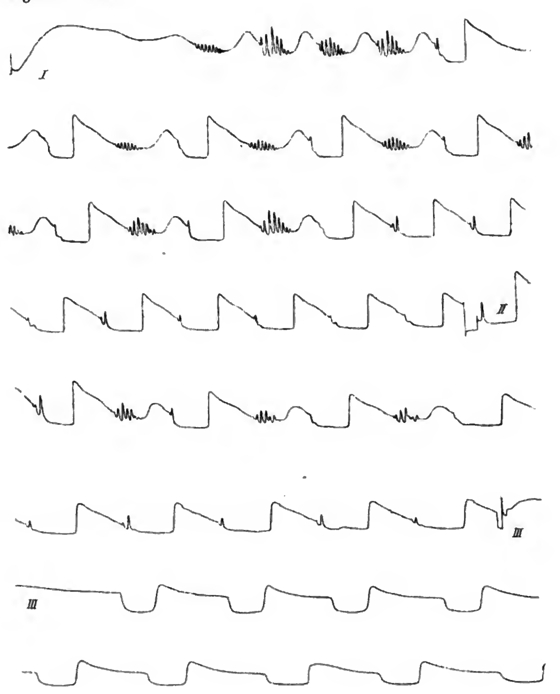

Fig. 23. 1'-1 mm.
I
II
Fig. 25. 1'-2 mm.
I
II
III
IV
V
VI
VII

Fig. 31. 1'-2 mm.

Fig. 33. 1'-2 mm.



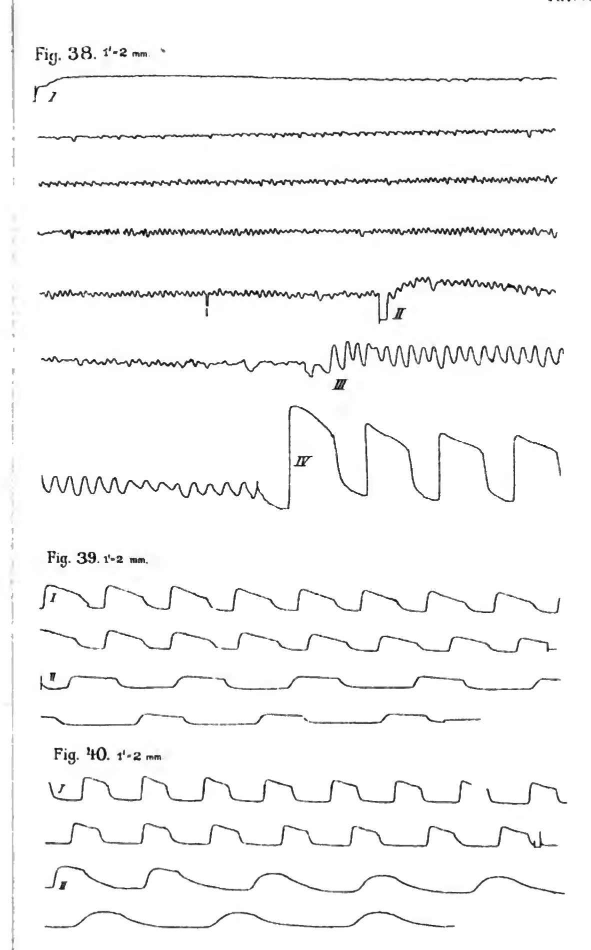
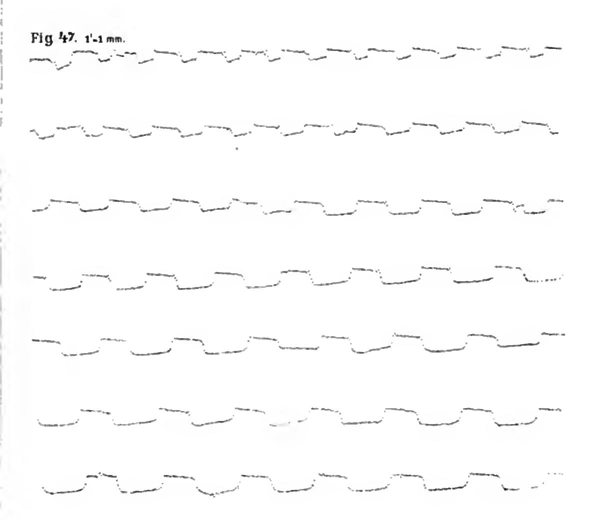

Fig. 38. 1'=2 mm.
I
II
III
IV
Fig. 39. 1'=2 mm.
I
II
Fig. 40. 1'=2 mm.
I
II

Fig. 46. 1'-2 mm.

I II III IV V V VI VII

Fig. 47. 1'-1 mm.



BEITRÄGE ZUR PHYSIOLOGIE

DES ELEKTRISCHEN ORGANES DER ZITTERROCHEN

VON

Dr. med. SIEGFRIED GARTEN,
ASSISTENT AM PHYSIOLOGISCHEN INSTITUT ZU LEIPZIG.

Des XXV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° V.

MIT 1 LICHTDRUCK- u. 3 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1899.

Vorgelegt in der Sitzung vom 31. Juli 1899 durch Herrn E. Hering, o. M.
Das Manuscript eingereicht am 5. August 1899.
Der Abdruck vollendet am 4. December 1899.

BEITRÄGE ZUR PHYSIOLOGIE
DES ELEKTRISCHEN ORGANES DER ZITTERROCHEN

VON

Dr. med. **SIEGFRIED GARTEN,**
ASSISTENT AM PHYSIOLOGISCHEN INSTITUT ZU LEIPZIG.

Einleitung.

Das Interesse der Physiologen an dem Schlage der elektrischen Fische, in älterer Zeit erweckt durch die erstaunliche, in der belebten Natur einzig dastehende Entwickelung so ausserordentlicher elektrischer Spannkräfte, erhielt in der letzten Hälfte dieses Jahrhunderts neue Nahrung: Einmal durch die Untersuchungen Du Bois-Reymonds und seiner Nachfolger über elektromotorische Wirkungen, jenen in mancher Beziehung ähnlich, aber im Vergleich zu ihnen von mikroskopischer Kleinheit, an den Muskeln, Nerven und vielleicht allen lebenden Bestandtheilen eines jeden Thierkörpers; zweitens durch die an den elektrischen Fischen selbst ausgeführten Untersuchungen Babuchins [2–9])*), Engelmanns [47] u. A. Es gelang diesen Forschern, den strengen Nachweis zu erbringen, dass das elektrische Organ der meisten elektrischen Fische nichts anderes darstellt, als einen, bei den verschiedenen Gattungen in verschiedener Weise umgewandelten Muskel. Bei gewissen Arten jener Fische, und gerade den elektrisch am wenigsten wirksamen, wie bei dem gemeinen Rochen, zeigte sich, dass selbst Reste der den quergestreiften Muskel charakterisirenden doppelt brechenden Substanz erhalten bleiben. Hierzu kam noch, dass (seit den 50er Jahren) die mikroskopische Struktur der ausgebildeten Organe aufgedeckt wurde, die in Folge der äussersten Feinheit ihrer Gebilde, insbesondere der Nervenendausbreitung, alle Untersucher fesselte. Gerade die Unsicherheit in der Deutung der letztgenannten mikroskopischen Gebilde, bei deren Vergänglichkeit in den meisten chemischen Agentien, brachte es mit sich, dass es zu lebhaften anatomischen, zum Theil noch jetzt schwebenden Controversen kam, über die, abgesehen von den Untersuchungen Du Bois-Reymonds und seiner Schüler die physiologischen Fragen vielfach vernachlässigt wurden. Namentlich wurde die Frage: „endigen

*) Die Zahlen hinter den Namen beziehen sich auf die im Litteraturverzeichniss angeführten Arbeiten.

die Nerven frei, oder bilden sie ein echtes Netz?" vielfach diskutirt. Ein weiterer Ausgangspunkt für anatomische Untersuchungen des elektrischen Organes entstand durch die Entdeckung der wahrscheinlich bereits von REMAK [94]) gesehenen, nach ihrem Entdecker benannten BOLL'schen Punktirung. Das Verhältniss dieser Punkte, oder besser feinen Stäbchen, zu der Terminalverzweigung der Nerven führte zu der noch nicht sicher beantworteten Frage nach der nervösen Natur dieser Gebilde.

Erst in dem letzten Jahrzehnt tritt, abgesehen von vereinzelten früheren Arbeiten die physiologische Untersuchung des Organschlages in den Vordergrund. Insbesondere sind es die Arbeiten von BURDON-SANDERSON [10]), BURCH [15–17]), GOTCH [53–55]) und SCHOENLEIN [96–97]), welche mit zum Theil neuen Untersuchungsmethoden zunächst den normalen Schlagverlauf und viele andere elektrische Erscheinungen am Organ verfolgten. Bei diesen letzteren Untersuchern tritt bereits mehr oder weniger ausgeprägt die Frage in den Vordergrund des Interesses: Ist die elektromotorische Wirkung in letzter Linie auf die Nervenendigungen oder auf die im Organ enthaltenen vom Muskel abstammenden Theile zu beziehen?

Die Antwort auf diese Frage ist von allen Forschern mit grosser Vorsicht gegeben oder ganz zurückgehalten worden.

Der von mir vorgenommenen Untersuchung lag die gleiche Fragestellung zu Grunde. Es sollte versucht werden, aus dem elektrischen Verhalten des Organs zu einer gewissen Klarheit darüber zu gelangen, welcher Theil des Organs als der elektromotorisch Wirksame anzusehen sei.

Bei der muskulären Abstammung der elektrischen Organe glaubte ich insbesondere folgenden Grundfragen näher treten zu müssen, von welchen die erste bis jetzt so gut wie garnicht, die zweite in einer etwas anderen Weise in den Bereich der Untersuchung gezogen worden ist.

I. Bleibt das elektrische Organ nach Nervendurchschneidung, wenn es vom Nerven aus unerregbar geworden ist, wie ein Muskel nach der gleichen Operation „direkt" noch längere Zeit erregbar und, wenn dieses der Fall ist, wie reagirt es jetzt bei der „direkten" Reizung?

II. Kann ein namentlich auf das Zwischenglied zwischen Nerv und Muskel wirkendes Gift, wie Curare, auch beim elektrischen

Organ Unerregbarkeit bei indirekter Reizung herbeiführen, mit Erhaltung der „direkten" Erregbarkeit, und zwar bei den für das Organ günstigsten Versuchsbedingungen? (Diese bestehen darin, dass die Ermüdung des Organes, wie sie durch centrale Erregungen während der Vergiftung auftreten könnte, durch vorherige Durchschneidung der elektrischen Nerven mit Sicherheit ausgeschaltet wird. Gerade diese letztere Maassnahme war bei den Versuchen anderer Autoren nicht ausgeführt worden (wenn auch beabsichtigt — Schoenlein), und bot, wie weiter unten zu zeigen ist, eine nicht unwesentliche Fehlerquelle für die bis jetzt gewonnenen Ergebnisse.)

III. Wie wirkt ein exquisites Muskelgift, wie Veratrin, das im quergestreiften Muskel namentlich den zeitlichen Ablauf aller Vorgänge so auffallend verändert, auf den Verlauf der elektromotorischen Thätigkeit des Organes ein?

Die Untersuchung wurde am Zitterrochen (Torpedo marmorata und ocellata) in der Physiologischen Abtheilung der Zoologischen Station zu Neapel in den Monaten September bis December 1898 ausgeführt, wo Herr Professor Schoenlein mich durch die bereitwilligste Ueberlassung aller, vielfach selbst construirter Apparate in reichem Maasse unterstützte.

Ehe ich auf meine Untersuchung selbst eingehe, will ich versuchen, die wichtigsten anatomischen und physiologischen Thatsachen über den elektrischen Apparat der Torpedo in Kürze anzuführen.

Die zu den elektrischen Organen des Zitterrochens führenden Nerven nehmen ihren Ursprung aus dem paarig angelegten elektrischen Lappen. Derselbe bildet an der Rückenfläche der medulla oblongata rechts und links von der Mittellinie zwei etwa Kaffeebohnen grosse Vorwölbungen, die vorn vom Kleinhirn, caudalwärts nur von den Hirnhäuten bedeckt werden. Nach Fritsch[50]) sind sie „durch Wucherung bestimmter Abschnitte der grauen Kerne entstanden, welche im Uebrigen Vagus- und Trigeminuswurzeln aussenden." Muskens[83]) dagegen sieht in den vier elektrischen Nerven mächtig entwickelte Facialis-Glossopharyngeus- und Vagusäste.

Die vier Nerven treten, nachdem sie den Schädel verlassen haben, unter der kräftig entwickelten Rückenmuskulatur hindurch, um sich mit Ausnahme des ersten Nerven (vom Kopf des Thieres

gerechnet) in die Zwischenräume zwischen die Kiemen einzusenken. Der erste Nerv ist sehr oberflächlich gelegen, er verläuft mit einer S-förmigen Krümmung über dem Kiefergelenk direkt zu dem vordersten Theil des elektrischen Organes. Die anderen drei Nervenstämme haben bis zum elektrischen Organ einen weit längeren Weg zurückzulegen. Sie gelangen erst nach Durchtritt durch die 1 bis 2 cm langen Zwischenkiemenräume, wo sie ganz von Blutgefässen umgeben sind, zu dem elektrischen Organ. Auch auf der Strecke vom Schädel bis zu den Kiemen befindet sich namentlich zwischen II. und III. Nervenstamm ein grösseres leicht zerreissliches Blutgefäss. Im elektrischen Organ zertheilt sich jeder Nerv sehr regelmässig und versorgt das ihm zunächst liegende Gebiet des Organes bis zum äusseren Rande. Man kann daher vom elektrischen Lappen aus durch radiär gerichtete, zwischen den Nerveneintrittsstellen durch das Organ hindurchgehende Schnitte das Organ so zerlegen, dass jeder Nerv mit seinem Innervationsgebiet von dem der anderen abgetrennt wird. (Vergl. SCHOENLEIN [96–97])).

Jedes der beiden Organe stellt bei Zitterrochen von der Grösse, wie sie in Neapel am häufigsten gefangen werden, ein 15 bis 20 cm langes und 10 cm breites, ungefähr bohnenförmiges Gebilde dar, das oben von der Rückenhaut, unten von der Bauchhaut begrenzt wird. Bei grossen Thieren beträgt die Höhe der grössten medial gelegenen Theile, von der Haut der Bauchfläche bis zur Rückenhaut gemessen, etwa 3 cm. Nach Ablösen der Haut tritt das regelmässige Mosaik der das Organ zusammensetzenden Säulen hervor, die sich in ihrer Längsrichtung von der Bauch- bis zur Rückenhaut erstrecken. Der Anblick des elektrischen Organes von der Rücken- oder Bauchfläche, also der Blick auf die Querschnitte, gleicht am ehesten dem einer Bienenwabe, bei der jeder Wabenraum durch je eine elektrische Säule dargestellt wäre. Die Zahl der Säulen schwankt je nach der Gattung der untersuchten Zitterrochen. Bei Torpedo marmorata beträgt nach FRITSCH [50]) (l. c.) ihre Zahl in einem Organ 610—507, bei Torpedo ocellata nur 433. Durch die sorgfältigen Säulenzählungen namentlich BABUCHIN's [6–9]) und FRITSCH's wurde erwiesen, dass die Zahl der Säulen in der postembryonalen Zeit nicht mehr wächst (DELLE CHIAJE-BABUCHIN'scher Satz von der Präformation der elektrischen Elemente). Das Gleiche gilt nach FRITSCH [50]) auch für

die jede Säule wieder zusammensetzenden elektrischen Platten. Die Zahl der in einer Säule auf einander geschichteten elektrischen Platten ist für Torpedo marmorata und ocellata nahezu gleich und beträgt ca. 380. Abgesehen von der centralen Vorwölbung einer jeden Platte, würde die durch dieselbe gelegte Ebene senkrecht auf der Längsachse der Säule stehen, also läuft jede Plattenoberfläche der Rücken- oder Bauchhaut ungefähr parallel.

Die Nerven lösen sich im Organ beim Herantreten an die Säulen in einzelne Fasern auf und jede derselben zerfällt kurz vor ihrem Eintritt in die Säulen in ca. 18 Theiläste (Schwankungen von 12 bis zu einigen zwanzig (Fritsch). Die Theiläste treten nach Ewald [45]) und Fritsch in ebensoviel übereinander geschichtete Platten ein, und zwar nahezu an einer und derselben Kante der als sechsseitig angenommenen Platte. Ewald [45]) hatte gefunden, dass die beschriebenen Theiläste von verschiedener, in bestimmter Weise zunehmender Länge waren und hatte geglaubt, durch die Längsdifferenzen von je zwei Theilästen, die von Kühne aufgestellte Entladungshypothese auf das elektrische Organ übertragen zu können. Nach den neueren Untersuchungen von Fritsch wird jenes von Ewald beschriebene Verhalten der Theiläste bestritten.

Die zwischen die Platten tretenden Nerven verzweigen sich nun, anfangs noch markhaltig auf der Bauchseite einer jeden Platte. Von dem Reichthum der Nervenverzweigung und der Art ihrer Endausbreitung geben die Abbildungen 1 und 2 Taf. I einen ungefähren Begriff. Nach mehrfachen Theilungen verlieren die Nerven ihr Mark (besonders deutlich am degenerirenden Nerven siehe Abbildung 1) und gehen nach wiederholter Abgabe von Theilästen in die Endausbreitung der Platte über. (Vergl. Abbildung 3 und 4 Taf. I). Von der Fläche gesehen erscheint die Endausbreitung mit zahllosen feinsten Pünktchen (Boll'sche Punktirung) besetzt, die, wie die Querschnitte der Platte zeigen, das optische Bild feinster auf der Plattenebene senkrecht stehender Stäbchen (Pallisaden) darstellt. Bei der äussersten Feinheit und Zartheit der Endausbreitungen ist es erklärlich, dass bis zum heutigen Tage die Meinungen über ihre Beschaffenheit getheilt sind. Entweder nimmt man ein geschlossenes Netzwerk, oder theils freie Endigungen, theils Anastomosen oder nur freie Endigungen an. Endlich wurde in Folge der Anwendung sehr

wenig geeigneter Reagentien (FRITSCH und WOLFF) die Existenz der feineren Endausbreitung ganz bestritten.

Einer der letzten Untersucher IWANZOFF [65]) giebt an, dass an frischen Platten die Nervenendausbreitung ganz deutlich zu sehen ist, und dass man nebst freien Endigungen auch Anastomosen erblickt. Da IWANZOFF annimmt, dass die Nervenfasern bis zu ihren letzten Enden mit einem feinen Ueberzug der SCHWANN'schen Scheide bekleidet sind, so hält er die gesehenen Anastomosen nicht für wirkliche Verschmelzungen, sondern nur für eine innige Aneinanderlagerung benachbarter Fasern. Die Pallisaden sind nach IWANZOFF wegen ihrer Farbreaction im Gegensatz zu den meisten Autoren als Fortsätze der die Nerventerminalverästelungen bekleidenden Scheiden anzusehen.

In seiner letzten Mittheilung äussert sich KRAUSE [69]) in dem Sinne, dass er freie Endigungen annimmt aber die Möglichkeit von Anastomosen offen lässt.

BALLOWITZ [30]) endlich kommt bei Benutzung der GOLGI'schen Methode zu einem ganz abweichenden Resultat. Er findet ein intensiv imprägnirtes dunkel gefärbtes Netz und bei Ansicht einer Platte von der Bauchseite unter diesem ein zweites weniger stark imprägnirtes, welches mit den sich ebenfalls färbenden Stäbchen eng zusammenhängt und deshalb von ihm als Stäbchennetz bezeichnet wird. Die Stäbchen selbst zeigen bei der GOLGI'schen Methode endständig kuglige Anschwellungen. Das Nervennetz (nur selten freie Enden) ist also nach ihm die eigentliche nervöse Endigung. Mit ihr aber in engem Zusammenhang steht das Stäbchennetz.

CREVATIN [43]) welcher mit der GOLGI'schen Methode dieselben Bilder wie BALLOWITZ erhält, nimmt beide Netze für identisch an; das Stäbchennetz ist eine unvollkommene Imprägnation des Nervennetzes.

Was den metasarkoplastischen (BABUCHIN) dorsalen Theil der Platte anlangt, so konnte BALLOWITZ mit der GOLGI'schen Methode ein sich imprägnirendes Netzgerüst mit eingelagerten Fädchen und feinsten Körnchen nachweisen. KRAUSE [69]) findet in der gleichen Substanz die von der Dorsalmembran centralwärts im Bogen gegen die Pallisaden zu verlaufenden Bogenfasern, an denen er im Gegensatz zu allen anderen Autoren eine Andeutung von Doppelbrechung sieht. Das Vorhandensein von Fasern und körnigen Gebilden neben

den Kernen habe ich nach der Fixirung der Platte in Osmiumsäure und Färbung mit S-Fuchsin nach Krause stets beobachtet, konnte aber nie Andeutungen von Querstreifung wahrnehmen. Dorsalwärts wird die Platte durch die strukturlose Dorsalmembran abgeschlossen. Die Blutcapillaren verlaufen in dem Zwischenraume zwischen den Platten. Sie sind, wie ich mich an Injectionspräparaten überzeugte, im Vergleich zur Blutversorgung des Muskels ausserordentlich spärlich und sehr lang gestreckt. (Abbildungen derselben bei Ciaccio [40]).

Trotz aller Verschiedenheit des soeben beschriebenen ausgebildeten elektrischen Organes von einem Muskel geht aus den Untersuchungen Babuchins und aller späteren Forscher mit Sicherheit hervor, dass abgesehen vom Organ des Malapterurus die elektrischen Organe sämmtlicher elektrischer Fische und unter ihnen auch die der Zitterrochen von der quergestreiften Stammesmuskulatur abstammen.

Bei den Rochenarten ist dieser Beweis am klarsten zu erbringen. Hier sind es die bereits fertig ausgebildeten Muskelfasern, welche jene Umwandlung erfahren. Die wichtigsten Momente bei der Umwandlung sind: Schwächung der Doppelbrechung als erstes Kennzeichen der beginnenden Metamorphose (Engelmann).

Es erfolgt nun eine starke Kernvermehrung und eine mächtige, bauchige oder keulenförmige Verdickung an dem einen Ende der Muskelfaser, an welche der Nerv unter reicher Verästelung herangetreten war. Durch weitere Zunahme der Breite des keulenförmigen Endes und immer weitergehende Verkürzung desselben entsteht ein plattes kuchenartiges Gebilde, dessen flächenhafte Ausbreitung in einer Ebene liegen würde, welche senkrecht auf der Längsachse der ursprünglichen Muskelfaser stände.

Dieser ausserordentlich in die Breite gewachsene Theil der ursprünglichen Muskelfaser wird von den Autoren als Plattenbildner bezeichnet. Der bei der Verkürzung und Verdickung der Muskelfaser unverändert gebliebene quastenförmige Rest bleibt als Stiel der Platte noch längere Zeit bestehen. Der ganze Plattenbildner ist in seinen mittleren Lagen von der sogenannten Maeanderschicht durchzogen, welche also senkrecht zur Längsachse der ursprünglichen Muskelfaser ausgebreitet ist. In dieser Schicht konnte Engelmann [47]) auf Grund des Vergleiches der bei ein und

demselben Embryo gleichzeitig in den verschiedensten Phasen der Veränderung begriffenen Muskelfasern nachweisen, dass die dünnen stark lichtbrechenden Lamellen der Maeanderschicht den isotropen, die dicken schwach lichtbrechenden Lamellen derselben Schicht den anisotropen Theilen der quergestreiften Muskelfasern entsprachen.

Bei der Torpedo beginnt der Umwandlungsprocess weit früher als bei dem gemeinen Rochen. Zwar sind es auch hier, wie BABUCHIN und LEONE DE SANTIS[75]) zeigten, embryonale Muskelfasern, aus denen sich das elektrische Organ entwickelt, doch stehen dieselben zu der Zeit, zu der jener Umwandlungsprocess beginnt, auf einer noch tieferen Entwickelungsstufe. Die embryonalen Muskeln bei der Torpedo stellen, ehe die Umwandlung beginnt, langgestreckte mehrkernige Zellen dar, an denen aber bereits eine zarte Querstreifung sichtbar ist. Die Umwandlung derselben zu den elektrischen Platten vollzieht sich der äusseren Form nach in ganz ähnlicher Weise wie bei den Schwanzorganen des gemeinen Rochens. Auch bei der embryonalen Muskelzelle der Torpedo tritt unter lebhafter Kernvermehrung an dem einen Ende der spindelförmigen Zelle eine rasch zunehmende keulenförmige Verdickung auf. Dieselbe wird immer mächtiger und geht in eine flache kuchenartige Scheibe über. Einige Zeit bleibt, ähnlich wie beim Schwanzorgan der Rochen, der von der Umwandlung nicht ergriffene Zelltheil als Plattenstiel vorhanden, und zeigt anfangs noch eine deutlich erkennbare Querstreifung. An der ausgebildeten Platte ist jener Stiel nicht mehr nachweisbar. Auch kann man an der ausgebildeten Platte keine Spur von Querstreifung mehr entdecken und ohne die gründlichen Untersuchungen BABUCHIN's, FRITSCH's und in neuester Zeit OGNEFF's über die embryologische Entwickelung des elektrischen Organes der Zitterrochen aus den embryonalen Muskelzellen würden wir bei alleiniger Betrachtung des ausgebildeten Organes wie einst DARWIN dasselbe als eine Bildung ansehen müssen, die in der ganzen Thierreihe keine ihresgleichen besässe. (Vergl. BABUCHIN[2]).

Die wichtigsten Ergebnisse aus der Physiologie des Schlages der Zitterrochen will ich hier kurz in Anlehnung an die beiden Arbeiten SCHOENLEIN's wiedergeben und am Schlusse auf die, theils jene Ergebnisse ergänzenden, theils in Widerspruch mit ihnen stehenden Befunde DU BOIS-REYMOND's, GOTCH's, BURCH's, MAREY's u. A. hinweisen.

Für die Organe der meisten elektrischen Fische gilt der Satz, dass bei der Thätigkeit derselben der in ihnen erzeugte Strom in jeder Platte von der Nervenseite zu der nicht nervösen geht. Ausgenommen von dieser Regel ist bisher noch Malapterurus.

Bei dem Schlage von Torpedo geht also der Strom im Organ des Fisches von der Bauchseite zur Rückenseite. Nach aussen abgeleitet würde sich die Rückenseite demnach positiv gegen die Bauchseite verhalten. Trotz der voraussichtlich nicht unbedeutenden Nebenschliessung durch das isolirte Organ selbst, beträgt nach SCHOENLEIN die elektromotorische Kraft, wie sie bei Ableitung der Rücken- und Bauchseite eines Organes gewonnen wird, in maximo bis zu 31 Daniell. Interessant ist, dass DU BOIS-REYMOND auf ganz anderem, weiter unten zu schilderndem Wege zu einer ganz ähnlichen Auswerthung der elektromotorischen Kraft des Torpedoorganes gelangte.

Der Schlagverlauf nach der Reizung des zu einem Organtheile führenden Nerven ist namentlich durch die zahlreichen Rheotomversuche SCHOENLEIN's festgestellt worden. Da die Reizung mit Inductionsströmen den Schlagverlauf complicirt, verwendete SCHOENLEIN zur Reizung des Nerven meist sehr kurz dauernde und dementsprechend kräftige constante Ströme. Je nach der Lage der Elektroden beginnt der Schlag bei absteigender Stromrichtung des Reizstromes im Nerven etwa 3—4 Tausendstel Sekunden nach der Reizung. Sehr rasch, oft bereits in 2—3 Tausendstel Sekunden, erreicht er sein Maximum, um dann viel allmähliger wieder abzunehmen. Vom Beginn des Schlages gerechnet, ist er im Mittel nach 6—8 Tausendstel Sekunden nahezu verschwunden, würde aber bei Steigerung der Bussolempfindlichkeit noch viel länger zu verfolgen sein. Bei aufsteigender Richtung des Reizstromes im Nerven beginnt der Schlag meist mehrere Tausendstel ($^{3}/_{1000}$) Sekunden später, was zum Theil auf der Längenzunahme der zu durchlaufenden Nervenstrecke, wie auch auf anelektrotonischer Hemmung beruht, da sich diese letztere in sehr ausgeprägter Weise an den zum elektrischen Organ führenden Nerven geltend macht. Diese bedingt es wahrscheinlich auch, dass bei kurzen interpolaren Strecken die Entladungen unregelmässig werden (mehrere Maxima) und ihr Umfang abnimmt. Auch Inductionsströme geben längere Entladungen mit mehrfachem Wechsel der Stromstärke (mehrgipfelige Curven).

Wird an Stelle der Nervenreizung ein Organstreifen (Bündel mehrerer Säulen) vom Strom direkt durchströmt, so giebt dieser, wie auch der Reizstrom gerichtet war, einen etwa $^{3}/_{1000}$ Sekunde nach der Reizung beginnenden Strom, der im Organ stets der Schlagrichtung gleichgerichtet ist. Der Ablauf dieses Stromes ist abgesehen von dem häufigeren Auftreten mehrerer Maxima sehr ähnlich dem Verlauf des Organschlages bei der Reizung des Nervenstammes.

In engem Zusammenhang mit der Schlagfähigkeit eines Organstreifens steht das wechselnde Verhalten des Widerstandes in diesem Streifen bezw. die als Widerstand gedeutete Erscheinung. (DU BOIS-REYMOND s. u.) Es sei hier zunächst nur erwähnt, dass, wie SCHOENLEIN fand, der Widerstand (in dem obigen Sinne) bei Durchströmung eines Organstreifens in der Richtung des Schlages meistens (nicht immer! — SCHOENLEIN) niedriger war als bei der entgegengesetzten Durchströmung, dass ferner bei längerer Organdurchströmung mit der Abnahme der Schlagfähigkeit des Organes der Widerstand desselben rasch sank, und damit sich auch der Unterschied zwischen den Stromrichtungen verwischte.

Die Aufzeichnung willkürlicher (bezw. reflectorisch herbeigeführter) Schläge mit dem Schreibtelephon führte SCHOENLEIN zu dem Ergebnisse, dass sowohl Einzelschläge wie auch Gruppen von Schlägen auftreten. In diesen letzteren können die Einzelschläge, theils in regelmässigen, theils in unregelmässigen Abständen von einander stehen. Die Intervalle zwischen zwei Schlägen gehen unter Umständen bis auf $^{1}/_{187}$ ″ herab. MAREY[77–80]), welcher ebenfalls die willkürlichen Schläge bereits in den 70er Jahren mit einem empfindlichen DEPREZ'schen Signal untersuchte, fand für die kürzesten Intervalle ganz ähnliche Werthe (bis $^{1}/_{140}$ Sekunde).

Ob die Organe der Zitterfische auch im unversehrten Zustande der Ruhe dauernd einen Organstrom besassen, wurde namentlich von DU BOIS-REYMOND vielfach erörtert. Er nahm an, dass ihnen ein solcher Strom dauernd innewohnen müsse. Diese Vermuthung erklärt sich aus seinen Anschauungen über die vermeintlich dauernd vorhandenen Ströme im Muskel, im Nerv und in der Drüse, die er in elektromotorischer Beziehung den elektrischen Organen zur Seite stellt. Am Zitteraal wies SACHS[23]) (allerdings an herausgeschnittenen Stücken) dauernde, in der Schlagrichtung verlaufende Ströme nach, deren Stärke mit der Länge der abgeleiteten Strecke

wuchs. Du Bois-Reymond selbst beobachtete den in der Richtung des Schlages verlaufenden Organstrom an der unversehrten Torpedo, namentlich aber auch an dem mit einem „Locheisen" ausgeschlagenen Säulenbündel. Einmal fand er im Widerspruch mit obigen an einem Organstreifen einen Strom, der in einem Theil der Säule positiv, in einem anderen negativ zur Schlagrichtung verlief. (Complication mit den Hautströmen.) Nach Du Bois-Reymond geht der Organstrom von derselben nur viel schwächeren Anordnung elektromotorischer Kräfte aus, die unter Einfluss des Nerven oder bei unmittelbarer Reizung den Schlag erzeugen. Das Fehlen des Organstromes nach Gotch und Burdon-Sanderson[53]) beim unverletzten Thier (bezw. das Auftreten schwacher Ströme mit wechselnder Richtung) während aus dem Organ zurecht geschnittene Prismen einen positiven Organstrom lieferten (Demarkationsstrom nach Gotch), führt Du Bois-Reymond darauf zurück, dass diejenigen Zitterrochen, welche nach Gotch's Beobachtungen keinen Organstrom lieferten, offenbar seit längerer Zeit nicht geschlagen hätten. Die Nachwirkung der letzten Schläge wäre unmerklich geworden und deshalb lieferten die Organe keinen Strom. Auch Schoenlein giebt im Gegensatz zu Du Bois-Reymond an, dass das unverletzte Organ bald schwach positive, bald negative Ströme ergebe. Etwas anderes ist es mit dem elektromotorischen Verhalten des Organes kurz nach einem Schlag. In diesem Zustand liefert nach Angabe aller Autoren das Organ einen positiven, d. h. in der Schlagrichtung verlaufenden Strom.

Wenig Uebereinstimmung besteht über den Schlagverlauf selbst. Die Differenzen stammen zum Theil aus der Verschiedenheit der Bestimmungsverfahren, theils aus den sehr verschiedenen äusseren Bedingungen, namentlich denen der Temperatur. Andererseits zeigt der Schlagverlauf bei verschiedenen Fischarten manches Verwandte, so dass es angezeigt erscheint, neben den Bestimmungen an Torpedo die von anderen Fischarten gewonnenen Resultate kurz mit anzuführen.

An der Torpedo bestimmte bereits 1871 Marey[80]) die Schlagdauer bei Nervenreizung auf folgende Weise. Mittelst einer Art von Pendelrheotom wurde nach bestimmten variirbaren Zeiträumen nach der Reizung des Nerven mit einem Induktionsschlag der Organstrom einem Nervmuskelpräparat des Frosches zugeleitet. Marey kam durch diese Bestimmung zu der sehr langen Dauer

des Schlages von $^{1}/_{14}$ ″, die er theoretisch, wegen ihrer gleichen Dauer mit einer Muskelcontraction, für die muskuläre Eigenschaft des elektrischen Organes verwerthete. Die lange Dauer des Schlages nach MAREY erklärt sich daraus, dass der Froschnerv auf verhältnissmässig kleine Potentialdifferenzen noch reagirt, solche sich aber beim elektrischen Organ, wie erwähnt, unter Umständen noch viele Sekunden lang nach dem Schlage beobachten lassen. (s. u. GOTCH.) Wird man theoretisch für diese Nachwirkung (after effect) und den Schlag selbst in den beiden zu Grunde liegenden Vorgängen keinen Unterschied annehmen, so wird man, um sich ein Bild des Schlages zu verschaffen, praktisch diejenige Periode des Schlages, in der die elektromotorische Kraft viele Daniells beträgt, von derjenigen trennen, in der das Organ elektromotorische Kräfte entwickelt, die nur wenig die des Demarkationsstromes am Muskel übertreffen.

Am Zitteraal kommt SACHS[23]) schon zu bereits niedrigeren Werthen für die Schlagdauer (ca. $^{1}/_{50}$ ″), und zwar bei direkter Reizung eines Organstreifens mit einem Oeffnungsinduktionsschlag. Aehnliche Werthe ergeben sich bei BURDON-SANDERSON und GOTCH[10]) bei Nervenreizung (Ende des Rückenmarkes) beim Glattrochen. Der Schlag beginnt 0,1 ″ nach der Reizung, erreicht vor 0,02 ″ sein Maximum und dauert im Ganzen kaum länger als $^{1}/_{100}$ ″. In neuester Zeit (1896) haben GOTCH[15]) und BURCH am Zitterwels ganz ähnliche zeitliche Verhältnisse des Schlages erhalten, wie sie oben auf Grund der SCHOENLEIN'schen Untersuchungen an der Torpedo geschildert wurden. Der Schlag beginnt beim Zitterwels 0,003 — 0,004 ″ nach Reizung des Nerven oder Organes und ist bereits nach 0,01 ″ zu Ende. Oft schliesst sich an den Hauptschlag noch ein kleiner an, wie ihn SCHOENLEIN am Organ von Torpedo mehrfach beschrieb. Neu, beim Torpedoorgan nicht beobachtet, ist die Erscheinung, dass das Zitterwelsorgan nach einer einzigen Reizung eine ganze Reihe von Entladungen in Zwischenräumen von $^{1}/_{100}$ bis $^{1}/_{250}$ ″ je nach der Temperatur zu erzeugen vermag. Der genaue Nachweis dieser auffälligen Erscheinung war den Untersuchern möglich durch Benutzung des Capillarelektrometers zur photographischen Aufzeichnung des Schlages. Bezüglich des Schlages der Torpedo stimmen die Beobachtungen der englischen Autoren nicht vollständig mit dem oben dargestellten Schlagverlauf überein. Der Hauptgrund dürfte in den verschiedenen Temperaturen

zu suchen sein, bei denen die Versuche in England und andererseits in Neapel ausgeführt wurde. Wie Gotch und Burdon-Sanderson [55 u. 53]) angeben, schwankt beispielsweise die Latenzzeit bei Abrechnung der Nervenleitungszeit zwischen 0,004 und 0,014" bei 20° bezw. 5° Celsius Aussentemperatur. Das Maximum der elektromotorischen Kraft wird nach den genannten Autoren spätestens 0,01" nach dem Schlagbeginn erreicht (in der Wärme eher) und nach 0,03" ist der Hauptschlag zu Ende. Ein zweiter niedrigerer Gipfel, welcher, wie bereits oben erwähnt, ziemlich häufig am Torpedoschlag sich zeigt, wird von Gotch (further observations etc.) auf eine Erregung der intraorganalen Nerven durch den Schlag selbst geschoben. Schoenlein dagegen glaubt, dass ein Hauptgrund in den am elektrischen Nerven so stark ausgeprägten elektrotonischen Erscheinungen zu suchen sei. Wie er beispielsweise zeigen konnte, wurden bei 3—4 cm Elektrodendistanz am Nerven und Reizung desselben mit einem constanten Strom, die Schlagcurven für beide Richtungen des Reizstromes eingipfelig und zeigten erst mit Annäherung der Elektroden aneinander jenes oben beschriebene complicirte Verhalten.

In enger Verbindung mit dem Schlag des Organs steht die sogenannte Polarisation desselben. Die von Du Bois-Reymond als Polarisation so vielfach beschriebenen Erscheinungen hatten durch die Annahme des Autors, dass die am elektrischen Organ ablaufenden Erscheinungen in ihrer Erklärung direkt auf die Muskeln und Nerven zu übertragen wären, mehrfach reges Interesse erweckt. Seitdem aber durch Hering [62—64]), Hermann [60] und Biedermann [36—38]) gezeigt worden ist, dass bei Benutzung eines möglichst parallelfaserigen Muskels die Annahme Du Bois-Reymond's einer inneren Polarisation am Muskel und Nerven hinfällig werde und statt der Polarisationsströme elektrische Ungleichartigkeiten zwischen der ruhenden und erregten Substanz auftreten, war das elektrische Organ für jene Theorie der Polarisationserscheinungen nicht mehr zu verwenden. Handelte es sich beim Muskel und Nerven um parallelfaserige Gebilde, die nur an der Eintritts- und Austrittsstelle des Stromes andauernde Zustandsänderungen erfuhren, welche zu elektrischen Differenzen gegenüber irgend einem Punkte der interpolaren Strecke führten, so haben wir im elektrischen Organ ein Gebilde, das sich in einem seinen Säulen parallelen Streifen aus zahlreichen, ungleichartigen Gebilden zusammensetzt, von

denen für jedes Einzelne sehr gut Zustandsänderungen an der Ein- und Austrittsstelle des dasselbe durchsetzenden Stromes anzunehmen wären. Wir können also für das elektrische Organ von vornherein eine innere Polarisation der ganzen interpolaren Strecke in dem zuletzt besprochenen Sinne annehmen. Wollte man aber andererseits die Erscheinungen auf den Muskel und Nerven übertragen, so müsste man statt mit einer Säule mit nur einer Platte experimentiren, was natürlich praktisch nicht ausführbar ist.

Die von Du Bois-Reymond und seinen Schülern an den Organen der Zitterfische gefundenen Polarisationserscheinungen sind folgende. Einmal geben schwache Ströme homodrom (in der Schlagrichtung) wie heterodrom (gegen die Schlagrichtung) stets relativ negative Polarisation (d. h. der Polarisationsstrom ist dem polarisirenden Strom entgegengerichtet). Andererseits geben starke homodrome wie heterodrome Ströme nicht zu langer Schliessungszeit nur eine starke im ersteren Fall relativ positive, im letzteren Fall relativ negative Polarisation, d. h. stets einen Strom, der im Sinne des Schlages verläuft. Der antidrome Strom konnte (abgesehen von einem einzigen Versuche) nie eine relativ positive Polarisation, d. h. einen dem Schlag gegensinnig gerichteten Polarisationsstrom erzeugen. Bei der Durchströmung mit einem starken Strom bot sich nun die auffallende Erscheinung dar, dass trotz der konstanten elektromotorischen Kraft der Stromquelle die Stromstärke des polarisirenden Stromes je nach der Stromrichtung eine ganz verschiedene und zwar bei heterodromer Stromrichtung stets niedrigere war. Dieses Phänomen wurde nun von Du Bois-Reymond[19–25]) in Anknüpfung an die von ihm angenommene theoretische Structur der erregbaren Organe als irreciproker Widerstand gedeutet. Die andere Möglichkeit, dass es sich hierbei um eine Entwicklung elektromotorischer Kräfte in der ganzen Länge des Streifens während der Durchströmung handele (innere Polarisation im Sinne Du Bois-Reymond's) wurde von ihm als ausgeschlossen betrachtet, da diese sonst bis zu 40 Daniell (oder nach einer anderen Abhandlung 20 Grove) betragen müsste. Interessant ist, dass, wie oben erwähnt, Schoenlein für den Schlag eine nach aussen ableitbare, nahezu so hohe elektromotorische Kraft beobachten konnte.

Burdon-Sanderson und Gotch[10]) zeigten nun am Rochen, dass bei kurzem Galvanometerschluss 0,000—0,002″ nach Aus-

lösung des den Organstreifen durchsetzenden Induktionsschlages diese Irreciprocität des Widerstandes vollständig fehlt. Der gleiche Nachweis gelang ihnen am Torpedoorgan. An dem auf 20° erwärmten Organ erfolgte der Schlag viel eher als an dem Organtheil, der nur eine Temperatur von 5° besass. Im ersteren Fall begann der Schlag bereits zwischen 0,0025 und 0,005″. Es zeigte sich nun, dass bei einer Schlusszeit des Inductionsschlages 0,0 bis 0,005″ wohl beim warmen aber noch nicht beim kalten Organ die Irreciprocität hervortrat. Es besteht also zwischen Irreciprocität der Leitung und dem Organschlag der innigste Zusammenhang.

Ueber die Beschaffenheit der im elektrischen Organ der Zitterfische elektromotorisch wirksamen Theile finden sich folgende Anschauungen. Babuchin, der in zahlreichen sorgfältigen Arbeiten als erster den Nachweis erbrachte, dass bei Torpedo, bei allen Arten von Rochen, bei Mormyrus und bei Gymnotus das elektrische Organ einen metamorphosirten Muskel darstellt, äussert sich folgendermassen: „Die Degeneration (im Sinne von Metamorphose) trifft mehr die Muskelfaser als den Nervenendapparat.“ Und in einer anderen Arbeit: „Die nervöse Abtheilung bei den verschiedenen Fischarten ist geringen Veränderungen unterworfen, vom allgemeinen Standpunkte kann man sogar sagen, keinen wesentlichen. Die nicht nervöse zeigt die grösste Mannigfaltigkeit. Diese Mannigfaltigkeit zeigt schon, dass die Form nicht etwas wesentliches ist.“ Und weiter unten: „Aber weshalb existiren so beständige Bestandtheile bei allen elektrischen und pseudoelektrischen Organen? Wenn sie ganz indifferent sind und nur als Unterlage der nervösen Abtheilung der Elemente dienen, so müssen wir die nervöse Abtheilung nothwendig als Elektricitätsquelle ansehen u. s. w.“ An einer anderen Stelle lässt allerdings Babuchin die Möglichkeit offen, dass der nervöse Apparat nur als Auslöser auf die mit ihm verbundene Maschine wirksam wäre.

Dass auf Grund der von Babuchin gefundenen Thatsachen der muskulären Abstammung des elektrischen Organs Du Bois-Reymond in dem muskulären Theil der Platte das elektromotorisch Wirksame sieht und gerade das elektrische Organ in diesem Sinne zum Ausbau seiner Molekulartheorie benutzt, bedarf hier nicht besonderer Erwähnung. Eine wesentliche Begründung seiner Anschauung sieht er darin, dass die Schlagstärke der Plattendicke proportional wachsen soll, grössere Thiere mit einer beispielsweise

doppelt so hohen Säule, also einen doppelt so starken Schlag liefern würden.*) Letztere Annahme wird in jüngster Zeit von SCHOENLEIN bezweifelt auf Grund des Vergleiches der elektromotorischen Kräfte jüngerer und älterer Torpedos.

Für die Erzeugung der elektromotorischen Kraft im muskulären Antheil der Platte tritt ferner noch MAREY ein auf Grund der von ihm gefundenen Gleichheit des zeitlichen Verlaufes einer Muskelzuckung und eines elektrischen Organschlages.

Im Gegensatz hierzu spricht sich W. KRAUSE, wenigstens in seinen älteren Arbeiten, ausgehend von seiner Entladungstheorie dahin aus, dass der Schlag des elektrischen Organes als eine Summation der Entladungen der vergrösserten motorischen Endplatten zu betrachten sei. Auch BURDON-SANDERSON und GOTCH sehen in ihrer Arbeit über das elektrische Organ des Rochens im nervösen Antheil der Platte das elektromotorisch Wirksame. Die gleiche Ansicht stützen GOTCH und BURCH durch die Thatsache, dass bei den verschiedenen Fischarten bei direkter Reizung des Organs immer nur die Nerven bezw. Nervenenden gereizt werden (Latenzzeit auch bei direkter Reizung stets vorhanden!), das Organprotoplasma selbst aber wegen der Uncomplicirtheit der Antwort unfähig erscheint auf direkte Reizung des Induktionsstromes zu reagiren. Die Stelle hat den Wortlaut: „If the stimulating current excites the organ, which it traverses, it is hypothetically possible, that it may stimulate either the nerves, or the protoplasmatic structure of the plate, in which the nerves end, or both the nerves and this structure. The uncomplicated charakter of such a record . . . and the close similarity in time relations between te period of delay and that of muscle nerveendings appears to us indicate, that in reality the first of this suppositions is the only tenable on.“ Aus obigem Satze ist es zunächst wahrscheinlich gemacht, dass bei der „direkten“ Reizung des Organes nur die Nerventheile der Platte gereizt werden. Der Schluss, dass deswegen dieser Theil der Platte das elektromotorisch Wirksame ist, erscheint nicht zwingend, da immer noch der Fall offen bleibt, dass der elektromotorisch wirksame Theil durch die gebräuchlichen Mittel unreizbar ist und nur auf den Erregungs-

*) Nach Verlauf der Embryonalzeit tritt ebensowenig wie eine Zunahme der Säulenzahl eine Zunahme der Plattenzahl in einer Säule ein. (DELLE CHIAJE, BABUCHIN, DU BOIS-REYMOND, FRITSCH u. a.)

vorgang in den Nervenenden anspricht. Der einfache Verlauf des Schlages würde auch hiergegen nichts beweisen können.

Schoenlein, welcher sich in seiner ersten Arbeit über Torpedo ebenfalls mit jener Frage befasst, kommt auf Grund der hohen elektromotorischen Wirksamkeit einer Platte zu der Annahme, dass es sich nur um den muskulären Theil handeln kann. Auf Grund weiterer Versuche, insbesondere der allerdings nicht mit den später zu besprechenden Cautelen ausgeführten Curarevergiftung, bei welcher die Erregbarkeit bei der indirekten und direkten Organreizung nahezu gleichzeitig erlosch, kam Schoenlein zu der Vermuthung, dass möglicherweise der Sitz der elektromotorischen Thätigkeit in den Nervenenden zu suchen sei.

Zum Schlusse sei noch die auf histologischen Untersuchungen begründete Anschauung Engelmann's angeführt. Dieser Forscher kommt bei Verfolgung der Umwandlung der einfach und doppelt brechenden Substanz im Organ des Rochens im Verlauf ihrer embryologischen Entwickelung zu folgendem Schlusse: „Der Rückgang der Doppelbrechung im elektrischen Organ weist darauf hin, dass nur die metabolen, doppelt brechenden Glieder der Muskelfibrillen, Sitz und Quelle der verkürzenden Kräfte des Muskels sind. Die elektromotorisch wirksamen Theile im Muskel wie im elektrischen Organ sind vermuthlich einfach brechende."

I.

Wie verhält sich das elektrische Organ nach Durchschneidung seiner Nerven?

Zur Klärung histologischer Fragen wurde die Durchschneidung der zu dem elektrischen Organ führenden Nerven beim Zitterrochen bereits 1886 von W. Krause[68]) ausgeführt und die Thiere dann längere Zeit am Leben erhalten. Hauptzweck Krause's war, Aufschluss zu erhalten, inwieweit die Bestandtheile der Platte nervösen, inwieweit sie muskulären Ursprungs waren. Wegen der Schwierigkeit der Operation durchschnitt er nur den vordersten oberflächlich gelegenen Nerven und untersuchte nach 16, 30 und 35 Tagen das elektrische Organ. Je nach der Zeitdauer, die nach der Resection verstrich, sind nach Krause die Terminalfasern des Endnetzes unzweifelhaft atrophisch, die Maschen des Endnetzes daher weiter

und unregelmässiger. Dagegen liess die elektrische Punktirung nicht die geringste Veränderung erkennen. Diese Befunde ergaben sich sowohl aus der Betrachtung der frischen Platte wie der in 2 % Osmiumsäure fixirten und in Säurefuchsin gefärbten. Ebensowenig wie an den Stäbchen, waren in der Gallertsubstanz der Platte Veränderungen wahrnehmbar. Aus dem Bestehenbleiben der elektrischen Punktirung schliesst KRAUSE, dass dieselbe nicht zu den Nervenenden zu rechnen sei, da andere Nervenendigungen allgemein nach Durchschneidung des Nervens entarten. CIACCIO hatte gegen diesen Schluss KRAUSE's mit Recht einzuwenden, dass bei KRAUSE's Versuchen der Nervenendapparat eigentlich noch nicht degenerirt gewesen sei, dass es also, wenn die Stäbchen zu den Nervenendigungen gehörten, auch von diesen nicht zu erwarten war, dass sie bereits degenerirt wären, aus ihrem Erhaltenbleiben mithin kein Beweis für ihre nicht nervöse Natur abgeleitet werden könnte. Auf die Physiologie des Organs hat KRAUSE seine Untersuchung nicht ausgedehnt.

Um historisch vollständig zu sein, sei erwähnt, dass BABUCHIN[8]) im Jahre 1877 in Egypten versucht hatte, am Zitterwelse dessen einzigen Nerven der einen Seite zu durchschneiden und dann das Organ der Degeneration zu überlassen. Die Operation war durch Nebenumstände nicht geglückt und wurde, da er keine besonders wichtigen Resultate von derselben erwartete, „verschoben.“

Auch RANVIER hat nach einer Litteraturangabe CIACCIO's die Nervendurchschneidung ausgeführt. Doch soll bei ihm nach CIACCIO die Endausbreitung nicht degenerirt sein (wie lange er gewartet hat, ist aus der Notiz nicht zu ersehen).

Beschreibung der Versuche.

Zur Operation wurden meist nur mittelgrosse und gesunde Thiere, Torpedo ocellata und marmorata (letztere weniger gern, da sie nach der Operation häufiger zu Grunde gingen) ausgewählt; das Thier wurde mit der Bauchseite auf eine Zinkplatte gelegt und nach der Methode SCHOENLEIN's[103]) künstliche Atmung unterhalten. Dies geschieht in der Weise, dass man in eines der beiden Spritzlöcher einen Gummischlauch einnäht und durch diesen einen schwachen Strom Seewassers den Kiemen zuführt. Je nach der Zahl der zu durchschneidenden Nerven wird nun die Haut hinter dem Spritzloch, in der Regel der linken Seite, auf eine Länge von

ca. 4 cm gespalten, wobei der Operateur und namentlich der das Thier haltende Diener heftige Schläge empfängt. Die tieferen Theile, welche nun durchschnitten bezw. zur Seite gedrängt werden, lösen den Schlagreflex nur sehr selten aus. Der erste Nerv, oberhalb des Kiefergelenkes gelegen, lässt sich jetzt bereits sehr leicht hervorheben und durchschneiden. Um zu den anderen drei Nerven zu gelangen, muss auf der Innenseite der Kiemen direct neben diesen die Muskelfascie gespalten werden. Dann wird unter Vermeidung jeder Blutung die dicke Rückenmuskulatur nach innen gedrängt und ihre Verwachsungen und Ansätze an der die Kiemen deckenden Fascie gelöst. Auf diese Weise kommt man in 2 cm Tiefe auf die 3 grossen Nervenstämme, welche mit der stumpfen Sonde gehoben und von den sie begleitenden Blutgefässen sorgfältig getrennt werden. Hierauf werden dieselben möglichst weit centralwärts durchschnitten. Sehr wichtig ist bei der sonst geringfügigen Operation die Vermeidung jeglicher Blutung, da die Thiere sonst meist nach 1 bis 2 Tagen zu Grunde gehen. Der Schluss der Wunde wurde durch einige durch die Muskulatur gehende tiefe Nähte und eine sehr dichte Hautnaht herbeigeführt, um das Eindringen des Seewassers in die Wunde zu verhüten. Waren sämmtliche Nerven der einen Seite vollständig durchschnitten, so fühlte man, wenn man Rücken und Bauchhaut auf der durchschnittenen Seite gleichzeitig anfasste, statt des heftigen Schlages nur ein ganz geringfügiges Prickeln in den Fingern, wie es durch die von der gesunden Seite abgeleiteten Stromschleifen bedingt war. Es gelang einige gut operirte Thiere sehr lange (bis zum 37. Tag) am Leben zu erhalten. Ein grosser Prozentsatz der Thiere ging ebenso wie nicht operirte Zitterrochen in der Gefangenschaft bereits nach kürzerer oder längerer Zeit ein. Es hängt das wohl zum Theil damit zusammen, dass dieselben im Aquarium auf keine Weise dazu zu bewegen sind, Futter zu nehmen.

Die Tötung der Thiere geschah in der Weise, dass zunächst mit einem einzigen Scheerenschlag sämmtliche zu dem elektrischen Organ der gesunden Seite führenden Nerven vom Gehirn abgetrennt wurden, sodass jede weitere Entladung der Organe während der Präparation ausgeschlossen war. Nach Durchschneidung des Rückenmarkes wurde das Gehirn mit den elektrischen Lappen und den anhängenden Nervenstämmen herausgeschnitten, um zu mikroskopischer Untersuchung verwendet zu werden. Alsdann wurde

jeder Nerv mit dem zugehörigen Organtheil frei präparirt. Diese Nerv-Organpräparate beider Seiten wurden nun in der Regel zu folgenden Versuchen verwendet:

1. Bestimmung des Schlagverlaufes bei Reizung des Organes vom Nerven aus. (Indirekte Reizung.)

2. Bestimmung des Schlagverlaufes nach kurzdauernder Durchströmung eines Organstreifens mit einem constanten Strom. (Direkte Reizung).

3. Bestimmung der Stärke und Dauer des Stromes, den ein Organstreifen, welcher in ein Glasrohr eingeschlossen ist, bei Umspülung mit Wasser von 60° Cels., also während des Absterbens liefert.*)

4. Bestimmung des „Widerstandes"**) eines Organstreifens mit der KIRCHHOFF'schen Brückenmethode. Da, wie mehrfach beschrieben ist, der Widerstand des Organs bei der Durchströmung rasch sinkt, wurde mittelst einer an einem Metronom befindlichen Contacteinrichtung der durch das Organ gehende Strom für höchstens $^1/_5$" geschlossen. (Vergl. SCHOENLEIN 2. Mittheilung.)

Bezüglich der Beschreibung der Einzelheiten der genannten Versuche sei auf die Protokolle S. 313 ff. verwiesen.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

In folgender Tabelle sind die aus den Protokollen ersichtlichen Ergebnisse der direkten und indirekten Reizung, der Abtötung durch Erwärmung und der Widerstands-Bestimmungen wiedergegeben.

*) Es stand mir hierfür in der Zoolog. Station eine kleine von SCHOENLEIN angegebene Einrichtung (doppelwandiges Glasrohr) zur Verfügung.

Dass beim Erwärmen bezw. Absterben ein in der Richtung des Schlages gehender Strom das elektrische Organ durchsetzt, war bereits von BURDON-SANDERSON und GOTCH am Rochen beobachtet. Dieselben Forscher konnten auch an der Torpedo zeigen, dass die Annäherung eines heissen Eisens oder das Eintauchen eines Organstückes in heisses Wasser eine beträchtliche Steigerung des Organstromes herbeiführt. Auch SACHS berichtet, dass am Zitteraal Berührung des Organs mit glühendem Eisen „die Skala pfeilschnell aus dem Gesichtsfeld treibt."

**) In folgendem ist der Ausdruck „Widerstand", „Irreciprocität" u. s. w. der Bequemlichkeit halber mehrfach gebraucht worden. Ich hebe hervor, dass dies ohne jede Parteinahme für die DU BOIS-REYMOND'sche Anschauung jener Phaenomene geschah. Der Ausdruck „homodrom" bezeichnet nach DU BOIS-REYMOND, dass bei einer Durchströmung des Organes der Strom im Organ dem Schlage gleichgerichtet ist, „heterodrom" dient zur Bezeichnung der entgegengesetzten Stromrichtung.

Eins sei hier noch hervorgehoben: Die Tage, die von der Durchschneidung der Nerven bis zur Tötung des Thieres verstrichen, sind nicht als direktes Maass für die Degeneration zu betrachten, da die Temperatur des Seewassers vom Beginn der Versuche (September) bis zum Ende derselben (Dezember) stets abnahm.

Ueberblickt man die beistehende Tabelle (S. 274/5), so sieht man zunächst, dass bis zum achten Tag nach der Durchschneidung keine Veränderung des Schlages bei indirekter und direkter Reizung eingetreten ist. Vom achten bis zum achtzehnten Tag zeigt sich in der Regel der Strom der Organtheile, deren Nerven durchschnitten worden waren, mehr oder weniger gegenüber dem der normalen Seite geschwächt und zwar bei indirekter und direkter Reizung. Ausgenommen hiervon ist nur Torpedo 38, welche noch am 18. Tag normale Verhältnisse darbot.

Vom 19. Tag ab war bei allen operirten Thieren in gleicher Weise bei indirekter wie direkter Reizung kein Strom vom Organ mehr zu erhalten.

Die längste Zeitdauer von der Nervendurchschneidung bis zur Tötung betrug 37 Tage.

Von diesen 3 Perioden: der ungeschwächten Erregbarkeit (1.—8. Tag), der herabgesezten Erregbarkeit (9.—18. Tag), und der aufgehobenen Erregbarkeit (19.—37. Tag) bieten namentlich die letzten beiden Perioden besonderes Interesse.

In der zweiten Periode nimmt die absolute Stärke des Schlages ab, ohne dass eine wesentliche Aenderung im zeitlichen Ablauf des Schlages eintritt. Zur Veranschaulichung dieses Ergebnisses sei auf die von Torpedo 20 gewonnenen Curven S. 320/21 verwiesen. Die linke Curve stellt den normalen Schlagverlauf, die rechte den auf der durchschnittenen Seite dar. In beiden Fällen bei indirekter Reizung. Die ausgezogene Curve giebt den Schlagverlauf bei Reizung mit einem im Nerven absteigenden, die punktirte Curve bei aufsteigendem Strome wieder. Die Ordinaten der Curven entsprechen den jeweiligen Galvanometerablenkungen in Skalentheilen, die Abscissen den Zeiten nach der Reizung in Tausendstel Sekunden. Man sieht an diesen beiden unter sonst ganz gleichen Bedingungen beobachteten Schlägen, dass der wesentliche Unterschied nur auf der absoluten Stärke des Schlages beruht.

Torpedo Nr.	Angabe über die Operation	Zeit in Tagen von der Durchschneidung bis zur Tötung	Reizerfolg bei indirekter Reizung der von den durchschnittenen Nerven innervirten Organtheile	Reizerfolg bei direkter Reizung der von den durchschnittenen Nerven innervirten Organtheile	Organstrom am Galvanometer beobachtet bei Abtötung eines Organstreifens durch Wärme	Widerstand der Organtheile, deren zugehörige Nerven durchschnitten worden waren
8.	23. IX. links I. Nerven durchschnitten	1	Normaler Schlag	Normaler Schlag		
9.	24. IX. links I. Nerven durchschnitten	2	Normaler Schlag			
12.	28. IX. links alle 4 Nerven durchschnitten	6	Normaler Schlag	Normaler Schlag		
19.	6. X. links I., III. und IV. Nerv durchschnitten	8	Normaler Schlag	Normaler Schlag	Skala verschwindet in wenigen Secunden	
52.	19. XI. links alle Nerven durchschnitten 26. XI. rechts alle Nerven durchschnitten	9 2	Links schwächer } normaler Schlag Rechts stärker } normaler Schlag			
20.	7. X. I., III. und IV. Nerv links durchschnitten	12	Theils gar kein, theils sehr schwacher Strom	Theils schwacher, theils etwas stärkerer Strom	Bei den am schwächsten erregbaren Organtheilen verschwindet die Skala am langsamsten aus dem Gesichtsfeld	
24.	13. X. I. Nerv rechts und links durchschnitten	13	Nur wenig schwächer als der normale Schlag	Nur wenig schwächer als der normale Schlag	Die Skala wird rasch wie bei einem normalen Organstück aus dem Gesichtsfeld getrieben	Irreciprocität des Widerstands nicht so bedeutend wie am normal. Organ

21.	9. X. I., III. und IV. Nerv links durchschnitten	16	Namentlich Organstück vom I. Nerven links innervirt: sehr schwacher Strom	Namentlich Organstück vom I. Nerven links innervirt: sehr schwacher Strom	Etwas abgeschwächt. (Vom I. Nerven links innervirter Organtheil.)	Irreciprocität geringer, aber noch vorhanden
36.	25. X. links alle 4 Nerven durchschnitten	18	Normaler Schlag	Normaler Schlag		
51.	19. XI. links alle Nerven durchschnitten	18	Schlag im Vergleich zur normalen Seite stets etwas abgeschwächt	Schlag im Vergleich zur normalen Seite stets etwas abgeschwächt		
40.	2. XI. links alle Nerven durchschnitten	19	Völlig unerregbar	Völlig unerregbar	Erst nach 2 Minuten tritt ein stärkerer Strom in der Richtung des Schlages auf	Irreciprocität völlig geschwunden
41.	4. XI. links alle Nerven durchschnitten	22	Völlig unerregbar	Völlig unerregbar	Erst nach etwa 1 Minute stärkerer Strom (Verschwinden der Skala)	
48.	16. XI. links alle Nerven durchschnitten	23	Völlig unerregbar	Völlig unerregbar	Am Capillarelektrometer kein Strom zu beobachten	
25.	13. XI. links I., III. und IV. Nerv durchschnitten	24	Völlig unerregbar	Völlig unerregbar	Nur ganz schwacher Strom	Irreciprocität geschwunden
37.	25. X. links alle Nerven durchschnitten	37	Völlig unerregbar	Völlig unerregbar	Ganz schwacher Strom, aber in der Richtung des Schlages	

Andererseits lässt sich zeigen, dass die Abnahme des Erfolges bei indirekter Reizung von einer gleichen Abnahme des Erfolges bei direkter Reizung begleitet war. Im Allgemeinen scheint wohl die Abnahme der Erregbarkeit bei indirekter Reizung derjenigen bei direkter Reizung etwas vorauszueilen, wie aus vielen Stellen der Protokolle ersichtlich ist, zeigt sich aber der Erfolg bei indirekter Reizung einmal stark verringert, so tritt diese Verringerung auch bei der direkten Reizung hervor. Ein Beispiel der letzteren Art geben die Schlagkurven von Torpedo 21 (S. 326/9). Die Curven auf S. 326/7 zeigen den Schlagverlauf bei indirekter, die Curven auf S. 328/9 bei direkter Reizung. Auf den linken Seiten sind die Curven der normalen, auf den rechten die der pathologischen Seite wiedergegeben. Als einzige wesentliche Abweichung vom normalen Typus des Schlages, wie er bei der Reizung vom Nerven aus erhalten wird, fällt auf, dass bei aufsteigender Stromrichtung im Nerven (punktirte Curve) nicht wie an der normalen Seite der Schlag um circa 0,002″ später auftritt, als bei absteigender Stromesrichtung, sondern nahezu gleichzeitig oder sogar eher, wie im letzteren Falle.

In dieser Periode der herabgesetzten Erregbarkeit zeigt sich nun, dass die Widerstandsunterschiede bei homodromer und heterodromer Durchströmung viel geringer sind auf der pathologischen Seite, wie an einem Streifen eines normalen Organes. Konnten die Bestimmungen auch nur an zwei Thieren ausgeführt werden, so spricht doch sowohl ihre gute gegenseitige Uebereinstimmung als auch die mit den Resultaten aus der dritten Periode für ihre allgemeine Gültigkeit.

Hervorgehoben sei noch, dass mit der Abnahme der Irreciprocität des Widerstandes keineswegs eine Abnahme der absoluten Höhe desselben verbunden war. So betrug der Widerstand auf der normalen Seite von Torpedo 24 in homodromer Richtung 1750, in heterodomer 2425 Ohm. Gleiche Streifen der pathologischen Seite ergaben 1925 in homodromer, 2000 in heterodromer Richtung. Der Nerv dieser Seite war 13 Tage zuvor durchschnitten worden. Bei Torpedo 21, 16 Tage nach der Durchschneidung, ergab ein normaler Organstreifen homodrom 1800, heterodrom 2025 Ohm, ein pathologischer dagegen homodrom 1600, heterodrom 1650 (vergl. S. 325).

Mit der geschilderten Abnahme der direkten und indirekten

Erregbarkeit, sowie der Irreciprocität, geht eine Abnahme des Organstromes einher, wie er bei Abtötung des Organstreifens durch Wärme erhalten wird. Diese Verringerung des Organstromes ist aber noch lange nicht so ausgesprochen, wie jene zuerst beschriebenen Erscheinungen.

In der dritten Periode vom 19. Tage ab waren die von den durchschnittenen Nerven innervierten Organtheile, wie erwähnt, indirekt wie direkt sämmtlich ganz unerregbar. Um ganz sicher zu gehen und Fehler in der Versuchseinrichtung völlig auszuschliessen, wurde, wie beispielsweise bei Torpedo 25 Protokoll S. 332 immer abwechselnd ein normaler und ein pathologischer Organtheil zur indirekten wie direkten Reizung verwendet. Während bei dem ersteren Theil immer der normale Erfolg eintrat, blieb bei dem letzteren jeder Erfolg aus. Auch die Irreciprocität des Widerstandes war jetzt völlig geschwunden, wie die Prüfung an Torpedo 25 und 40 Protokolle S. 334 und S. 341 zeigt, dabei war der Widerstand bezüglich seiner absoluten Grösse nicht vermindert.

Wesentlich geändert hat sich das Verhalten des Organstroms bei der Abtötung des Organs durch Erhitzen. War in der 2. Periode eine nur sehr schwache Verminderung desselben zu beobachten gewesen, so tritt jetzt eine ganz ausserordentliche Abnahme desselben ein. Den Uebergang zu dieser völligen Abnahme bilden Torpedo 40 und 41, 19 bezw. 22 Tage nach der Durchschneidung. Bei diesen erfolgt noch ein stärkerer Strom, aber nicht nach wenigen Sekunden, sondern erst nach minutenlanger Umspülung mit Wasser von 60°.

Abgesehen von Torpedo 48 wurde bei allen Thieren dieser Periode noch ein Organstrom beim Erhitzen beobachtet. Derselbe ist jetzt aber als ein Strom von ganz anderer Ordnung zu betrachten. Während dieser Strom an einem normalen Organtheil die Skala wenige Sekunden nach Beginn der Umspülung verschwinden lässt, giebt derselbe bei Torpedo 37, 37 Tage nach der Durchschneidung, nach 45″ Umspülung nur die maximale Ablenkung von 19 Skalentheilen. (Vergl. S. 350).*)

*) Bei einem normalen Thier ist die durch Abtötung eines Organes bei Erhitzung mehrere Minuten hindurch sich entwickelnde elektromotorische Kraft jedenfalls sehr hoch. Bestimmungen der Intensität ergaben (vergl. Protokolle S. 350 Torpedo 37 und S. 346 Torpedo 54) folgendes Resultat: Wenn man an

Mikroskopische Befunde.

Es liegt nicht im Plan der vorliegenden Arbeit die im elektrischen Lappen, am Nervenstamm und im Organ beobachteten histologischen Veränderungen einer ausführlichen Besprechung zu unterziehen. Ich kann dies erst thun, wenn sämmtliches hierfür gesammelte Material verarbeitet ist, was noch eine geraume Zeit in Anspruch nehmen dürfte.

An den Ganglienzellen des elektrischen Lappens fällt namentlich in früher Zeit (11 Tage nach der Durchschneidung) eine hochgradige Vacuolisirung*) des ganzen Zellleibes in die Augen. Wie HELD[58 u. 59]) gezeigt hat, lassen sich solche Vacuolisirungen künstlich durch die verschiedensten Fixirungsmittel erzeugen. Dass diese Art der Entstehung für meine Präparate nicht zutreffen kann, geht daraus hervor, dass in einem und demselben Schnitt, welcher durch die beiden Seiten des Lappens hindurchgeht, auf der Seite, an welcher die Nerven durchschnitten sind, sich fast nur vacuolisirte Zellen finden, während auf der anderen Seite, wo die Nerven intakt waren, alle Zellen ein normales Aussehen darbieten.

In späteren Stadien schwindet die Vacuolisirung der Zellen mehr und mehr, und es tritt jetzt der an den Ganglienzellen der Warmblütler bekannte staubartige Zerfall der NISSLkörper hervor.

Die Einzelheiten dieser Zellveränderungen sollen nach Durcharbeitung des reichen Materials binnen kurzem mitgetheilt werden.

Stelle des Organstreifens in den Bussolkreis Elemente einschalten wollte, um die gleiche Ablenkung der Bussole zu erhalten, so müssten 1,1 bis 1,25 DANIELL'sche Elemente eingeschaltet werden.

Da der Widerstand des Streifens sehr hoch ist, namentlich im Beginne der Abtötung im Vergleich zu jenem der Elemente, so muss man im Streifen eine hohe elektromotorische Kraft, jedenfalls einer grösseren Zahl von DANIELL entsprechend annehmen. (Vergl. Protokolle S. 347.)

Um festzustellen, ob diese intensive Stromentwicklung bei dem Erhitzen einem rythmischen oder continuirlichen elektromotorischen Vorgang entspräche, wurde ein zum Erhitzen vorbereiteter Organstreifen mit einem sehr empfindlichen Telephon verbunden. Dasselbe gab bei Dauerschluss nicht die Spur eines Geräusches oder Tones, ausser bei Oeffnung und Schluss des Stromkreises. (Vergl. Protokolle S. 350.) Es handelt sich demnach wahrscheinlich um einen sehr gleichmässig ablaufenden Vorgang.

*) Unter „Vacuolen" sind hier und im Folgenden grössere oder kleinere in der Flächenansicht scheibenförmig erscheinende Stellen im Zellleib verstanden, die keinen von den das Protoplasma färbenden Farbstoffen annehmen.

Die Abnahme der Erregbarkeit nach Durchschneidung war an den zu dem elektrischen Organ führenden Nerven ebenso scharf am elektrischen Schlag zu erkennen, wie bei den zu den Muskeln führenden motorischen Nerven an der Contraction des Muskels. Für den letzteren Fall waren die Nerven vielfach der mikroskopischen Untersuchung unterzogen worden und man hatte als wesentlich festgestellt, dass mit der Abnahme der Erregbarkeit ein Zerfall des Nervenmarkes parallel geht. Für den Axencylinder wurde nun durch die neuesten Befunde Moenckeberg's und Bethe's*) festgestellt, dass auch am Axencylinder der Zeitpunkt der Unerregbarkeit sich mikroskopisch scharf erkennen lässt. Bei einer von Bethe entdeckten Färbung ist der normale Axencylinder bezw. die Primitivfibrillen isolirt scharf färbbar. Diese primäre Färbbarkeit der Primitivfibrillen verschwindet nun gleichzeitig mit der Erregbarkeit am degenerirenden Nerven. Herr Dr. Bethe hatte die Güte, mir seine Färbungsmethode mitzutheilen, damit ich sie an den degenerirenden elektrischen Nerven erprobte. Es handelt sich also im Folgenden um die Frage, ob auch am elektrischen Nerven, wie es Bethe für die motorischen Muskelnerven nachweisen konnte, jene Färbbarkeit der Axencylinder verschwindet, sobald der Reizerfolg ausbleibt.

In umstehender Tabelle habe ich meine Resultate kurz zusammengestellt. Eine vollständige Färbung sämmtlicher Axencylinder ist in derselben durch ein + Zeichen, vollständige Unfärbbarkeit durch ein — Zeichen angedeutet. Ueberwiegt die Zahl der färbbaren Axencylinder über die der nicht färbbaren, so wurde dies durch $\pm$, das umgekehrte Verhältniss durch $\mp$ ausgedrückt. War endlich die eine Gattung in verschwindend kleiner Zahl im Präparat, so wurde das betreffende Zeichen noch mit einer Klammer umschlossen.

Bei den meisten Nerven wurden Proben von der Schnittstelle bis zu ca. 1 cm oberhalb, von der Schnittstelle bis zu 1 cm unterhalb derselben und endlich noch Nervenstücke der bereits im Organ sich verzweigenden Nervenäste zur Untersuchung verwendet.

*) Archiv f. mikr. Anat. 1899. Bd. 54, Heft 2, S. 155. Die Degeneration der markhaltigen Nerven etc.

Torpedo Nr.	Dauer der Degeneration in Tagen	Oberhalb der Schnittstelle	Unterhalb der Schnittstelle	Nervenverzweigung im Organ	Erregbarkeit bei Nervenreizung
35	6	+ (—)		+	Erregbar
19	8	+ —	+ —		Erregbar
20	12	+ —	— +		Schwach erregbar
29	13	+ —	— +	+ —	Theils erregbar, theils unerregbar
24	13	+ —	—	+	Etwas weniger erregbar als normal
6	17	+ —	—		Unerregbar
38	18	+ —	— (+)	— (+)	Erregbar
25	24	— +	—	—	Unerregbar
48	23	— +	—	—	Unerregbar
37	37	+ —	—	—	Unerregbar

Wie die Tabelle zeigt, ist bei der völligen Unerregbarkeit des Nerven die Färbbarkeit des Axencylinders unterhalb der Schnittstelle bis in das Organ hinein völlig geschwunden. Im Stadium der herabgesetzten Erregbarkeit finden sich theils färbbare, theils sich nicht färbende oder nur streckenweise färbende Axencylinder.

In den ersten Tagen der vollen Erregbarkeit ist keine oder nur eine geringfügige Abnahme der Färbbarkeit nachzuweisen (Torpedo 35 und 19, 6 bezw. 8 Tage nach der Durchschneidung). Nach alledem scheint das wichtige von Bethe am motorischen zum Muskel führenden Nerven entdeckte Verhalten der Axencylinder bei der Degeneration auch für die zum elektrischen Organ der Zitterrochen führenden motorischen Nerven seine volle Gültigkeit zu haben.

Die Untersuchung des mikroskopischen Verhaltens der elek-

trischen Platte nach Nervendurchschneidung versprach von vornherein, nach den oben angeführten nahezu vollständig negativen Ergebnissen Krause's (s. S. 270) zu keinerlei wichtigen Resultaten zu führen. Trotzdem wurden die meisten der Degeneration überlassenen Organe, bei der Wichtigkeit des Nachweises bestimmter Veränderungen auf Schnitten und in Flächenbildern der Untersuchung unterworfen und mit normalem Material verglichen.

In dem muskulären Theil der Platte ist es mir bis jetzt nicht gelungen, irgend welche sicher auf die Nervendurchschneidung zu beziehende Veränderung zu beobachten. Bezüglich des nervösen Theiles kann ich nur Folgendes mittheilen.

Der Markscheidenzerfall in den feinsten, noch markhaltigen Nervenästen beginnt bereits zeitig nach der Durchschneidung. Am 17. und 19. Tag wurde er bereits überall in den markhaltigen letzten Aestchen beobachtet. Die Schwärzung der kleinsten Schollen und Körnchen durch Osmiumsäure erscheint aber jetzt noch nicht so intensiv wie in späteren Stadien. Bei der längsten Degenerationszeit von 37 Tagen ist bei der Trägheit des Stoffwechsels der Torpedo der Markscheidenzerfall noch sehr ausgeprägt. Wie Abbildung 1 Taf. I von Torpedo 37 zeigt, liegen die mit Osmiumsäure sich jetzt intensiver schwarz färbenden Detritusmassen noch an der Stelle der Markscheide in einem letzten markhaltigen Nervenästchen und markiren jetzt scharf, viel deutlicher, als dies am normalen Osmiumpräparat Fig. 2 Taf. I, möglich ist, die Grenze, an welcher die Markscheide endigt. Trotz der langen Degenerationszeit von 37 Tagen, sieht man bei der schwachen Vergrösserung, dass an den marklosen Aestchen und Verzweigungen bei dem Vergleich mit der Abbildung einer normalen Platte (Abbildung 2) keine deutliche Veränderung eingetreten ist. In Figur (3 Taf. I) ist die Nervenendausbreitung einer normalen Platte und in Figur (4) die einer pathologischen Platte von Torpedo 37 bei sehr starker Vergrösserung wiedergegeben. Beide Platten sind nach Fixirung in 2 %iger Osmiumsäure und Isolation mit Hämatoxylin gefärbt und in ganz dünnem Carbolwasser untersucht. Beide Abbildungen wurden mit Zeiss Apochr. 1,4 Apert. und Compens. Ocular 7 gezeichnet. Wie man sieht, sind die marklosen Aeste an der degenerirenden Platte (Abbildung 4) vielfach angeschwollen und scheinen oft kugelig kolbig zu enden. Die Endausbreitung, sowie die Boll'sche Punktirung sind noch gut erhalten. Eine Erscheinung an der de-

generirten Platte, welche erst bei genauer Betrachtung der letzten marklosen Fasern hervortritt, sich aber an allen Stellen der degenerirten Platte von Torpedo 37 zeigt, ist folgende: Inmitten der durch das Hämatoxylin dunkel gefärbten letzten marklosen Aestchen und namentlich in jenen, vorhin erwähnten kolbigen Anschwellungen liegen feinste, aber zum Theil auch etwas grössere, in der Flächenansicht als kleinste helle Scheibchen sich darstellende Gebilde, die man beim Gebrauch der Mikrometerschraube als kugelförmige, sich nicht färbende Gebilde inmitten der dunkelgefärbten Nervenfasern erkennt. Diese kurz als Vacuolen bezeichneten Bildungen finden sich bei genauer Betrachtung in den feinsten Verzweigungen, oft an Stellen, wo man nicht sagen kann, ob sie bereits der Endausbreitung angehören oder noch dem präterminalen marklosen Nervengeäst. Ebenso wie bei der Hämatoxylinfärbung waren die Vacuolen an den mit Osmiumsäure fixirten Platten nach S-Fuchsinfärbung (nach KRAUSE) in Flachschnitten der Platten zu erkennen. Ausser bei Torpedo 37 (37 Tage nach Durchschneidung) konnten jene Veränderungen, abgesehen von den allerersten Andeutungen bei Torpedo 25 (24 Tage nach der Durchschneidung) nicht beobachtet werden. So fehlten sie beispielsweise bei Torpedo 41 (22 Tage nach der Durchschneidung) gänzlich. Die Atrophie der Fasern des Endnetzes und die weiteren und unregelmässigen Maschen konnte ich nicht beobachten, obgleich die längste Degenerationszeit von Torpedo 37 um 2 Tage den längsten von KRAUSE gewählten Zeitraum übertraf. Da KRAUSE keine Reizversuche gemacht hat, wäre ein Vergleich der Resultate KRAUSE's mit den meinigen nur auf Grund der Temperaturverhältnisse bei seinen Versuchen möglich.

Dass nur so geringfügige und erst 37 Tage nach der Durchschneidung wahrnehmbare Veränderungen an der Platte auftreten, ist nicht zu verwundern, wenn wir den zeitlichen Verlauf bei Degeneration der Muskelendplatte mit dem der elektrischen Endplatte vergleichen und uns namentlich auf die wenigen vom Kaltblüter bekannten Thatsachen beziehen. Vom Frosch giebt SOKOLOW[98]) an, dass 14 Tage nach der Durchschneidung die marklosen Nervenendigungen im Gastroknemius noch ihr normales Verhalten besitzen, und die in tropfenartigen Zerfall ausgehende Entartung sich an Thieren 28, 32 und namentlich 44 Tage nach der Durchschneidung beobachten lässt. Sehr ausführliche und gründliche Untersuchungen

am Kaltblüter (grüne italienische Eidechse) hat Gessler[108]) vorgenommen mit Berücksichtigung der jeweiligen Erregbarkeitsverhältnisse am Nerven und Muskel. 12 Tage nach Durchschneidung des Ischiadicus sind nach Gessler die Endplatten vollkommen normal. 24 Tage nach der Operation, wo die elektrische Erregbarkeit des Ischiadicus bereits völlig erloschen ist, treten neben vielen wohl erhaltenen Endgeweihen einzelne discontinuirliche, in Degeneration begriffene auf. Nach 40 Tagen sind neben einzelnen wenigen, normalen Geweihen die degenerirenden in der Ueberzahl vorhanden. Nach 90 Tagen endlich sind sämmtliche Geweihe degenerirt. Beim Warmblüter (Meerschweinchen) verläuft dieser Prozess viel rascher. Bereits 14 Tage nach der Operation ist eine Veränderung vieler Endgeweihe wahrnehmbar, und 28 Tage nach der Operation ist die Färbbarkeit sämmtlicher Geweihe geschwunden. Die Degeneration der Geweihe besteht im Wesentlichen, soweit aus der Beschreibung Gessler's und den Abbildungen seiner Goldpräparate hervorgeht, zunächst in einem Discontinuirlichwerden und tropfenartigen Zerfall der Geweihe, dem ein völliger Schwund derselben folgt. In Uebereinstimmung mit Gessler bezüglich des zeitlichen Ablaufes der Degeneration steht Kühne[72]), welcher ebenfalls an italienischen Eidechsen jene Veränderungen verfolgte.*) Vacuolisirungen der Geweihäste, wie sie oben an der elektrischen Endplatte beschrieben wurden, hat Gessler nie beobachtet, wohl aber beschreibt Kühne, allerdings erst in spätem Stadium des Zerfalls Bilder (blasige, wulstige, theils isolirte Gebilde an der Stelle der früheren Geweihäste), die vielleicht doch mit den oben beschriebenen zu vergleichen wären.

Demnach treten die morphologischen sichtbaren Veränderungen an der elektrischen Endplatte erst sehr spät auf, vielleicht im Allgemeinen später als an den bis jetzt untersuchten Endplatten anderer Kaltblüter. Eine andere wichtige Frage ist die, wie rasch die functionelle Degeneration der elektrischen Endplatte erfolgt. Diese Frage steht mit der anderen, welcher

*) Wie schwankend übrigens selbst zwischen den am nächsten verwandten Thiergattungen die Degenerationszeit sein kann, geht aus den Versuchen Hofmann's[57]) hervor. Nach genanntem Autor schwindet die indirekte Erregbarkeit bei Rana esculenta später als bei Rana temporaria. Letztere war nur bis zum 9. Tag nach Ischiadicusdurchschneidung erregbar, dagegen waren Esculenten am 15. Tag noch erregbar und erst am 25. Tag war die Erregbarkeit geschwunden.

Theil der elektrischen Platte als der elektromotorisch wirksame anzusehen ist, in engstem Zusammenhang und wird deshalb am Schluss der Arbeit mit dieser besprochen werden.

Fassen wir das Hauptergebniss dieses ersten Theiles der Arbeit nochmals zusammen:

Nach der Nervendurchschneidung tritt zugleich mit der indirekten die direkte Unerregbarkeit des Organes auf und zwar sowohl gegen elektrische wie thermische Reizung. Bei der letzteren Reizart bleibt noch ein sehr kleiner Rest der elektromotorischen Wirkung längere Zeit nach der Durchschneidung bestehen. Während der Abnahme der Erregbarkeit ändert sich der Schlagverlauf nicht*), nur die absolute Höhe nimmt ab. Zugleich mit der Erregbarkeit schwindet die Irreciprocität des Widerstandes.

Die Nervendurchschneidung führt im elektrischen Lappen Veränderungen der Ganglienzellen herbei, wie sie nach Vergiftungen und der Durchschneidung vorderer Rückenmarkswurzeln mehrfach beschrieben worden sind. Was die Veränderungen des Nervenstammes anlangt, so verlieren, nach BETHE's Methode untersucht, die Axencylinder zugleich mit ihrer Erregbarkeit auch ihre Färbbarkeit. Die Endausbreitung endlich zeigt zu einer Zeit der völligen Leistungsunfähigkeit des elektrischen Organes, morphologisch noch keine sichtbaren Veränderungen, die letzteren treten bedeutend später auf und bestehen zunächst, was allerdings nur an einem Thier beobachtet werden konnte, in feiner Vacuolisirung der marklosen Nervenverzweigungen.

II.

Wie verhält sich das elektrische Organ nach Curarevergiftung?

Die meisten Forscher, die sich mit der Physiologie der elektrischen Organe beschäftigt haben, versuchten auch eine Curarevergiftung derselben herbeizuführen, da sie sich von dieser am

---

*) Es findet sich also, was wegen der kurzen Zeit auch nicht zu erwarten war, am elektrischen Organ kein Analogon zu jenen gedehnten, wurmförmigen Contractionen der degenerirenden Muskeln, wie sie auch am degenerirenden Kaltblütermuskel von HOFMANN[57]) allerdings erst nach 70 Tagen beobachtet wurden, und wie sie derselbe jetzt an einer 123 Tage nach der Durchschneidung bei raschem Gang der Trommel aufgenommenen Curve mir sehr schön demonstriren konnte. Vergleiche GESSLER (s. o.) u. WIENER[102]).

ehesten Aufschlüsse über das im elektrischen Organ elektromotorisch Wirksame versprachen. Es wäre zwecklos, hier alle die verschiedenen Angaben aufzuzählen, von denen einige jede Wirkung des Curare auf das elektrische Organ verneinen, andere eine geringe oder eine volle Wirkung des Giftes einräumen.

Ein Hauptgrund für die Verschiedenheit der Angaben liegt in der von Steiner[99]) mitgetheilten Thatsache, dass die Fische überhaupt gegen Curare eine grosse Widerstandskraft zeigen, sodass viele Forscher mit unterschwelligen Dosen operirt haben. Auch mag für viele Versuche die Einbringung des Giftes (subcutan, in die Bauchhöhle) bei dem trägen Kreislauf der Fische eine ungünstige gewesen sein.

Von neueren Forschern kommt Sachs[23]) am Zitteraal mit der Curarevergiftung zu positiven Ergebnissen. Abweichend von früheren Untersuchern giebt er für den ersten seiner beiden Versuche an, dass der lähmenden Wirkung des Curares auf den elektrischen Nerven (?) ein Stadium erhöhter Erregbarkeit an diesen Nerven vorher zu gehen scheint. In einem zweiten Versuch konnte Sachs[23]) bei einer Unwirksamkeit der Reizung vom Nerven aus durch eine direkte Organreizung (der erste derartige Versuch in der Litteratur — Du Bois-Reymond) noch Wirkung mit einem antidromen Oeffnungsschlag erhalten, während bei homodromer Stromesrichtung jede Wirkung ausblieb. Auch trieb Benetzen eines frischen Längsschnittes mit Ammoniak „fast schlagartig den Faden aus der Scala".

Am Zitterrochen kommt Gotch[54] zu negativen Ergebnissen, die sich zum Theil aus den oben angeführten Gründen erklären dürften. Dagegen gelang es Schoenlein[97]), die Wirksamkeit des Curares auf das elektrische Organ an der Torpedo nachzuweisen. Mit Hülfe exakter Untersuchungsmethoden und rationeller Einbringung des Giftes konnte Schoenlein unter Benutzung sehr hoher Curaredosen das elektrische Organ für indirekte und zugleich für direkte Reizung vollständig unerregbar machen. Wie er sehr genau schildert, treten im Anfangsstadium der Vergiftung Krampfzustände auf und mehrfache kräftige Entladungen. Nach diesen bleiben oft längere Zeit trotz Zuführung neuer starker Curarelösung bei Reizung des Thieres noch leise Geräusche im Telephon hörbar, bis auch diese verschwinden. Bezüglich der theoretischen Verwerthung seiner Ergebnisse äussert er das, wie

weiter unten zu zeigen ist, nur zu berechtigte Bedenken, dass bei seinen ohne vorherige Nervendurchschneidung ausgeführten Vergiftungen eine durch centrale Erregung veranlasste Ermüdung des Organs nicht auszuschliessen ist (S. SCHOENLEIN II. l. c. Anm. S. 440). Ich selbst habe (s. u.) bei einer curaresirten Torpedo ein längeres Stadium der hochgradigsten centralen Erregbarkeit, ganz ähnlich der bei einer Strychninvergiftung, beobachten können.*) Dass die hierdurch bedingte Erschöpfung des Organes eine Curarevergiftung vortäuschen bzw. vervollständigen kann, lehren meine Versuche mit Thieren, denen einen Tag zuvor die Nerven der einen Seite durchschnitten waren. Wurde dann die Curarelösung dem Thiere peripheriewärts durch die Kiemenarterie der durchschnittenen Seite eingespritzt, so blieb diese Seite zum Theil noch erregbar zu einer Zeit, wo die andere mit dem Centralorgan verbundene, direkt und indirekt völlig unerregbar war. Derartige Complicationen der Curarewirkung mit der Ermüdung finden sich auch an den motorischen Endplatten der Muskeln, wie BÖHM[29]) (in ähnlichem Sinne auch ABELOUS[1])) gezeigt hat.

Nach BÖHM wird eine unvollständige Curarewirkung mit Erhaltenbleiben der indirekten Reizbarkeit des Muskels durch längere Nervenreizung zu einer vollständigen gestaltet. Ist jetzt die indirekte Reizbarkeit des Muskels erloschen, so zeigt sich die direkte Reizbarkeit des Muskels noch wohl erhalten. Die Ermüdung betrifft also hier mit grosser Wahrscheinlichkeit die motorischen Endplatten. Zu einem gleichen Ergebniss führten die Versuche WALLERS[106]). Derselbe zeigte, dass bei tetanischer Nervenreizung die vom Muskel geschriebene Curve rascher absinkt, als bei direkter Muskelreizung. Für die grössere Empfindlichkeit der Endplatte im Vergleich zum Muskel und Nervenstamm gegen Schädigungen sprechen noch folgende Versuche WALLERS. Beim Absterben bleibt die Reizung vom Nerven aus erfolglos zu einer Zeit, wo der Muskel noch direkt reizbar ist, andererseits ist aber zu dieser Zeit vom Nerven noch der Actionsstrom bei Reizung desselben zu erhalten. Das gleiche Verhältniss fand er bei der beginnenden Degeneration nach Nervendurchschneidung.

Erhielt man nun auch mit jenen oben beschriebenen Cautelen

*) Auch am Frosch ist nach TILLIE[107]) diese centrale Erregbarkeitssteigerung nachweisbar, wenn man nur rechtzeitig den Einfluſs des Curares auf die motorischen Endplatten der Muskeln in geeigneter Weise ausschaltet.

der vorherigen Nervendurchschneidung, zugleich mit der indirekten eine direkte Unerregbarkeit des elektrischen Organes, so kann die Deutung des Befundes immer noch nicht zu einem sicheren Schluss über den Sitz der elektromotorisch wirksamen Substanz führen. Einmal hat Schoenlein bereits die Vermuthung ausgesprochen, dass der Sitz der elektromotorisch wirksamen Substanz doch noch jenseits der von Curare afficirbaren Theile liegen könne, aber diesem letzten Substrat fehlte, mit unseren Mitteln wenigstens, eine künstliche Reizbarkeit, so dass sie nur von den Nervenenden aus reizbar wäre. Andererseits hat Overend[89]) es für die Muskelsubstanz sehr wahrscheinlich gemacht, dass auch diese selbst durch Curare, wenn auch nicht in so hervorragender Weise wie die Nervenendplatte selbst, afficirbar ist. Er zeigte, dass auch an dem durch Degeneration entnervten Muskel die absolute Kraft nach Curarevergiftung sich wesentlich verringert. An diese Möglichkeit der Schädigung eines nicht nervösen Plattentheiles ist bei Torpedo um so eher zu denken, als ja hier ausserordentlich hohe Dosen von Curare zur Vergiftung erforderlich sind. Man braucht sogar nicht diese Versuche heranzuziehen, um für die Deutung der Curareexperimente grosse Vorsicht anzurathen. Wurde doch von Dogiel und Nikolski gezeigt, dass Curare überhaupt zu den allgemeinen Protoplasmagiften gehört, welche in nicht zu hohen Dosen und bei nachheriger Entfernung vorübergehende Lähmung von Amöben und weissen Blutzellen herbeizuführen vermögen.

Die folgenden Versuche über die Curarevergiftung sollten zur Beantwortung von beistehenden drei Fragen dienen, deren Begründung aus dem Gesagten zur Genüge hervorgehen dürfte:

I. Tritt bei Torpedo eine Steigerung der centralen Erregbarkeit durch Curare auf? Lässt sich, wenn dieses der Fall ist, der Nachweis führen, dass als Folge derselben an dem, mit dem Centralorgan verbundenen Organtheil die indirekte und direkte Erregbarkeit schwindet, während sie an dem vom Centrum getrennten Organ trotz stärkerer Vergiftung noch erhalten bleibt?

II. Ist überhaupt mit Ausschluss jener Fehlerquellen eine vollständige Vergiftung zu erzielen, und wie verhält sich bei einer solchen die „direkte“ Erregbarkeit des Organes und der Widerstand?

III. Ist jener durch vollständige Curarevergiftung (II) bedingte Zustand durch Ermüdung des normalen Organes bei Reizung vom Nerven aus herbeizuführen?

I. Um die Steigerung der centralen Erregbarkeit während der Vergiftung am elektrischen Organ nachzuweisen, wurde Torpedo 55 (vgl. Protokolle S. 347), deren Nerven linkerseits durchschnitten waren, das rechte also mit dem elektrischen Lappen noch in Verbindung stehende Organ mit dem Schreibtelephon verbunden und die Entladungen dieses Organes auf einer sehr langsam gehenden Trommel aufgezeichnet. (Vgl. Curve I Tafel II). Die unteren 4 Linien, von *B* begonnen, tragen die Zeitmarkirung, 1 Theilstrich entspricht einer Secunde. Die vier oberen Curven, ebenfalls von links unten bei *A* begonnen, sind mit dem Schoenlein'schen Schreibtelephon geschrieben. Die Schläge bzw. Schlaggruppen markiren sich durch Striche, welche von der Horizontalen nach abwärts gehen. Wie Schoenlein gezeigt hat, ist aus der Excursion des Schreibhebels bzw. der Grösse der verticalen Striche auf der Curve in gewissen Grenzen ein Schluss auf die Grösse der wirksamen elektromotorischen Kraft gestattet. Bei V † (Curve I Tafel II) wurde nun mit der Vergiftung begonnen und zunächst 3 cbctm der 5 procentigen Curarelösung eingespritzt. Als die ersten Schläge bei a aufgetreten waren, wurde versucht durch taktmässiges Aufklopfen auf den Tisch, wie bei einer Strychninvergiftung, Schläge auszulösen. Es wurde nach dem Takt des Zeitschreibers, also etwa jede Secunde auf den Tisch geklopft und die Curve von *a* bis *b* zeigt, wie prompt das Thier auf jedes Klopfen mit einem Schlage bzw. einer Schlaggruppe antwortete. Am Ende dieser Reihe *b* (Curve I) reagirt das Thier auf jedes Klopfen mit einer grösseren Zahl rasch kleiner werdender Schläge und ist nach etwa 12 derartigen Gruppen vollständig erschöpft. Bereits nach 1 Minute bei *c* gelingt es durch Aufklopfen, wenn auch nicht so regelmässig, eine grössere Zahl kleinerer Schläge zu erhalten. In gleicher Weise treten in kürzeren oder längeren Intervallen noch bei *d*, *e* und *f* kleine und kleinste Schläge bei Reizung des Thieres auf.

Der Versuch zeigt einmal sehr deutlich die centrale Erregbarkeitssteigerung durch Curare, wie sie bei anderen Thieren wegen der grossen Empfindlichkeit der Muskelendplatten nur erkennbar ist, wenn man das Gift von den letzteren fernhält und nur auf das Centralnervensystem einwirken lässt (vgl. oben Tillie S. 286).

Andererseits giebt der Versuch einen Ueberblick über den Gang der Ermüdung, wobei es zunächst nicht zu entscheiden ist, wo der Sitz derselben sich befindet (s. u. III). Im Vergleich zu

den Resultaten SCHOENLEIN's bei der Strychninvergiftung erscheint die Zahl der Entladungen eine geringe (bei SCHOENLEIN 1—2000). Es ist aber zu bedenken, dass es sich bei SCHOENLEIN um Einzelschläge handelte, während die bei dem langsamen Trommelgang in meinem Versuch als Striche wiedergegebenen Entladungen sich aus einer Reihe von Einzelschlägen zusammensetzen können.

Um das zu obigem Versuch verwendete Thier (Torpedo 55) mit Sicherheit vollständig zu vergiften, wurden ausser den bis jetzt gegebenen 3 cbctm noch 12 cbctm 5 procentige Curarelösung in die linke Kiemenarterie injicirt. Das rechte mit dem elektrischen Lappen in Verbindung gebliebene Organ war indirekt und direkt völlig unerregbar, das linke Organ dagegen zeigte nur am vordersten Theil nahezu völlige Unerregbarkeit (entsprechend der Einspritzung in die erste vorderste Kiemenarterie), die hinteren Organtheile waren indirekt und direkt noch schwach erregbar.

Bei einem anderen Versuch wurden einem Thier (Torpedo 32, Protokoll S. 321), welchem ebenfalls die linken Nerven zuvor durchschnitten waren, 15 cbctm einer 5 procentigen Curarelösung in die rechte erste Kiemenarterie injicirt. In diesem Falle blieben die Theile des linken Organes noch erregbar, während rechts jede Erregbarkeit fehlte. Da das Gift hier zuerst zum rechten Organ gelangte, so ist dieser Versuch für die Complication der Curarevergiftung mit der Ermüdung nicht so beweisend, wie der zuerst aufgeführte Versuch, da man hier einwenden kann, das linke Organ sei weniger von Curare getroffen und deshalb erregbar geblieben. Gegen diesen Einwand lässt sich allerdings ein Parallelversuch heranziehen. Der Torpedo 53 (in den Protokollen nicht mit aufgeführt) wurde dieselbe Dosis von 15 cbctm in die linke erste Kiemenarterie eingespritzt. Bei ihr blieben aber die Nerven rechts wie links mit dem elektrischen Lappen in Verbindung.

Wie sich bei der Rheotomprüfung ergab, war rechts wie links völlige Unerregbarkeit eingetreten. Jedenfalls ist nach obigen Versuchen als Ursache der bei niedrigen Curaredosen auftretenden Unerregbarkeit des Organes, neben der Wirkung des Curares auf das Organ, die Ermüdung des Organes in Folge der gesteigerten centralen Erregbarkeit ohne Nervendurchschneidung mit Sicherheit nicht auszuschliessen*).

*) Bei allen Curarevergiftungen wurde ein von MERK bezogenes Curare verwendet.

II. Die Dosis Curare, welche erforderlich ist, um das elektrische Organ unerregbar zu machen, hat SCHOENLEIN für ein kräftiges Thier von 30 cm Breite und 1200 bis 1500 g Gewicht zu 4—6 dcg. angegeben. Nach der Nervendurchschneidung fand ich noch höhere Dosen nöthig, um vollständige Unerregbarkeit herbeizuführen. So trat bei Torpedo 38 nach 25 cbcm 5procentiger Curarelösung vollständige Unerregbarkeit an dem vom elektrischen Lappen abgetrennten Organ ein. Bei Torpedo 55 erreichte ich mit 15 cbcm derselben Lösung an den vorderen Theilen des Organes, die am direktesten von der Giftlösung getroffen wurden, den gleichen Effect, während bei den hintersten Organtheilen die Erregbarkeit noch erhalten blieb. Es entspricht dies einer Dosis von 7,5 bis zu 12,5 dcg! Man wird mit Recht einwerfen, dass derartige enorme Curaremengen direkt in den Blutstrom gebracht, nicht nur auf die Endplatten einwirken, sondern voraussichtlich alle möglichen Nebenwirkungen entfalten können (vgl. oben NIKOLSKI und DOGIEL). Selbstverständlich ist diese Annahme von Nebenwirkungen nicht auszuschliessen, für das elektrische Organ aber insofern unwahrscheinlich, als das jenem der Abstammung nach gleiche Gebilde, der Muskel, direkt noch gut erregbar war. So finden wir beispielsweise bei dem innerhalb von 1½ Stunde mit 1,1 gr Curare vergifteten Thier (Torpedo 38 Protokolle S. 330) das Herz, welches der Giftwirkung wohl mit am direktesten ausgesetzt war, bis zur Tödtung des Thieres schlagend und die indirekt nicht mehr reizbare Bauchmuskulatur direkt noch gut erregbar.

Die Erscheinungen nach einer gelungenen Vergiftung an dem vom Centrum getrennten Organ sind kurz folgende: Mit der indirekten Erregbarkeit ist auch die direkte Erregbarkeit völlig erloschen. Es ist dies das gleiche Resultat, zu dem SCHOENLEIN bei den Torpedos ohne Ausschaltung der eventuellen Ermüdung gelangte, ein Ergebniss, das ich in mehreren Versuchen nur bestätigen konnte. Für beide Versuchsarten mit oder ohne Ausschaltung der Ermüdung ergab sich weiterhin, dass der beim Abtödten durch Erhitzen entwickelte Organstrom völlig fehlte oder nur ein verschwindend kleiner Rest desselben noch vorhanden war (wenige Skalentheile, — beim normalen Organ: Herausschleudern der Skala aus dem Gesichtsfeld).

Bei der Prüfung des Widerstandes von Organstreifen ergab sich, dass die „Irreciprocität“ derselben völlig geschwunden war

(Torpedo 38 S. 330), der Widerstand derselben aber immer noch sehr hoch war und bei längerer Durchströmung sich rasch verringerte. Eine weitere Beschreibung der Versuche ist unnöthig, da sich die Ergebnisse derselben vollkommen mit den am degenerirenden Organ gefundenen decken.

III. Um die Wirkung der Ermüdung auf das normale Organ zu verfolgen, wurde zunächst folgender Weg eingeschlagen. Wie bei einem Rheotomversuch wurde der Nerv eines Nerv-Organpräparates durch die Rheotomvorrichtung 5 mal in der Secunde durch einen kurzdauernden konstanten Strom gereizt. Das Organ wurde aber dauernd mit dem Galvanometer verbunden und der in dieses eintretende Organstrom durch eine Nebenschliessung passend abgeschwächt. Alle 5 Secunden wurde bei dauernd laufendem Rheotom die Ablenkung des Galvanometers abgelesen, also nach etwa je 25 Reizungen. Der Versuch wurde fortgesetzt, bis die Ablenkungen nur noch wenige Scalentheile betrugen. Ein solcher wurde an Torpedo 36 S. 337 ausgeführt. Das Resultat wird am besten durch die beistehende Curve (S. 338) veranschaulicht. Bis zur 500. Reizung bleibt die Ablenkung auf nahezu gleicher Höhe und nimmt dann langsam ab, um bei der 1000. Reizung (200 Sec.) bereits auf niedrige Werthe, $^1/_8$ der ursprünglichen Grösse, zu gelangen. Bemerkenswerth ist, dass Schoenlein am lebenden Thier mittelst des Schreibtelephons zu ähnlichen Ergebnissen bezüglich der Schlagzahl gelangte. Die Summe der Schläge, die ein Thier hintereinander, d. h. bei einem Versuche abzugeben im Stande war, schwankte zwischen 1000 bis höchstens 2000. „Jenseits des achten bis neunten Hunderts erreicht“, wie Schoenlein beschreibt, „der Hebel nicht mehr die Maximalexcursion und mit einigen weiteren 100 bis 150 Schlägen ist das Organ zumeist erschöpft und das Thier bedarf einer Erholung von nicht unter einer Viertelstunde, ehe es überhaupt wieder spontan einen Schlag abgiebt.“ Bei Vergiftung mit Strychnin tritt nach Schoenlein die Reactionslosigkeit meist nach einer Schlagsumme von 1000 bis 1200 ein. Ganz ähnliche Werthe erhielt Schoenlein an einem Nervorganpräparat bei Aufzeichnung der Schläge mit dem Schreibtelephon. Insbesondere stellte er hier fest, dass nach einer Reizung bis zur Erschöpfung nach 10 Minuten die Erregbarkeit noch nicht wiedergekehrt war, während, wie er hier bemerkt, „am Froschmuskel in dieser Zeit eine merkliche Erholung zu beobachten gewesen wäre“.

Die Untersuchung eines vollständig ermüdeten Organs auf seinen Organstrom bei direkter Reizung hat SCHOENLEIN meines Wissens nicht ausgeführt. Gerade diese Frage erschien aber in Hinblick auf die oben geschilderte Complication der Curarevergiftung mit der Ermüdung von besonderem Interesse. Zu dem Zweck wurde an einem normalen Nerv-Organpräparat (Torpedo 41, S. 342) zunächst der Schlagverlauf festgestellt. Hierauf wurde der Organtheil mit Hülfe des Rheotoms, wie soeben beschrieben, bis zur Erschöpfung gereizt. Hierbei stellte sich zunächst heraus, dass eine nicht unbedeutende Erholung zu beobachten war, obgleich nur 1 bezw. $^1/_2$ Minute Pause zwischen den Reizversuchen gemacht wurde. Nach der 5. derartigen bis zur Erschöpfung durchgeführten Reizung trat nach einer Minute Pause gar keine Erholung mehr ein. Der gleiche Versuch an einem allerdings schwach curaresirten Organ (Torpedo 54, S. 344) führte mich zu demselben Ergebniss, dass auch nach einer erschöpfenden Reizung vom Nerven aus bereits nach 1 Minute eine geringe Erholung nachzuweisen ist, diese Erholung aber nach jeder bis zur Erschöpfung durchgeführten Reizung sich sehr rasch verringert.*) Gerade bei letzterem, mit sehr gleichmässigen Erholungspausen durchgeführten Versuch lässt sich der Vorgang der vielfachen aber immer schwächer werdenden Erholung sehr übersichtlich in Curvenform darstellen (Vgl. Curve S. 346). Wie bereits bei der oben beschriebenen Curve entspricht die Ordinate der Ablenkung des Galvanometers in Scalentheilen, die Abscisse nach je 5 Secunden, also 25 Reizungen, vorgenommenen Ablesungen. Die erstmalige „Erschöpfungscurve" (mit 1 bezeichnet) zeigt bis zur 125. Reizung einen starken Abfall, dann hält sich die Ablenkung längere Zeit constant, nimmt um die 600. Reizung nochmals etwas zu, um dann langsam bis zur 1250. Reizung auf Null abzusinken. Bei der zweiten, nach 1 Minute Pause aufgenommenen „Erschöpfungscurve" (2, S. 346) beginnt der Abfall sogleich mit der Reizung, bereits nach 400 Reizungen hat die Ablenkung Null erreicht. Jede weitere Erschöpfungscurve (3, 4, 5, 6, 7 u. s. f. S. 346) zeigt neben immer kleineren Anfangswerthen einen immer rascheren Abfall zu 0, bis endlich trotz der Erholungspause jede Ablenkung ausbleibt.

*) Der Gegensatz, in dem ich mich hier zu SCHOENLEIN befinde, dürfte wohl zum Theil darauf beruhen, dass SCHOENLEIN für jene Untersuchung das Schreibtelephon, ich das empfindlichere Galvanometer verwendete.



Kehren wir jetzt zu dem oben geschilderten Versuch am normalen Nerv-Organpräparat von Torpedo 41, S. 342 zurück. Als das Organ bei Reizung vom Nerven aus keine Reaction trotz vorausgegangener Erholungspause ergab, wurde in der bekannten Weise die „direkte“ Reizung des Organs vorgenommen. Es stellte sich nun heraus, dass das Organ auch für „direkte“ Reizung so gut wie völlig unerregbar geworden war (vgl. S. 343), und dass auch beim Erhitzen eines Organstreifens nur noch ein äusserst schwacher, in der Richtnng des Schlages gehender Strom zu erzeugen war. Das gleiche Ergebniss bezüglich der direkten Organreizung lieferte das schwach curaresirte und dann ermüdete Organ von Torpedo 54, S. 345.

Aus sämmtlichen obigen Versuchen ergiebt sich also folgendes bemerkenswerthe Resultat:

Sowohl Nervendurchschneidung mit nachfolgender Degeneration, intensive Curarevergiftung des von dem elektrischen Lappen abgetrennten und daher durch diesen nicht mehr erregbaren elektrischen Organs, als auch schwächere Curarevergiftung des von dem elektrischen Lappen aus noch erregbaren Organs mit darauf folgender erschöpfender Reizung des Nervenstammes, oder endlich einfach erschöpfende Reizung des Nervenstammes führt dazu, dass das elektrische Organ gleichzeitig indirekt und direkt unerregbar wird und selbst Erhitzen eines Organstreifens keinen nennenswerthen Strom mehr erzeugt. Für einen Theil der Versuche (Degeneration und Curarevergiftung) wurde ausserdem der Beweis geführt, dass zugleich mit der Erregbarkeit auch die „Irreciprocität“ des Organwiderstandes verschwindet. Auf die Deutung dieser Ergebnisse komme ich am Schlusse der Arbeit (S. 310—313) noch zu sprechen.

III.

Wie wirkt Veratrin auf das elektrische Organ?

Sehr anschaulich schildern Fick und Böhm[49]) die bei Veratrinvergiftung erhaltenen Contractionsformen der Stammesmuskulatur.

Sie unterscheiden 3 Arten von Curven, wie sie nach Reizung des Muskels mit einem Inductionsschlag erhalten werden:

„1. Der Muskel zieht sich rasch ad maximum zusammen und dehnt sich dann sofort rasch ein klein wenig und weiterhin lang-

sam wieder aus. Das diesem Verlaufe entsprechende Myogramm ist annähernd ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Dehnungslinie, dessen eine Kathete die Zusammenziehungslinie ist.

2. Rasche Zusammenziehung ad maximum, unmittelbar darauf rasche Wiederausdehnung um ein namhaftes Stück, hierauf langsame nochmalige Zusammenziehung und langsame Dehnung. Das Myogramm gleicht einer dikroten Pulscurve. Die zweite langsame Zusammenziehung kann die erste rasch an Grösse übertreffen, ihr gleich kommen oder hinter derselben zurückbleiben.

3. Anfänglich rasche, dann langsamer werdende Zusammenziehung, hierauf mehr oder weniger langdauerndes Zusammengezogenbleiben, dann langsame Wiederausdehnung.

Zwischen diesen drei Formen finden sich alle Uebergänge." Wie OVEREND[89]) zeigte, sind diese Verschiedenheiten der Curvenformen durch die verschiedene Stärke der Reizung bedingt: „Der erste Höcker gleicht sich bei höherer Stromstärke mehr und mehr aus, oder wenn zwischen beiden (Gipfeln) eine weite Bucht besteht, so wird diese durch stärkere Reizungen zum Verschwinden gebracht." Jener Forscher glaubt, dass es sich bei der Veratrincurve im Wesentlichen um die Wirkung der flinken und langsamen Fasern (GRUETZNER) handelt, von denen die letzteren mit Erhöhung der Stromstärke immer mehr ins Spiel treten, und ihre Latenzzeit sich vermindert.

Hiergegen stellen in neuester Zeit CARVALLO und WEISS[44]) fest, dass am Kaninchenmuskel die typische Veratrincurve ebenso von den blassen wie von den rothen Muskeln zu erhalten ist. Es würde sich demnach die obige Hypothese nur halten lassen, wenn man auch in den ausgesprochen weissen Muskeln des Kaninchens eine hinreichende Menge rother Fasern annehmen würde.

Sehr wichtig für das Verständniss der bei der Zusammenziehung eines veratrinisirten Muskels in ihm ablaufenden Vorgänge, ist die von FICK und BÖHM festgestellte Thatsache, dass eine Veratrinzuckung viel mehr Wärme bildet, als die Einzelzuckung eines normalen Muskels. Diese Forscher geben beiläufig an, dass eine einzige Zusammenziehung eines Veratrinmuskels auf Einzelreiz eben so viel Wärme bildet, wie ein normaler Muskel erst nach 2 Secunden langem Tetanus erzeugt. Sie schliessen hieraus, dass die Nachdauer der Zusammenziehung im Veratrinzustande auf einer grösseren Intensität der chemischen Prozesse beruht.

Ausser auf die Stammesmuskulatur wirkt das Veratrin auf den Herzmuskel und wie neuerdings MARFORI[84]) fand, auch auf die glatte Muskulatur der Harnblase des Frosches. Die Contractionsform am Froschherz entspricht der eines ausserordentlich in die Länge gezogenen Schlages. Die Zusammenziehuug ist nicht wesentlich verzögert und die Erschlaffung beansprucht wie bei der Stammesmuskulatur ausserordentlich viel Zeit. Es gelang BÖHM derartige Contractionen von 20—30 Secunden Dauer am Froschherz zu erhalten; während LISSAUER[76]) in neuerer Zeit, vermuthlich in Folge ungünstiger Nebenumstände (Temperatur!) nur solche von 3—4 Secunden Dauer erhielt.

Eine weitere allen veratrinisirten Muskeln zukommende Eigenschaft ist die, oft nach wenigen Reizungen schon stark zu ermüden, namentlich aber an Stelle der ersten gedehnten Contractionen mehr und mehr normale Contractionen zu liefern. Eine kurze Pause stellt den Muskel mehr oder weniger wieder her, und die ersten Contractionen geben wieder jene gedehnten Curven. Im Höhestadium der Vergiftung steigert Veratrin nach OVEREND[89]) die absolute Kraft des Muskels. Zu starke Dosen führen, wie schon v. BEZOLD[27]) und HIRT[27]) fanden zu einer vollständigen Unerregbarkeit der Muskelfasern. Ehe dieser Zustand eintritt, erlischt bereits die indirekte Reizbarkeit des Muskels. v. BEZOLD und HIRT machen hierfür den Nervenstamm verantwortlich und glauben, dass auch dieser durch das Veratrin beeinflusst würde. Da die Entscheidung der Frage, ob das Veratrin, wenn auch nur in geringem Maasse ein Nervengift darstellt, für die Deutung meiner Befunde am elektrischen Organ von principieller Wichtigkeit ist, will ich kurz auf das wenige hierüber Bekannte eingehen.

Die Anschauung von BEZOLD und HIRT stützt sich neben anderen, später von FICK und BÖHM widerlegten Gründen auf die Beobachtung, dass an einem veratrinisirten Nerven eine Einzelreizung mit einem Inductionsschlag, bei Benutzung der WIEDEMANN'schen Bussole eine messbare negative Schwankung erzeugte, während sie am normalen Nerven eine verschwindend kleine negative Schwankung ergab. Für die Richtigkeit ihrer Beobachtungen sprach namentlich folgende Stelle: „Wir können nur angeben und auf das bestimmteste versichern, dass Letzteres wirklich der Fall ist in den ersten Reizungen; je öfter man die Reizung wiederholt, desto mehr nähert sich das Verhalten des Nerven dem normalen.“

Die Verfasser schliessen hieraus, dass bereits in dem Nerven, statt einer kurzdauernden eine länger anhaltende Erregung nach Veratrinvergiftung auftritt. FICK und BÖHM wiederholten jene Versuche und fanden, dass die negativen Schwankungen nach Momentanreiz am veratrinisirten Nerven nicht beträchtlicher sind, als an den Nerven gesunder Thiere. Da LISSAUER[76]) für grosse Veratrindosen eine centrale Krampf erregende Wirkung annimmt, so war bei den Versuchen von FICK und BÖHM nicht ausgeschlossen, dass jene hypothetische Eigenschaft des Nerven durch die zahlreichen, vom Centrum ausgehenden Erregungen bereits geschwunden war.

Um über jene, soweit mir bekannt, seit FICK und BÖHM's Untersuchung nicht wieder berührte Frage Gewissheit zu erlangen, habe ich die negative Schwankung bei Einzelreiz einmal an einem Frosch untersucht, dem einen Tag vor der Untersuchung beide Ischiadici durchschnitten wurden. Er bekam etwa ein cbctm 1 procentige Veratrinlösung in den Rückenlymphsack injicirt und erst eine halbe Stunde nach der Vergiftung wurde das Thier getödtet. Trotz dieser Cautelen gaben die ersten negativen Schwankungen keinen grösseren Ausschlag als die von normalen Vergleichsthieren. Das gleiche Resultat ergab die Beobachtung der negativen Schwankung eines normalen Nerven, der durch 3 Minuten langes Eintauchen in 1 procentige Veratrinlösung (in 0,6% Kochsalzlösung) hinlänglich hätte vergiftet sein müssen. Mit der grössten Wahrscheinlichkeit ist daher die Annahme FICK's und BÖHM's die richtige, dass der Nervenstamm durch das Gift nicht beeinflusst wird.*)

Wie verhält sich nun aber die motorische Endplatte? Dieselben Forscher haben festgestellt, dass Curarevergiftung die Veratrincontraction des Muskels nicht beeinflusst, also jener Zustand der Muskulatur nicht durch Veränderungen in der Erregbarkeit der Nervenendplatte herbeigeführt ist. Selbstverständlich schliesst dieses nicht aus, dass das Veratrin auch auf die Endplatte einwirkt. Für diese Möglichkeit würde eine andere Beobachtung jener Untersuchungen sprechen. Dieselben beobachteten bei stark veratrinisirten Thieren, wie vor ihnen von BEZOLD und HIRT, eine scheinbare Wirkung auf den Nervenstamm: Der Muskel war vom Nerven unerregbar, wohl aber noch direkt erregbar. Dabei zeigte sich nun, dass der Nervenstamm bei tetanischer Reizung die

*) Vergl. dagegen S. 312.

negative Schwankung zum wenigsten in vollem Betrage gab, also mit grösster Wahrscheinlichkeit noch erregbar war. Hieraus schliessen FICK und BÖHM, dass es sich bei starken Vergiftungen um eine Lähmung des Nervenendapparates handelt. Ebensogut lässt sich allerdings nach ihren Befunden annehmen, dass, wie der Nervenstamm, so auch der Nervenendapparat völlig functionsfähig geblieben ist, aber der stark vergiftete Muskel nur noch auf die elektrische und nicht mehr auf die natürliche Reizung reagirt. Leider fehlt es bis jetzt in dieser, dem Experiment schwer zugänglichen Frage an einer entscheidenden Beantwortung.

Wir wissen also, dass das Veratrin ein specifisches Muskelgift ist, die Contractionsform in der besprochenen Weise abändert, zugleich die bei jeder Contraction auftretenden chemischen Umsetzungen vermehrt und vermuthlich zugleich die absolute Kraft des Muskels im Beginn steigert. Stärkere Dosen führen zu einer völligen Unerregbarkeit der Muskelsubstanz und auch die schwächeren Dosen begünstigen die rasche Ermüdung derselben. Auf das Centralnervensystem wirken stärkere Dosen krampferregend. Vom peripheren Nervensystem erscheint der Nervenstamm völlig unbeeinflusst zu sein, dagegen ist eine Wirkung auf die motorischen Endplatten bis jetzt nicht als ausgeschlossen zu betrachten.*)

Bei der Anwendung des Veratrins auf das elektrische Organ handelte es sich um folgende Fragen: Wird dasselbe durch Veratrin überhaupt in seiner Thätigkeit beeinflusst, und wenn dieses der Fall ist, handelt es sich um eine einfache Verringerung oder völliges Verschwinden seiner elektromotorischen Kräfte, oder aber tritt an demselben eine, der Veränderung der Muskelcontraction analoge Erscheinung, also eine Veränderung im Ablauf des elektrischen Schlages auf?

Zunächst wurde es versucht, diese Fragen am Rheotom zu beantworten, wenn gleich von vornherein für den Fall, dass das Veratrin das Organ stärker beeinflusste, zu erwarten war, dass durch rasche Ermüdung über den Schlagverlauf kein positives Ergebniss zu erhalten war. Des weiteren wurde, da jene Vermuthung sich bestätigte, der Schlagverlauf am Capillarelectrometer verfolgt, ein Versuchsverfahren, bei dem wegen der nur einmal nothwendig werdenden Reizung die Aussichten auf Erfolg weit günstigere waren.

*) Bezügl. der Einzelheiten der Veratrinlitteratur sei auf die Arbeit LISSAUER's[39]) verwiesen, welche eine gute Uebersicht derselben giebt.

1. Versuche am Galvanometer und Vorversuche an der Muskulatur.

In einem ersten Vorversuche wurde, um mit dem werthvollen Torpedomaterial zu sparen, an einer Raja punctata die Wirkung des Veratrins erprobt. Bei dieser ergaben, 3 Tropfen einer einprocentigen Lösung von Veratrinum sulf. in die Bauchhöhle eingespritzt, kurz darauf Unruhe des Thieres, ohne dass eine ausgesprochene Vergiftung auftrat. Nach 3 Stunden hatte sich die Raja wieder vollständig erholt und bekam jetzt 9 Tropfen der einprocentigen Lösung also ca. 5 mmg. Jetzt traten kurz nach der Injection heftige Krämpfe in der Muskulatur des ganzen Thieres auf, die Athmung wurde langsam und flach, jede tiefere Athmung schien bei dem Thiere eine langdauernde Zusammenziehung sämmtlicher Muskeln herbeizuführen. Nach 20 Minuten war die Athmung völlig geschwunden. Die jetzt vorgenommene graphische Verzeichnung der Muskelcontractionen bei direkter Reizung des Muskels mit einem einzelnen Oeffnungsinductionsschlage ergab die typischen Veratrinmuskelcurven, wie sie vom Frosch erhalten wurden. Auch die zur Vergiftung erforderliche Dosis stimmt gut mit der von Biedermann[39]) beim Frosch verwendeten Gabe überein (6—7 Tropfen 1% Lösung von Veratr. acet.). Allerdings konnte Biedermann bei diesem viel kleineren Thiere bereits mit 1—2 Tropfen einer 0,2 procentigen Lösung eine, wenn auch nicht so ausgesprochene Vergiftung erzielen.

Die Torpedos wurden nun mit Gaben verschiedener Grösse vergiftet und vor der Prüfung der Organe bald durch direkte Beobachtung, bald mit graphischer Registrirung die Wirkung des Giftes auf die Stammesmuskulatur und das Herz festgestellt. Von der kleinsten bis zur grössten verwendeten Giftmenge, 2 mmg bis 70 mmg, die den Thieren von der ersten Kiemenarterie aus direkt in den Kreislauf gebracht wurde, blieb die Wirkung des Giftes auf Herz und Muskulatur nie aus. Während hohe Dosen beim Frosch leicht den gänzlichen systolischen Stillstand des Herzens herbeiführen, konnte ich bspw. nach der stärksten Vergiftung mit 70 mmg noch spontane, wenn auch ausserordentlich gedehnte Herzschläge bei Freilegung des Herzens beobachten.

Als Beispiel für die schöne typische Veratrinwirkung auf die Muskulatur sind auf Tafel II, Curve V 6 Muskel„zuckungen“ nach Reizung des Muskels mit einem Oeffnungsinductionsschlag wieder-

gegeben. Der verwendete Muskel war ein Bauchmuskel von Torpedo 50, die während einer ganzen Stunde 2 mmg Veratrin erhalten hatte (vgl. Protokolle Seite 338). Wie die Betrachtung der Curve V zeigt, hat der Schlag I zunächst einen steilen Aufstieg, kurzen Abfall und dann die gedehnte zweite Erhebung, welche noch wesentlich an Höhe die erste übertrifft, der Abfall streckt sich ausserordentlich in die Länge. Jede der folgenden Curven zeigt nun Abnahme der Dauer und namentlich die Abnahme des zweiten Gipfels, bis dieser schliesslich an der letzten Curve ganz geschwunden ist, und nur ein langsameres Absinken der Curve an dessen Stelle tritt. Zugleich nimmt die von der Curve erreichte Höhe mit jeder Zuckung rasch ab, bei der ersten betrug die Zuckungshöhe 17, bei der sechsten nur noch 11 mm. Jedenfalls zeigt die Curve deutlich, dass bei der Torpedo das Veratrin schon in kleinen Dosen die bekannten Veränderungen in der Stammesmuskulatur erzeugt, und dass namentlich die rasche Ermüdung hier sehr ausgeprägt ist.

Die Veränderungen am Herzschlag sind von dem Zitterrochen 45 (Protokolle Seite 336), welcher 10 mmg Veratrin erhalten hatte, wiedergegeben. Die Curven (Tafel II, Curve IV) wurden in der Weise gewonnen, dass Herzspitze und Basis mit feinen Häkchen durchbohrt wurden und man das Ganze an einem leichten Schreibhebel (Tangentialschreibung) befestigte. Der Herzschlag wurde hier durch künstliche Reizung (Inductionsschlag) ausgelöst. Zum Vergleich mit diesem pathologischen Herzschlag sind auf Tafel II, Curve II und III die Herzcontractionen von normalen Thieren verzeichnet. Wie die Betrachtung der Curve IV, Tafel II lehrt, beträgt bei dem ersten, durch künstliche Reizung gewonnenen Herzschlag die Zeit vom Beginn des Schlages bis zur maximalen Zusammenziehung $5\frac{1}{2}''$, der ganze Schlag aber bis zur vollständigen Erschlaffung 30″. (Die über den Curven stehende Zeitschreibung entspricht ganzen Secunden). Die oberste Curvenreihe, bei welcher der Reizmoment, Schliessungs- oder Oeffnungsinductionsschlag durch Herabgehen oder Hebung der über der Zeitcurve befindlichen Linie (Z) gekennzeichnet ist, zeigt, wie lange bei dieser Veratrinvergiftung des Herzens der Zustand geminderter Erregbarkeit vorhanden ist. Zum Vergleiche dieses pathologischen Herzschlages mit dem des normalen Herzens sei hier nochmals auf die von letzterem geschriebenen Curven Tafel II, Curve II

und III verwiesen, bei welchen der ganze Herzschlag etwa 1 Secunde beanspruchte.

Da mit LISSAUER[76]) anzunehmen ist, dass grosse Veratrindosen die centrale Erregbarkeit steigern, so wurde, um eine vorzeitige vollständige Entladung zu vermeiden, die bei den lange dauernden Injectionen auch schon durch die zahlreichen unabsichtlichen Reizungen des Fisches erfolgen konnte, in den meisten Versuchen auf der linken Seite die Nerven durchschnitten. In der That war in diesen Fällen mit Ausschaltung des elektrischen Lappens noch eher ein Reizerfolg zu erhalten als von der normalen Seite. Beispielsweise wurde bei Torpedo 50, wo beide Seiten mit dem elektrischen Lappen in Verbindung geblieben waren, trotz der geringen Gabe von 2 mmg, beiderseits vollständige Unerregbarkeit der Organstücke festgestellt, dagegen gaben die beiden Torpedos mit links durchtrennten Nerven Torp. 42 (10 mmg), Torp. 43 (70 mmg) nur linkerseits die später noch zu besprechenden Reizerfolge. Abweichend hiervon gab ein anderes Thier Torp. 44 (5 mmg) beiderseits keinen Reizerfolg mehr, und ein zweites (Torp. 45, 10 mmg) gerade an der operirten Seite keinen, und auf der normalen Seite noch einen merklichen Reizerfolg. In diesem Falle war allerdings das Gift in die linke Kiemenarterie gespritzt worden, so dass es jene Organtheile zuerst erreichte.

Was nun die elektrische Untersuchung der Organe selbst anbetrifft, so blieb bei einer grossen Reihe derselben jeder Erfolg bei indirekter wie direkter Reizung oder Abtödtung durch Erhitzen aus. Den negativen Ergebnissen an der undurchschnittenen Seite wurde wegen der hier in Betracht kommenden Ermüdung des Organes wenig Werth beigelegt. Dagegen sei hervorgehoben, dass auch unermüdete, vom Centrum getrennte Theile bei Torpedo 44 und 45 (Protokolle S. 336) bei der Reizung völlig oder nahezu völlig unerregbar waren. Am meisten interessirte es mich nun, bei den noch erregbaren Theilen die Organreaction auf ihre Abweichungen vom normalen Typus zu prüfen. Ein erster dahin gehender Versuch wurde an Torpedo 42 (Protokolle S. 335) vorgenommen.

Um die möglicherweise rasch jeden Erfolg vernichtende, sich immer wiederholende Reizung am Rheotom zu vermeiden, wurde mit SCHOENLEIN's Schreibtelephon auf rasch rotirender Trommel bei einmaligen Nervenreizungen von dem linken, allein noch er-

regbaren Organ eine Reihe von Schlägen aufgezeichnet. Abgesehen von ihrer Kleinheit und der geringen Zahl, nach der bereits das Organ erschöpft war, konnte keine Veränderung an denselben wahrgenommen werden. Als sicherer Beweis durfte ein derartiger Versuch nie gelten, da unter einer bestimmten Stromstärke das Telephon die Organreaction nicht mehr verzeichnet. Es wurde daher bei dem nächsten Thier Torp. 43 (Protokolle S. 335) zu einer andern Art der Untersuchung geschritten. Zunächst stellte ich mit Telephon fest, dass nur auf der linken Seite, wo die Nerven durchschnitten waren, bei Nervenreizung ein stärkeres, nicht auf die Stromschleifen des Inductionsschlages zu beziehendes Geräusch hörbar war. Dann wurde an Stelle des Telephons das Galvanometer mit angeschobener Rolle mit dem Präparat dauernd verbunden und bei jeder Reizung des Nerven mit Inductionsschlag eine starke, nicht auf Stromschleifen zu beziehende Ablenkung beobachtet. Daraufhin wurde an einem derartigen Nerv-Organpräparate eine Rheotomreizung versucht. Es stellte sich jedoch heraus:

Dass jedesmal bei der etwa 2 Secunden dauernden Reizperiode zu Beginn eine stärkere Ablenkung erfolgte, die aber schon während der Reizung selbst rasch zurückging: Es schien bei jeder Reizung, als ob immer nur der erste vom Rheotom geschickte Reizstrom wirksam gewesen wäre.

Wegen dieser Erscheinung war jede Bestimmung des Schlagverlaufes am Rheotom unmöglich.

Die gleiche Beobachtung des raschen Zurückgehens der Skala wurde an dem Nerv-Organpräparat von Torp. 45 (Protokolle S. 336) gemacht. Ich musste daher bei Benutzung des Rheotoms von jeder Bestimmung des Schlagverlaufes absehen und versuchte nur noch die einer sehr raschen Ermüdung ähnliche Erscheinung am Galvanometer zu beobachten.

In ähnlicher Weise, wie dies bereits bei normalen Thieren (Torp. 36 Protokolle S. 338, Torp. 54 Protokolle S. 345) ausgeführt wurde, las ich bei dauerndem Bussolschluss und laufendem Rheotom die Ablenkungen aller 5 Secunden ab, während der Nerv aller 0,2″ durch den Streifcontact gereizt wurde. Das Ergebniss ist in den Protokollen auf Seite 337 durch die Curven a und b wiedergegeben, bei denen 1 mm der Abscisse, genau wie bei den

Ermüdungscurven des normalen Organs (Torp. 36 Protokolle S. 338), dem Zeitraum zwischen 2 Ablesungen, also 5″ entspricht, die Ordinaten geben die jeweiligen Ablenkungen in Skalentheilen.

Bei den veratrinisirten Organen sinkt vom ersten Moment der Reizung an, wie die Curven (S. 337) deutlich zeigen, die Ablenkung bezw. die elektromotorische Kraft des Organes. Nach 100 Secunden, also 500 Reizungen ist am normalen Organ die Ablenkung noch hoch und constant (Vergl. Protokolle S. 338 und 345), bei dem veratrinisirten Organ dagegen ist um diese Zeit die Ablenkung bereits auf nahezu 0 gesunken (Protokolle S. 337). Dieses Verhalten konnte, wie die beiden Curven zeigen, in gleicher Weise an zwei verschiedenen Nerv-Organpräparaten festgestellt werden.

Was also sicher mit dem Galvanometer, Rheotom u. s. w. festzustellen war, ist Folgendes: Schon in kleinen Dosen führt das auf die Stammesmuskulatur und Herz der Zitterrochen stark wirkende Veratrin in den elektrischen Organen auch nach Abtrennung vom elektrischen Lappen zur Vernichtung der indirekten und direkten Erregbarkeit. Sind die elektrischen Organe weniger stark geschädigt, so zeigen sie bei wiederholter Reizung eine äusserst rasche Abnahme der Erregbarkeit im Vergleich zum normalen Organ. Diese Ermüdbarkeit ist so stark, dass sie jede Bestimmung des Schlagverlaufes mit dem Rheotom unmöglich macht.

2. Versuche am Capillarelektrometer.

Jenes auffällige Verhalten des veratrinisirten Organes, welches sehr der raschen Ermüdung des veratrinisirten Muskels ähnelte, veranlasste mich am Schluss der mir in Neapel zur Verfügung stehenden Zeit mit zum Theil improvisirten Einrichtungen den Schlagverlauf bei einer Einzelreizung des Nerven photographisch, sowie bei direkter Beobachtung, am Capillarelektrometer zu verfolgen. Bei der Kürze der mir zu Gebote stehenden Zeit sind in Folge der Unvollkommenheiten der Einrichtungen die zeitlichen Verhältnisse sowie auch die absoluten Werthe der Schläge keineswegs fehlerfrei; doch sind die verschiedenen am Capillarelektrometer erhaltenen Curven, sowie die aus ihnen berechneten Curven des Schlagverlaufes gut untereinander vergleichbar und lassen den grossen Unterschied zwischen dem Schlag des normalen und veratrinisirten Organes mit voller Sicherheit erkennen.

Gerade für den vorliegenden Fall zeigen sich die Vorzüge der Untersuchung mit dem Capillarelektrometer gegenüber dem Rheotomverfahren in unbestreitbarer Weise. Auf die Technik der Versuche brauche ich hier nicht einzugehen, dieselbe ist, soweit sie zum Verständniss der Resultate erforderlich ist, in den Protokollen (S. 353 u. folgd.) beschrieben. Die Berechnung des Schlagverlaufes ist nach der Methode von Burch ausgeführt, bezüglich deren Einzelheiten auf dessen Schrift, the Capillary Electrometer in theorie and practice. London 1896, verwiesen sei.

Zur Erklärung der Abbildungen diene Folgendes: Abgesehen von der Aichungscurve Tafel III, Nr. 3, sind die nach den photographischen Aufnahmen hergestellten Lithographien von rechts nach links zu lesen, die daraus berechneten Schlagcurven von links nach rechts.

Die mit T bezeichnete oberste Linie auf den Aufnahmen giebt durch ihre Erhebung den jedesmaligen Reizmoment an. Darunter verläuft die von der Stimmgabel geschriebene Curve S, jede Halbschwingung derselben entspricht 0,0086″. Die von der Spitze des Quecksilbermeniscus geschriebene Curve ist mit H bezeichnet. Ein Anstieg derselben entspricht einem Zuwachs an elektromotorischer Kraft in der Richtung des Schlages des Organes.

Was sich direkt aus den photographischen Aufnahmen herauslesen lässt, ist Folgendes. Die elektromotorische Kraft, wie sie an irgend einem Punkte der Curve H wirksam war, findet bekanntlich ihren Ausdruck einmal in der Erhebung dieses Punktes über dem als Nulllinie festgelegten Kreisbogen, andererseits in der in diesem Moment vorhandenen Geschwindigkeit der absteigend oder aufsteigend gerichteten Bewegung des Quecksilbers. Der durch den Höhenabstand von der Nulllinie gemessene Bruchtheil der elektromotorischen Kraft ist aus der Aichungscurve (Nr. 3, Taf. III) leicht zu ermitteln. Diese Curve wurde in der Weise erhalten, dass an der Stelle des elektrischen Organes in den gleichen Stromkreis ein Daniell'sches Element eingeschaltet und in einem bestimmten Moment dessen Strom geschlossen wurde. Es wirkte also jetzt der gleiche Bruchtheil der elektromotorischen Kraft, wie vordem vom Organschlag, auf das Capillarelektrometer. Bleibt dieser Strom von jenem Moment ab dauernd geschlossen, so hat dieses, wie die Aichungscurve zeigt (Nr. 3, Taf. III) einen ziemlich flachen Anstieg des Quecksilbers H zur Folge. Die Marke E ent-

spricht dem Stillstand des Quecksilbers bei dauernder Schliessung des DANIELL'schen Elementes, wie er nach einer gewissen Zeit eintritt. Der Höhenabstand von E über der Nulllinie dient nun bei jeder anderen durch eine unbekannte constante elektromotorische Kraft hervorgerufenen Dauereinstellung als Maass dieser Kraft, da in gewissen Grenzen sich bei der Dauereinstellung die elektromotorischen Kräfte wie die durch dieselben erzeugten Erhebungen des Quecksilbers über die Nulllinie verhalten. Ehe der Meniscus bei einer constanten elektromotorischen Kraft zu Ruhe kommt, oder während seiner Bewegung bei einer beliebig wechselnden elektromotorischen Kraft, giebt die absolute Höhe des Quecksilbers über der Nulllinie für einen bestimmten Punkt der Curve in gleicher Weise den einen Theil der in diesem Moment vorhandenen elektromotorischen Kraft an, zu dem sich ein zweiter aus der Geschwindigkeit der Bewegung des Quecksilbers in diesem Punkte berechneter Antheil algebraisch summirt — addirt, wenn der Punkt über der Nulllinie liegt und in diesem Punkte die Quecksilberbewegung nach oben gerichtet ist, — subtrahirt, wenn die Bewegung des Quecksilbers zu dieser Zeit nach abwärts geht.

Dieser zweite Theil der elektromotorischen Kraft ist der Geschwindigkeit der Bewegung des Quecksilbers (in gewissen Grenzen) proportional und wird zur Berechnung auf die durch 1 Daniell erzielte Geschwindigkeit bezogen.

Um vor Irrthümern sicher zu sein, wurde zwischen der Untersuchung der Nerv-Organpräparate veratrinisirter Thiere mehrfach der Schlagverlauf von normalen Organen verzeichnet. Zur Reizung des Nerven wurde in der Regel der Einfachheit halber ein kräftiger Oeffnungsinductionsschlag verwendet. Bei dieser Art der Reizung treten, wie GOTCH beschrieben hat, mehrfache Gipfel auf.

Bei den von normalen Thieren aufgenommenen Curven zeigt Figur 2, Taf. III Andeutungen einer solchen Mehrgipfeligkeit, doch sind die Zacken so geringfügig, dass ich sie nicht auf mehrfache Entladungen sondern eher auf die mangelhafte Verzeichnung beziehen möchte. Eine andere auf Tafel III, Nr. 9 wiedergegebene Schlagcurve zeigt jene Zacken nicht, desgleichen die nach Reizung des Nerven mit dem constanten Strom geschriebene Curve Tafel IV, Nr. 28. Vergleicht man die genannten Curven mit den früher vom Rheotom erhaltenen Curven (vergl. Protokolle 320 u. 326, so zeigt sich, dass die Latenzzeit und der Anstieg bei beiden

Untersuchungsmethoden nahezu gleich ist, dagegen der Abstieg bei den Capillarelektrometer-Curven weniger steil ist und die sonst so häufig beobachtete zweite Erhebung fehlt bezw. im absteigenden Schenkel nicht als solche zu erkennen ist.*)

Leider war es mir nicht mehr möglich, durch Prüfung der Capillare zu entscheiden, ob jene Differenzen in Fehlern des Instrumentes begründet waren, oder ob sie durch die abweichende Art der Reizung herbeigeführt wurden. Für die letztere Annahme spricht, dass Gotch[53]) bei Einzelreizung (Federrheotom-Galvanometer) eine ganz ähnliche lange Dauer des Abstieges findet und beispielsw. S. 518 abbildet. In beiden Fällen, bei Gotch und mir handelte es sich um ganz unermüdete Organe, während die an dem repetirenden Rheotom geprüften Organtheile stets eine grössere Zahl von Reizungen erlitten hatten. Ich würde dieses Verhalten nicht so ausführlich erwähnt haben, hätten wir nicht in der Tiegel'schen Contractur bei direkter Reizung unermüdeter Muskeln eine vielleicht ähnliche Erscheinung.

Beobachtete man am Capillarelektrometer direkt den normalen Torpedoschlag, so erschien jeder Schlag als eine kurze zuckende Bewegung des Quecksilbermeniscus. Als nun die gleiche Beobachtung an der stark mit Veratrin vergifteten Torpedo 58 ausgeführt werden sollte, trat nach den ersten Nervenreizungen der Organtheile, welche vom Lobus electricus vor der Vergiftung durch Nervendurchschneidung getrennt waren, statt der zuckenden Bewegung der Quecksilbersäule eine jedenfalls länger als eine Secunde andauernde Erhebung derselben ein, die nur langsam zurückging. Nach wenigen Reizungen war die Erregbarkeit völlig erloschen. Erwähnt sei hier noch, dass auf der rechten Seite, an welcher der Lobus electricus nicht ausgeschaltet war, jede Reaction auf die Reizung ausblieb.

Diese Erscheinung der ausgesprochensten Aenderung des Schlagverlaufes konnte ich nun an drei verschiedenen mit Veratrin vergifteten Torpedos am Capillarelektrometer beobachten und durch dazwischen vorgenommene Experimente bei normalen Thieren an

*) Die Capillarelektrometer-Curven wurden bei einer kälteren Aussentemperatur (Dezember) aufgenommen, als die meisten Rheotomcurven, die zuletzt am Rheotom gewonnenen Curven (Prot. S. 351 fgde.) zeigen zum Theil auch jenen gedehnteren Ablauf, wie er am Capillarelektrometer sich darbot. Dass die absoluten Werthe der elektromotorischen Kraft an den Capillarelektrometer-Curven niedriger sind als an den Rheotomcurven, dürfte aus der Art der Ableitung zu erklären sein.

der gleichen Stelle der Capillare mich von der Richtigkeit jener Unterschiede überzeugen. Von den Beweisstücken für jene auffallende Erscheinung ist wohl Curve 1a und b, Tafel III die überzeugendste. Der Schlag der mit 7 cbctm einer Veratrinlösung 1:500 vergifteten Torpedo 57 beginnt wie bei normalen Thieren 0,004 Secunde nach der Reizung, um binnen 0,003″ sein Maximum (5 Daniell) zu erreichen, sinkt dann langsam etwas ab (langsamer als normal), so dass er nach 0,044″ noch 1,78 Daniell entspricht, zu einer Zeit, wo der normale Schlag bereits längst vorüber ist. Statt aber noch weiter abzusinken, steigt nun die elektromotorische Kraft des Organes wieder langsam an, um am Ende der Platte bis zu 2,76 Daniell zu gelangen und voraussichtlich noch weiter zu steigen. Jedenfalls gab das veratrinisirte Organ 0,160″ nach der Reizung noch in dem von ihm abgeleiteten Stromkreis eine elektromotorische Kraft von 2,76 Daniell, während beim normalen Organ bei der gleichen Untersuchungsmethode nach 0,027″, 0,030″, 0,040″ bereits der Schlag zu Ende war, und vom Organ, abgesehen von einem verschwindend kleinen Schlagrest, kein Strom erhalten werden konnte (vergl. die normalen Schläge Nr. 2, Tafel III; Nr. 9, Tafel III; Nr. 28, Tafel IV). Als mehrere Stunden nach der Präparation nochmals der Schlag eines Organstückes der linken Seite von Torpedo 57 aufgenommen wurde, ergab sich folgender in Nr. 8 a und b Tafel III dargestellter Schlagverlauf. Nach einem normalen Ansteigen, allerdings zu einem absolut niedrigen Werthe von 2,7 Daniell, erfolgt zunächst ein rasches Absinken der elektromotorischen Kraft bis nahezu auf 0 bei 0,050″. Von hier beginnt nun wieder ein secundärer Anstieg, welcher am Plattenende 0,160″ nach der Reizung 0,26 Daniell beträgt. Hervorgehoben sei, dass dieses secundäre Ansteigen an normalen Nerv-Organpräparaten nie beobachtet werden konnte. Zwischen den beiden, soeben beschriebenen Veratrincurven von Torpedo 57 steht die von einem anderen sehr stark mit Veratrin vergifteten Thier (Torpedo 58), von dem, wie erwähnt, ein Organtheil der linken Seite bereits zu direkter Beobachtung verwendet worden war. Die Einsenkung geht hier (Curve 7a und b, Tafel III) nur bis auf 0,27 Daniell herab und steigt bis zum Ende der Platte, 0,160″ nach der Reizung bis auf 0,82 Daniell, um voraussichtlich noch weiter anzusteigen.

Eine etwas andere Form der Veratrincurve wurde bei der Torpedo 60 gefunden. Figur 14 Tafel IV ist die Construction einer

zur direkten Wiedergabe nicht geeigneten Curve. Erst 0,020″ nach der Reizung wird hier das Maximum der elektromotorischen Kraft erreicht, während sich dasselbe sonst spätesten 6—7 tausendstel Secunde nach der Reizung findet. Der Abfall ist ein äusserst allmähliger, so dass 0,100″ nach der Reizung die elektromotorische Kraft noch 3,6 Daniell beträgt. Ein zweiter Anstieg wurde bis zu diesem Punkte nicht beobachtet.

Der beschriebenen ganz ähnliche Curven ergeben sich an einem anderen Organtheil derselben Seite bei drei hinter einander auf einer Platte gemachten Aufnahmen (Tafel V, 13 und 13_{I}, 13_{II}, 13_{III}). Ob die mit 13_{I} Tafel V bezeichnete Curve thatsächlich die zuerst verzeichnete war, lässt sich nicht beweisen, erscheint aber höchst wahrscheinlich, da sie sowohl den höchsten Gipfel als auch die längste Dauerwirkung aufweist. Jede der folgenden Curven 13_{II} und 13_{III} (Tafel IV) zeigt eine Abnahme der Schlaghöhe, eine Erscheinung, die auf die rasche Ermüdung des veratrinisirten Organs zu beziehen wäre.

Fassen wir die beobachteten wesentlichen Erscheinungen am veratrinisirten elektrischen Organ kurz zusammen: Wie am Galvanometer zu erkennen war, verliert das elektrische Organ durch Veratrin sehr rasch seine Erregbarkeit. Besonders leicht trat dieses ein, wenn das Organ während der Vergiftung mit dem Lobus electricus noch in Verbindung blieb. War die Erregbarkeit bei der Galvanometerprüfung noch nicht geschwunden, so bot jetzt das elektrische Organ das Bild einer auffallend raschen Ermüdbarkeit dar, die es unmöglich machte, am repetirenden Rheotom etwas über den Schlagverlauf zu erfahren. Dieses letztere gelang bei der einmaligen Reizung am Capillarelektrometer und hier zeigte sich, dass an Stelle der normalen rasch verlaufenden Schläge eine äusserst langgedehnte, namentlich am vorher noch nicht gereizten Organ sehr mächtige Elektricitätsentwickelung trat, die in ihrem zeitlichen Verlauf, insbesondere durch den häufig auftretenden secundären langgestreckten Anstieg grosse Aehnlichkeit mit den von veratrinisirten Muskeln verzeichneten „Zuckungscurven“ darbot.

Ist bis jetzt systematisch die elektrische Erscheinung, welche die Contraction eines Veratrinmuskels begleitet, noch nicht beobachtet worden, so ist doch zu vermuthen, dass ebenso wie der zeitliche Ablauf der Muskelzusammenziehung, so auch der Verlauf der dieselben begleitenden elektrischen Erscheinungen grosse Aehn-

lichkeit mit dem Schlag des veratrinisirten elektrischen Organes darbieten wird. Es ist dieses um so wahrscheinlicher, als durch FICK und BÖHM am Veratrinmuskel auf Grund einer stärkeren Wärmebildung auf eine grössere Intensität der chemischen Prozesse geschlossen werden konnte.

Jedenfalls sind sowohl im elektrischen Organ wie im Muskel für das Veratrin bestimmte Angriffspunkte vorhanden, von denen aus einmal die Contractionsform des Muskels, das andere Mal der Schlagverlauf ganz ähnliche Abänderungen erfährt. Dass diese Angriffspunkte einmal in der muskulären, das andere Mal in der nervösen Substanz liegen sollen, erscheint nach den oben genannten Beobachtungen der Wirkungslosigkeit des Veratrins auf den Nervenstamm unwahrscheinlich, doch ist zu bedenken, dass nach den Untersuchungen FICK's und BÖHM's eine Empfindlichkeit der motorischen Endplatten gegen Veratrin wahrscheinlich vorhanden ist.

Ehe hier weitere Schlüsse zu ziehen sind, wird es nothwendig sein, die Veratrinwirkung auf das elektrische Organ mit vervollkommneten Hilfsmitteln erschöpfend zu untersuchen, zugleich aber auch Versuche in der Richtung anzustellen, inwieweit marklose Nerven und Nervenendigungen von dem Veratrin verändert werden.

Anhangsweise sei noch kurz erwähnt, dass es mir gelang, mit dem Capillarelektrometer eine reflectorische Entladung einer kräftigen ruhig in Seewasser liegenden Torpedo photographisch zu verzeichnen. Die Ableitung erfolgte bei diesem Versuche von einer auf dem Bassinboden liegenden Zinkplatte und einer kurz vor der Aufnahme auf den Rücken des Organes aufgesetzten Zinkscheibe. Unpolarisirbare Elektroden liessen sich zu diesem Versuche nicht verwenden. Bereits bei jeder Berührung des Thieres, oft auch beim Aufsetzen der Zinkscheibe auf den Rücken, konnte man direkt das Zucken der Quecksilbersäule beobachten. Sehr starke Excursionen des Quecksilbers wurden insbesondere beim Kneipen des Thieres mit einer Pincette erhalten. Die Schwierigkeit der Verzeichnung der Schläge bestand darin, dass im richtigen Zeitmoment nach Loslassen des Pendels das Thier durch Kneipen mit der Pincette gereizt werden musste, so dass der Schlag gerade während des Vorbeischwingens der Platte erfolgte. Nach etwa 10 vergeblichen Aufnahmen, bei denen der Schlag entweder vor oder nach dem Vorbeischwingen der Platte auftrat, gelang es mir, eine vollständige Entladung zu verzeichnen. Dieselbe ist in

Fig. 10a und b Tafel IV wiedergegeben. Auf der photographischen Aufnahme zeigt sich, dass fast vom Beginn der Platte an ein schwaches Sinken der Quecksilbersäule *H* erfolgte. Der diesem entsprechende Strom ist voraussichtlich durch das Aufsetzen der Zinkplatte auf den Rücken des Thieres hervorgerufen. Der Anstieg des Quecksilbers, welcher verhältnissmässig wenig steil erfolgt, zeigt nun deutlich 6 Wellen. Die Gesammtdauer des Anstiegs ist wesentlich länger, als bei einem durch Nervenreizung hervorgerufenen Einzelschlag. Die abgeleitete Curve 10b zeigt nun, dass es sich um ein sechsmaliges Anwachsen der elektromotorischen Kraft handelt, zwischen denen in verhältnissmässig kurzer Zeit eine merkliche Abnahme erfolgte. Die absoluten Werthe der in dem Stromkreis auftretenden elektromotorischen Kräfte sind in Folge der guten Nebenschliessung durch das Seewasser und den ganzen Thierkörper äusserst niedrig zwischen, 1—2 Daniell. Wenn die Elektrometercurve hinreichend Gewähr für die strenge Genauigkeit bieten würde, wäre noch hinzuzusetzen, dass jeder folgende Einzelschlag sich gleichsam auf den vorausgegangenen aufsetzt, wie bei einem unvollständigen Tetanus des Muskels bei den ersten Reizungen jede folgende Zuckung eine grössere Höhe erreicht. Die Intervalle der als Einzelschläge aufzufassenden Erhebungen betragen der Reihe nach 12, 10, 8, 12, 12 tausendstel Secunde.

Dieser Befund steht in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen Schoenlein's am Schreibtelephon. Derselbe konnte an diesem äusserst empfindlichen Instrument zeigen, dass die Entladung der Torpedo bald aus einzelnen Schlägen, bald aus Schlaggruppen von 2—5 Schlägen sich zusammensetzte. Bei letzteren schwankten die Intervalle von 1″ bis zu 0,017″. Doch konnte Schoenlein bei Schlaggruppen von 24 Schlägen noch viel engere Abstände einmal beobachten, die bis auf 0,0051″ heruntergingen.

Gotch und Burch[15]) haben beim Malapterurus ebenfalls Reflexentladungen mit dem Capillarelektrometer aufzeichnen können, doch scheinen hier die Verhältnisse etwas anders zu sein.

Die Reflexentladungen bestanden beim Zitterwels aus Schlaggruppen, von denen 3—12 in der Secunde auftraten (reflex or central rythm.). Jede dieser Schlaggruppen setzte sich wieder aus einer Reihe Einzelschlägen zusammen, die sich in Intervallen von ca. 0,006″ folgten, doch schien hier jeder folgende Schlag durch den vorhergegangenen hervorgerufen zu sein (Reizung des Organs

durch seinen eigenen Strom), da eine solche Gruppe bei einmaliger Reizung des Nerven am Nervorganpräparat ebenfalls erhalten wurde (peripheral organ rythm.).

Zusammenfassung.

Ueberblicken wir kurz die Resultate, wie sie sich aus dem Verhalten des degenerirenden, des curarisirten und des veratrinisirten elektrischen Organs ergaben. Nach der Nervendurchschneidung wurde das Organ nahezu gleichzeitig bei indirekter und direkter Reizung unerregbar. Zugleich verschwand die sogenannte Irreciprocität des Widerstandes und der beim Erhitzen des Organs sonst auftretende sehr kräftige Organstrom. Als Nebenbefund bei der Nervendurchschneidung ergab sich, dass ebenso wie die motorischen Ganglienzellen der Vorderhörner, so auch die Ganglienzellen des Lobus electricus degenerative Veränderungen erleiden. Zweitens fand sich, dass auch an den zu dem elektrischen Organ führenden Nerven jene von BETHE beschriebene Unfärbbarkeit des Axencylinders, gleichzeitig mit dessen Unerregbarkeit auftrat. Endlich zeigte sich, dass trotz der Nervendurchschneidung und völliger Unerregbarkeit des elektrischen Organes mikroskopisch noch keine Veränderungen an der Nervenendausbreitung oder an dem sarkoplastischen Theile des Organes zu beobachten waren. Erst sehr spät, 37 Tage nach der Durchschneidung, konnten an einem Torpedoorgan die ersten Anzeichen einer degenerativen Veränderung der Nervenendausbreitung beobachtet werden, während die Erregbarkeit am 20. Tage ausnahmslos an den elektrischen Organen geschwunden war.

Die Curarevergiftung ergab bei hohen Dosen eine vollständige Unerregbarkeit ebenso bei indirekter wie direkter Reizung. Zugleich war auch, wie bei den degenerirenden Organen, die Irreciprocität des Widerstandes und der beim Erhitzen auftretende Organstrom verschwunden. Im Gegensatz zu allen früheren Curareversuchen wurden die beschriebenen Experimente nach Nervendurchschneidung ausgeführt und somit der Einfluss einer Ermüdung des Organes ausgeschaltet. Für die Wahrscheinlichkeit, dass bei niedrigeren Dosen das Organ nicht curarisirt, sondern nur stark ermüdet war, sprach die ausgeprägte Steigerung der Reflexthätigkeit, wie sie nach schwacher Curarisirung eintrat.

Durch fortgesetzte Reizung des Nerven eines normalen Nerv-Organpräparates konnte gezeigt werden, dass sich das Organ mehrfach, aber in immer schwächerem Maasse, nach einer erschöpfenden Reizung wieder erholte. War es nach vielfachen Reizungen vom Nerven aus völlig unerregbar geworden, d. h. blieb trotz einer Ruhepause jede Reaction bei der Nervenreizung aus, so war auch das Organ „direkt" völlig unerregbar.

Veratrin erwies sich als ein sehr starkes Gift für das elektrische Organ. Dass überhaupt die Torpedos für Veratrin sehr empfänglich sind, bewiesen die von Herz und Stammesmuskulatur verzeichneten, äusserst typischen „Veratrincurven". Die Wirkung auf das electrische Organ war folgende: Es trat sehr häufig schon bei kleinen Dosen völlige Unerregbarkeit des Organs für indirekte wie auch direkte Reizung auf. Das Organ wurde leichter unerregbar, wenn dasselbe während der Vergiftung mit dem Lobus electricus in Verbindung blieb. Eine schwächere Vergiftung äusserte sich am Rheotom und Galvanometer in einer äusserst raschen Ermüdbarkeit des Nervorganpräparates, die eine Feststellung des Schlagverlaufes mit jenen Mitteln unmöglich machte. Durch Anwendung des Capillarelektrometers gelang es, mit Sicherheit zu beobachten und an den Photographien der Schlagcurven nachzuweisen, dass bei der Entladung des veratrinisirten Organes nach der Nervenreizung, an Stelle des äusserst rasch ablaufenden Schlages, eine lange anhaltende Elektricitätsentwickelung tritt, die graphisch verzeichnet eine ganz ausgesprochene Aehnlichkeit mit den Veratrinmuskelcurven zeigt.

Wie in der Einleitung geschildert war, wurde von den einen Forschern der muskuläre, von den anderen der nervöse Theil der Platte für die Elektricitätsentwickelung verantwortlich gemacht. Für den muskulären Theil trat namentlich du Bois-Reymond ein, zu Gunsten der electromotorischen Wirksamkeit der nervösen Abtheilung sprachen die Angaben Burdon-Sanderson's, Gotch's und Burch's und auch Schoenlein's in dessen letzter Arbeit. Doch betonen die letzteren Autoren, dass auch der muskuläre Theil der elektromotorisch wirksame sein könnte, bei der direkten Reizung aber immer nur der nervöse Theil gereizt werde (wegen der auch bei direkter Reizung vorhandenen Latenzzeit). Der muskuläre Theil sei elektrisch unerregbar, da sonst die Organantwort bei „direkter" Reizung die Complication einer Doppelerregung erkennen lassen müsste.

Die elektrischen Erscheinungen, welche nach der Veratrinvergiftung des Organes auftraten, sprachen nun zunächst dafür, dass der electromotorisch wirksame Bestandtheil der Platte muskulären Ursprungs wäre. War doch der Schlagverlauf durch das Veratrin ganz in derselben Weise verändert, wie der Contractionsablauf am quergestreiften Muskel. Andererseits hatten nun aber die Versuche nach Nervendurchschneidung und nach Curarevergiftung gezeigt, dass der elektromotorisch wirksame Bestandtheil in den Nervenendigungen selbst liegen, oder mit diesen in einem viel innigeren Verhältnis stehen müsste, als dies zwischen motorischer Endplatte und Muskel der Fall ist.

Dieser Gegensatz zwischen den Resultaten der Veratrinvergiftung und den der Degenerationsversuche veranlasste mich, die oben erwähnten Angaben über die Wirkung des Veratrins auf den Nervenstamm einer experimentellen Prüfung mit Hilfe des Capillarelektrometers zu unterziehen. Die hier in Betracht kommenden Ergebnisse jener Untersuchung, die binnen Kurzem in PFLÜGER's Archiv veröffentlicht wird, sind folgende:

Veratrin in schwacher Lösung auf den marklosen Nerven gebracht, entfaltet an diesem seine für den Muskel charakteristische Wirksamkeit. Hatten die Beobachtungen des mit Veratrin vergifteten elektrischen Organes am Galvanometer gezeigt, dass in diesem Zustande das Organ schon nach wenigen Reizen ermüdete, so konnte jetzt am marklosen Nervus olfactorius des Hechtes bei Veratrinvergiftung eine rasche Abnahme der negativen Schwankung beobachtet werden, wenn auf den Nerven eine Reihe von Reizen einwirkte. Insbesondere aber erfuhr der Ablauf der negativen Schwankung am veratrinisirten Riechnerven ganz die gleichen Veränderungen, wie der Schlagverlauf des elektrischen Organes nach Veratrinvergiftung. Auch darin stimmen elektrisches Organ und marklose Nerven überein, dass bei Einwirkung einer verhältnissmässig noch schwachen Veratrinlösung in beiden Gebilden die Erregbarkeit, soweit sie sich durch die elektrischen Erscheinungen zu erkennen giebt, völlig verschwindet.

Nach diesen Erfahrungen löst sich der oben angedeutete scheinbare Widerspruch in der einfachsten Weise. Alle am elektrischen Organ des Zitterrochens beobachteten Erscheinungen stehen jetzt mit der Annahme im Einklang, dass die Nervenendausbreitung

selbst oder ein funktionell innig mit dieser verbundenes Gebilde, das elektromotorisch Wirksame im elektrischen Organ der Zitterrochen darstellt. Insbesondere ist es die nach der Nervendurchschneidung rasch auftretende indirekte und direkte Unerregbarkeit des Organes, welche die früher viel vertretene Annahme des muskulären Ursprungs der elektromotorisch wirksamen Bestandtheile zu einer sehr unwahrscheinlichen machen.

Die Ausführung der vorliegenden Untersuchung wurde mir dadurch ermöglicht, dass das Kgl. Sächsische Ministerium des Cultus und öffentlichen Unterrichtes mir einen Arbeitsplatz an der Zoologischen Station von Neapel überliess und die Medicinische Facultät der Universität Leipzig mir das Kregel-Sternbach'sche Reisestipendium verlieh. Sowohl der Medicinischen Facultät der Universität Leipzig, wie dem Kgl. Sächsischen Ministerium des Cultus und öffentlichen Unterrichtes möchte ich an dieser Stelle hierfür meinen ehrerbietigsten Dank aussprechen.

Versuchs-Protokolle.

Allgemeine Beschreibung der Rheotom-Versuche.

Sowohl bei der Nervenreizung wie bei der „direkten" Reizung des Organes wurde das von Schoenlein*) modificirte Bernstein'sche Rheotom verwendet.

Die Einrichtung des Apparates ist ausser von Schoenlein (s. o.) in der Dissertation von Wapler**) ausführlicher beschrieben worden. Auch Fuchs***), welcher mit dem Rheotom den zeitlichen Verlauf des Erregungsvorganges im marklosen Nerven bestimmte, giebt eine kurze Schilderung der vorzüglich arbeitenden Contacteinrichtungen. Unter Hinweis auf die obengenannten Autoren kann ich mich daher hier in der Beschreibung auf das Allernothwendigste beschränken.

Abweichend von den früher meist benutzten Contacten verwendete ich zur Schliessung des Bussolkreises einen von Schoenlein

*) Schoenlein Pflüger's Archiv, Bd. 45. 1889. S. 134 f.

**) Wapler, Beiträge zur Kenntniss der tetanischen Erregungsvorgänge im Froschmuskel. Würzburg 1890. Inauguraldissert.

***) Fuchs, Ueber den zeitlichen Verlauf des Erregungsvorganges im marklosen Nerven. Sitz.-Ber. d. Wiener Akademie 1893—94. 3. Abth., S. 207.

schon länger construirten, in seiner Untersuchung über Torpedo näher beschriebenen*), sehr sicher arbeitenden Platincontact an. In folgender kleiner Tabelle gebe ich eine Versuchsreihe wieder, welche zeigt, wie genau dieser Contact bei anhaltendem Gang des Rheotoms arbeitete. Mit dem Contact wurden in den Bussolkreis, bei einem sehr grossen Abstande der Galvanometerrolle, 8 DANIELL'sche Elemente aufgenommen und am Galvanometer zu verschiedenen Zeiten die Ablenkung abgelesen, während das Rheotom dauernd 5 Umdrehungen in der Secunde machte.

Nach:	Ablenkung des Magneten von der Ruhelage	Nach:	Ablenkung des Magneten von der Ruhelage
1′	26 Skalentheile	12′	25,5 Skalentheile
5′	26 "	17′	26,0 "
10′	26,5 "		

Der den Schluss des Bussolkreises vermittelnde Schlüssel sei im Folgenden als Bussolschlüssel, die Schlussdauer als Bussolzeit bezeichnet. Zur Schliessung des Reizstromes diente ein Streifcontact. Ein schräg gestellter wenig nachgiebiger dicker Platinstift streift über eine auf einer Feder befindliche also etwas nachgiebige Platinbank (vgl. SCHOENLEIN s. o.). Die hierdurch herbeigeführte Schlusszeit des zur Reizung dienenden Stromes wird im Folgenden mit SCHOENLEIN kurz als Streifzeit, der Contact als Streifcontact bezeichnet.

Das Rheotom wurde von einem kleinen Elektromotor getrieben, der mit einer dem HELMHOLTZ'schen Regulator ähnlichen Vorrichtung versehen war. Bei meinen Versuchen wurde das Rheotom genau auf 5 Umdrehungen in der Secunde gehalten. Nachzählen, wie auch graphische Verzeichnung der Umdrehungszahl zeigte, dass der Regulator sehr genau arbeitete. Ein Grad der 100 theiligen Rheotomtheilung entsprach also $^1/_{500}$".

Zur Bestimmung der Bussolzeit und Streifzeit verwendete ich folgende Einrichtung. An der Stelle des festen unteren Theiles des Streifcontactes wurde eine Feder angebracht, die einen feinen Platindraht trug und der am Rheotomrad befindliche Stift des Streifcontactes senkrecht gestellt, sodass seine feine Spitze fast nur momentan den dünnen Platindraht berührte. Schaltete man nun diesen Contact, ein Element und den Bussolcontact mit einem

*) SCHOENLEIN, Ztschr. f. Biologie. XXXIII. 1894. S. 447.

Telephon*) in einen Kreis, so war ein deutliches Geräusch zu hören, so lange bei rotirendem Rheotom beide Contacte gleichzeitig geschlossen wurden. Man bestimmt nun durch Verschieben des in obiger Weise veränderten beweglichen Streifcontactes die Winkelgrösse. Die diesem Winkel entsprechende Zeit ist, da bei dem feinen Platindraht die Streifzeit ausserordentlich niedrig wird, gleich der Bussolzeit zu setzen. Die bei der Reizung in Anwendung kommende Streifzeit, welche, wie bereits Schoenlein angiebt, bei der Reizung der elektrischen Nerven nicht zu niedrig genommen werden darf, wurde nun in folgender Weise bestimmt.

Der zur Reizung dienende Streifcontact, der Bussolcontact, Telephon und 1 Element wurden in einen Stromkreis aufgenommen und bei rotirendem Rheotom die Gradstellung aufgesucht, bei welcher das Telephongeräusch beginnt und verschwindet. Die diesem Winkel entsprechende Zeit setzt sich aus der Bussolzeit plus der Streifzeit zusammen. Nach dieser Bestimmung wurde der Einfachheit der Messung halber das gleichzeitige Ende der Bussolzeit und die Mitte der Streifzeit auf eine Gradstellung (10^0) eingestellt und dieser Punkt als Nullpunkt angenommen.

Der mittlere Werth für die Bussolzeit betrug 0,5 Rheotomgrad $= {}^1/_{1000}''$. Bei der oben beschriebenen gleichzeitigen Einschaltung des Streif- und Bussolcontactes war das Telephongeräusch beispielsweise hörbar von 9,1—10,4 Grad der Rheotomtheilung. Dieser Winkel entspricht der Streifzeit plus der Bussolzeit. Die Streifzeit betrug also $0{,}8^0 = 0{,}0016''$. Von einer jeweiligen Controle dieser Bestimmungen wurde abgesehen, da die Abweichungen bei der Genauigkeit der Contacte nur gering waren und kleine Abweichungen für die vorliegende Untersuchung nicht ins Gewicht fielen.

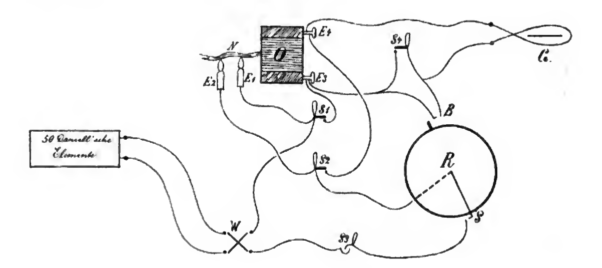
Folgende Skizze stellt die Versuchsanordnung für die Reizung vom Nerven aus, wie für die direkte Organreizung dar. (S. 316.)

Die beiden Pole von 50 hintereinander geschalteten Daniell'schen Elementen sind mit der einen Seite des Stromwenders W verbunden. Von der anderen Seite desselben führt ein Draht über den Vorreiberschlüssel S, zu der dem Nerven anliegenden unpolarisirbaren Pinselelektrode E_1', und ein zweiter Draht von

*) Aichung des Rheotoms mit dem Telephon ist von Schoenlein (s. o.) in etwas anderer Weise vorgenommen worden.

dem anderen Pol über den Vorreiberschlüssel S_3, den Streifcontact S des Rheotoms und den Vorreiberschlüssel S_2 zu der dem Nerven anliegenden Pinselelektrode E_2.

Das Organ O befindet sich zwischen den unpolarisirbaren Elektroden E_3 und E_4. Die untere Elektrode E_3 besteht aus einer quadratischen amalgamirten Zinkplatte von ca. 8 cm Seitenlänge, auf dieser liegt ein dicker mit concentrirter Zinksulfatlösung getränkter Fliesspapierbausch gleicher Grösse, darüber eine feine Thonschicht und endlich ein mit Seewasser getränkter Bausch Fliesspapier. Die obere Elektrode E_4 von gleicher Zusammensetzung besass eine Fläche von 4×6 cm. Von E_3 führt ein Draht zur Bussolleitung B. An dieser ist für dauernde Schliessungen die Verbindung nach S_4 abgezweigt. Endlich führt ein Draht von B



zum Galvanometer G. Als solches dient nach SCHOENLEIN (a. a. O.) eine nach dem HERMANN'schen Modell gebaute von PLATH bezogene Bussole. Sie ist in den vorliegenden Versuchen nahezu aperiodisch gemacht, und die Fallzeit des Magneten aus maximalen Ablenkungen beträgt etwa 2″. An der Bussole wird der Strom, wenn in den Protokollen nichts besonderes bemerkt ist, durch eine Rolle von 5000 Windungen geschickt, welche vom Magneten um 7,5 cm von der Stelle der grössten Annäherung entfernt ist. Vom Galvanometer führt schliesslich ein Draht nach der oberen Organelektrode E_4.

Für „direkte“ Organreizung sind die Elektroden E_1 und E_2 ausser Thätigkeit gesetzt, und der Strom wird durch Schliessung von S_1 und S_2 den Organelektroden zugeleitet, welche jetzt, ausser als Reizelektroden, dazu dienen, kurze Zeit nach der Reizung, wie

früher bei der Nervenreizung, den Organstrom nach dem Galvanometer zu leiten. Als Organstück wird nach Du Bois-Reymond, Schoenlein u. a. ein schmaler Organstreifen in ein Glasrohr von 1 cm Durchmesser und 5 cm Länge eingezogen und mit Seewasser und Seesalzthon abgeschlossen zwischen die Elektroden gebracht. Das von mir verwendete Glasrohr besitzt einen doppelten Mantel, der es möglich macht, durch Umspülen mit verschieden temperirtem Wasser das Organ unter verschiedenen Temperaturen zu untersuchen.

Die zu den Rheotom-Versuchen dienenden Nerv-Organpräparate werden in der Weise hergestellt, dass den Thieren, denen auf der einen Seite bereits vor einer bestimmten Zahl von Tagen die elektrischen Nerven durchschnitten waren, die Nerven der intakten Seite und Weichtheile zwischen Gaumen und Rücken mit einem Scheerenschlage nahe am Schädel durchschnitten werden. Dann präparirt man beiderseits die langen glatten zwischen den Kiemen verlaufenden Nervenstämme bis zu den Organen heraus, umschneidet das Organ und zerlegt es nach Maassgabe der Innervationsgebiete der Nervenstämme in 4 Theile, wobei man Rücken- und Bauchhaut auf dem Organ belässt.

Während der heissen Tage werden die Präparate bis zum Versuche in einem durch Leitungswasser gekühlten Gefässe aufbewahrt. Die am Kopf der folgenden Tabellen hinter *ED* stehenden Zahlen entsprechen der Elektrodendistanz in cm. Wegen der auffallenden Grösse der benutzten Distanzen sei auf die Untersuchungen Schoenlein's verwiesen, dessen Resultaten ich in dieser Beziehung nur beipflichten kann.

Es braucht hier wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden, dass der aus zahlreichen Einzelbeobachtungen am Rheotom construierte Schlagverlauf nicht dem Schlag eines völlig unermüdeten Organes entsprechen kann. Eine derartige Construction des Schlages würde nur angenähert dem Schlage eines im mittleren Ermüdungszustande befindlichen Organes gleichen. Doch sei hervorgehoben, dass, wie die unten mitgetheilten Ermüdungsversuche ergaben, das Organ bei fortgesetzter Reizung, abgesehen von einer Zahl stärkerer Schläge, im Beginn der Reizung eine sehr lange Reihe von Schlägen liefert, deren Gesammteffect wenigstens auf die Bussole gleich bleibt. Bei der Reizung am Rheotom wurden aber zur Bestimmung des Schlagverlaufs nur kurze Reizungen von ungefähr

je 2 Secunden Dauer (gleich 10 Reize) angewendet, so dass bei etwa 20 Einzelbestimmungen nur ungefähr 200 Reize das Organ trafen, während bei Ermüdungsversuchen meist viel länger, mindestens bis zum 500. Reiz die Gesammtwirkung auf das Galvanometer sich nahezu constant hielt. Endlich ist auch noch zu berücksichtigen, dass zwischen jeder Reizperiode von etwa zwei Secunden Dauer ungefähr $^1/_2$ Minute verstrich, bis die Notirung der Ablenkung und die neue Einstellung des Reizcontactes am Rheotom ausgeführt war. Bei der, wenn auch nur geringen Erholungsfähigkeit des ausgeschnittenen Organes (s. u.) dürfte auch dieser Umstand bei der Bestimmung des Schlagverlaufs am Rheotom das Auftreten der Ermüdung verzögert haben.

Jedenfalls konnte ich in vielen Fällen in Protokollen Versuche mittheilen, bei denen eine zweite Prüfung des gleichen Organtheils keine wesentlich anderen Ordinatenwerthe lieferte, wie sie sich bei der ersten Prüfung ergeben hatten.

In allen hier mitgetheilten Rheotomversuchen musste zur Bestimmung einer jeden Galvanometerablenkung etwa 2 Secunden lang gereizt werden. Zwischen jeder Bestimmung liegt ungefähr ein Zeitraum von $^1/_2$ Minute, wie er zur Notirung des Reizerfolges und der neuen Einstellung erforderlich ist.

Torpedo 20, ocellata, mittelgross, links I., II. und IV. Nerven durchschnitten den 7. 10., getötet den 19. 10., also 12 Tage nach Durchschneidung.

Reizung des elektrischen Organes vom Nerven aus.

Reizung des I. Nerven rechts (normal). *ED**) = 1,8 cm.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
1,0	0	0	5,0	35	30	10,0	32	21
1,5	12	0	6,0	60	67	12,0	7	6
2,0	75	0	7,0	80	35	14,0	1	8
3,0	70	0	8,0	51	23	16,0	2	0
4,0	66	4						

*) *ED* = Elektrodendistanz am Nerven.

Reizung des I. Nerven links (operirt). $ED = 1{,}8$ cm.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
12,0	0	0	11,0	0	0	9,75	— 0,5	+ 0,5
13,0			10,5			10,0	— 1	+ 1
14,0								
Derselbe neu aufgelegt.								
12,0	0	0	13,0	0	0			
11,0			15,0					
Reizung des IV. Nerven links (operirt). $ED = 2$ cm.								
2,0	3	0				2	0	0
3,0	17	0	2,0	3	0	3	3	0
4,0	24	0	1,5	0	0	4	3	0
5,0	5	0	2,5	7	0	5	1	0
6,0	6	1	3,0	16	0	6	0	1
8,0	1	2	4,0	13	0	8	0	0
10,0	0	0				10	0	0
Reizung des II. Nerven links (normal). $ED = 1{,}8$ cm. Organstück sehr schmal.								
1,0	0	0	4,0	102	4	8,0	13	7
1,5	5	0	5,0	95	36	10,0	24	7
2,0	64	0	6,0	5	77	11,0	15	17
3,0	114	0	7,0	3	19	12,0	3	0
Reizung des III. Nerven links (operirt). $ED = 2{,}0$ cm.								
1,5	0	0	5,0	0	0	6,0	0,5	0
2,0	4	0	8,0	0	0	4,0	4	1
3,0	14	2	10,0	0	0	3,0	8	1
4,0	10	3				2,0	1	0

Direkte Reizung des elektrischen Organes.

Organstück vom I. Nerven links (operirt) innervirt.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes	
	homo.*)	hetero.*)		homo.	hetero.		homo.	hetero.
4,0	0	0	2,0	2	3	0,5	$-x$	$+x$
3,0	1	0,5	1,0	— 2	+ 3			

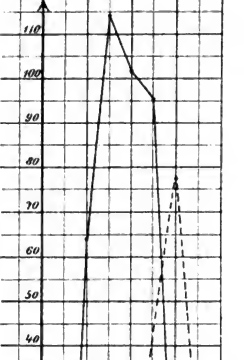
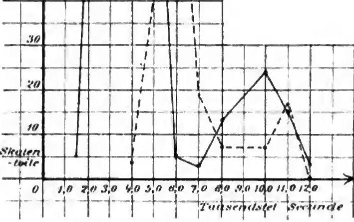
*) homo. / hetero. Abkürzungen für homodrom. / heterodrom.

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° geht die Skala noch, aber sehr langsam aus dem Gesichtsfeld (in + Richtung).

Organstück von der Grenze des Innervationsgebietes des I. und II. Nerven links.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes	
	homo.	hetero.
4,0	0	0
3,0	7	4
2,0	28	27
1,0	— 3	+ 16
0,5	— x	+ x

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung des Organstückes mit Wasser von 59° geht die Skala rasch, 7 Secunden nach Beginn der Umspülung aus dem Gesichtsfeld (in + Richtung).

Schlagverlauf bei Nervenreizung von Torpedo 20.
Reizung des II. Nerven links (normal).
——— / - - - - } Schlagverlauf { bei absteigender / bei aufsteigender } Durchströmung des Nerven.

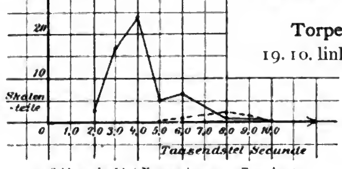
Organstück vom IV. Nerven links (operirt) innervirt.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes	
	homo	hetero.		homo.	hetero.		homo.	hetero.
6,0	0	0	3,0	34	29	1,0	12	15
4,0	7	3	2,0	54	56	0,5	— x	+ x

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung des Organstückes mit Wasser von 58° geht die Skala 7 Secunden nach Beginn der Umspülung aus dem Gesichtsfeld.

Die Organstücke des Torpedo 20, deren zugehörige Nerven 12 Tage zuvor durchschnitten worden waren, gaben bei Reizung vom Nerven aus theils gar keinen, theils nur einen sehr schwachen Strom, und zwar zeigte sich im letzteren Fall, dass die centralwärts durchschnittenen Nerven bei aufsteigendem Reizstrom so gut wie gar keinen, bei absteigendem Reizstrom einen etwas stärkeren Schlag des Organes auslösten.

Direkte Organreizung hatte bei dem vom Nerven aus nicht mehr erregbaren Organtheil einen sehr schwachen, bei dem vom Nerven noch erregbaren Organtheil einen etwas stärkeren Schlag im Gefolge. Die Erwärmung des am schwächsten direkt erregbaren Organtheiles trieb bei dauerndem Bussolschluss die Skala am langsamsten aus dem Gesichtsfeld.



Schlagverlauf bei Nervenreizung von Torpedo 20
Reizung des IV. Nerven links (12 Tage durchschnitten).
Schlagverlauf {bei absteigender / bei aufsteigender} Durchströmung des Nerven

Torpedo 32, ocellata, gross, den 19. 10. links alle Nerven durchschnitten, den 20. 10. 15 cbcm einer 5%igen Curarelösung in die rechte erste Kiemenarterie etwa innerhalb einer halben Stunde eingespritzt.

Reizungen des elektrischen Organes vom Nerven aus.

Reizung des III. Nerven links (durchschnitten). *ED* = 1,8.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
1,5	0	0	3,0	42	0	5,0	11	2
2,0	3	0	4,0	44	0	6,0	2	22

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
7,0	0	24	10,0	2	0	12,0	0	0
8,0	0	4						

Reizung des III. Nerven rechts nicht durchschnitten. $ED = 1{,}8$.

2,0			5,0	0	0	8,0	0	0
3,0	0	0	6,0			10,0		
4,0								

Reizung des I. Nerven rechts nicht durchschnitten. $ED = ?$

3,0	0	0	6,0	0	0	10,0	0	0
4,0			8,0					

Reizung des I. Nerven links (durchschnitten). $ED = 1{,}2$ cm.

2,0	0	0	4,0	14	0	8,0	0	2
2,5	7	0	5,0	3	0	10,0	1	0
3,0	19	0	6,0	1	3	11,0	1	0
3,5	20	0	7,0	0	8			

Direkte Reizung des elektrischen Organes.

Organstück vom IV. Nerven rechts (nicht durchschnitten) innervirt.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes	
	homo.	hetero.		homo.	hetero.		homo.	hetero.
0,5	$-x$	$+x$	2,0	0	0	4,0	0	0
1,0	-2	$+3$	3,0			6,0		
1,5	0	0						

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° tritt sehr langsam eine Ablenkung von + 3 Skalentheilen auf, die nach 1 Minute wieder verschwindet.

Organstück vom I. Nerven links (durchschnitten) innervirt.

0,5	$-x$	$+x$	2,0	$+15$	$+19$	5,0	$+6$	$+1$
1,0	$+4$	$+22$	3,0	$+14$	$+10$	6,0	$+1$	0
1,5	$+2$	$+4$	4,0	$+7$	$+3$			

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° beginnt nach 10 Secunden eine Ablenkung,

die nach 1 Minute mit 256,5 Skalentheilen ihr Maximum erreicht hat und dann langsam zurückgeht.

Organstück vom III. Nerven rechts (nicht durchschnitten) innervirt.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Organes	
	homo.	hetero.		homo.	hetero.		homo.	hetero.
0,5	— x	+ x	2,0		+ 0,5	10,0	0	0
1,0	— 10	+ 10	3,0	0	0	20,0		
1,5	— 0,5	+ 0,5	4,0					

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° wird nach 1 Minute eine Ablenkung von + 3 Skalentheilen erreicht.

Die Organstücke des Torpedo 32, welche von der rechten Seite stammten, deren Nerven also intakt waren, waren weder indirekt noch direkt reizbar und gaben beim Erhitzen so gut wie keinen Strom. Dagegen gaben die Organstücke der linken Seite, deren Nerven also durchschnitten waren, bei indirekter und direkter Reizung noch einen schwachen Strom, desgleichen bei der Erhitzung. Da das Curare in die erste rechte Kiemenarterie gespritzt, das rechte Organ also stärker betroffen wurde, so ist die Deutung des Versuches zunächst unsicher.

Torpedo 21, ocellata, mittelgross, den 9. 10. 98 I., III. und IV. Nerven links durchschnitten, den 25. 10. getötet, also 16 Tage nach Durchschneidung.

Reizungen des elektrischen Organes vom Nerven aus.

Reizung des I. Nerven rechts undurchschnitten. $ED = 1{,}7$.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach, Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
2,0	4	0	3,0	81	0	4,5	36	3
2,5	26	0	4,0	56	1	5,0	10	27

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
6,0	6	61	10,0	4	2	4,0	59	0
7,0	12	34	12,0	2	4	6,0	3	33
8,0	13	5						
Reizung des I. Nerven links durchschnitten. $ED = 1,7$.								
2,0	0	0	5,0	5	1	8,0	1 (?)	2
3,0	4	10	6,0	2	0	10,0	0	0
4,0	8	3						
Reizung des IV. Nerven links durchschnitten. $ED = 2,0$.								
3,0	0	0	6,0	24	2	10,0	3	2
3,5	5	0	7,0	5	10	11,0	2	3
4,0	27	1	8,0	6	8	14,0	0	0
5,0	42	3	9,0	8	8			
Reizung des III. Nerven links durchschnitten. $ED = 1,8$.								
3,0	0	0	6,0	38	2	10,0	6	7
4,0	24	1	7,0	17	15	12,0	3	7
5,0	33	0	8,0	10	22	14,0	1	4
Reizung des II. Nerven links (undurchschnitten). $ED = 1,7$.								
2,5	0	0	5,5	19	18	9,0	22	3
3,0	8	0	6,0	9	45	10,0	17	2
4,0	105	0	7,0	5	67	12,0	6	12
4,5	77	0	8,0	15	16	14,0	1	2
5,0	47	2						
Reizung des I. Nerven links wiederholt (s. o.) (durchschnitten). $ED = 1,8$.								
1,5	0	0	4,0	2	5	6,0	0	0
2,0	0	1	5,0	3	2	8,0	0	0
3,0	0	3						

Direkte Reizung des elektrischen Organes.

Organstück vom I. Nerven links innervirt (durchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden.	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden.	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes	
	homo	hetero.		homo.	hetero.		homo	hetero
0,5	$-x$	$+x$	2,0	+ 19	+ 13	4,0	+ 2	+ 1
1,0	+ 4	+ 6	3,0	+ 10	+ 6	5,0	0	0

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° beginnt nach 4'' eine Ablenkung, deren Maximum ca. 330 Skalentheile beträgt und die nach 1½' schwindet.

Anderes Organstück vom I. Nerven links innervirt (durchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes	
	homo.	hetero.		homo.	hetero.		homo.	hetero.
0,5	— x	+ x	2,0	+ 12	+ 10	4,0	0	0
1,0	+ 5	+ 10	3,0	+ 3	+ 3			

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung von Wasser mit 60° wird die Skala noch aus dem Gesichtsfelde getrieben.

Organstück vom I. Nerven rechts innervirt (undurchschnitten).

0,5	— 61	+ 76	3,0	+ 40	+ 20	8,0	+ 1	+ 1
1,0	+ 17	+ 26	4,0	+ 9	+ 11	10,0	0	0
1,5	+ 54	+ 29	5,0	+ 18	+ 4			
2,0	+ 83	+ 39	6,0	+ 15	+ 11	2,0	+ 66	+ 28

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° wird die Skala mit Gewalt aus dem Gesichtsfeld getrieben.

Widerstandsbestimmungen von Organstreifen.

Organstreifen vom I. Nerven rechts innervirt. Streifenlänge = 2,2 cm.
↓↑*) 2025, ↓↓ 1800, ↓↑ 2050, ↓↓ 1875. Nach 10 Minuten Durchströmung: ↓↑ und ↓↓ 350 Ohm.

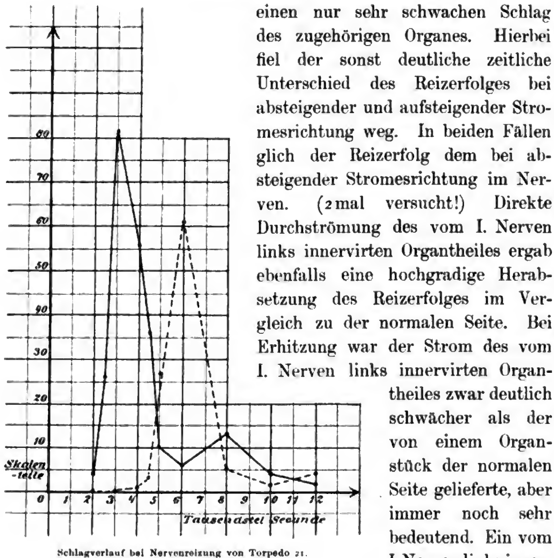
Organstreifen vom I. Nerven links innervirt. Streifenlänge = 2 cm.
↓↑ 1650, ↓↓ 1600. Nach 10 Minuten Durchströmung ↓↑ und ↓↓ 300 Ohm.

Organstreifen vom IV. Nerven links innervirt. Streifenlänge = 3 cm.
↓↑ 2375, ↓↓ 2000, ↓↑ 2375, ↓↓ 2000 Ohm.

Der Durchmesser des Röhrchens, in das die Streifen hineingezogen wurden, betrug 1,2 cm.

Von den 3 durchschnittenen Nerven (16 Tage) der Torpedo 21 gab namentlich Reizung des schwächsten Nerven, I. Nerv links,

*) Die Bezeichnung ↓↑ bedeutet hier und im Folgenden heterodrome, die Bezeichnung ↓↓ homodrome Durchströmung des Organstreifens.



Schlagverlauf bei Nervenreizung von Torpedo 21.
Reizung des I. Nerven rechts (normal).
——— / - - - - } Schlagverlauf bei { absteigender / aufsteigender } Durchströmung des Nerven.

einen nur sehr schwachen Schlag des zugehörigen Organes. Hierbei fiel der sonst deutliche zeitliche Unterschied des Reizerfolges bei absteigender und aufsteigender Stromesrichtung weg. In beiden Fällen glich der Reizerfolg dem bei absteigender Stromesrichtung im Nerven. (2 mal versucht!) Direkte Durchströmung des vom I. Nerven links innervirten Organtheiles ergab ebenfalls eine hochgradige Herabsetzung des Reizerfolges im Vergleich zu der normalen Seite. Bei Erhitzung war der Strom des vom I. Nerven links innervirten Organtheiles zwar deutlich schwächer als der von einem Organstück der normalen Seite gelieferte, aber immer noch sehr bedeutend. Ein vom I. Nerven links innervirter Organstreifen zeigte bei homodromer und heterodromer Durchströmung geringere Unterschiede im Widerstand, als andere Organstücke darboten.

Für den Schlagverlauf vergleiche die Curven auf S. 326—329.

Torpedo 24, ocellata, mittelgross, den 13. X. 98 I. Nerven rechts und links durchschnitten, wird getötet den 29. X., also 13 Tage nach Durchschneidung.

Reizungen des elektrischen Organes vom Nerven aus.

Reizung des IV. Nerven rechts normal undurchschnitten. $ED = 1{,}6$.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
2,0	0	0	7,0	16	29
2,5	18	0	8,0	32	21
3,0	69	0	10,0	45	2
4,0	94	1	12,0	5	7
4,5	41	45	13,0	2	26
5,0	19	15	14,0	1	5
6,0	21	48			

Schlagverlauf bei Nervenreizung von Torpedo 21.
Reizung des I. Nerven links (2mal) 16 Tage durchschnitten.
——— / - - - - Schlagverlauf bei {absteigender / aufsteigender} Durchströmung des Nerven.

Reizung des I. Nerven rechts durchschnitten. $ED = 1{,}5$ (war bereits für einen Rheotomversuch verwendet worden).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.
3,0	0	0
4,0	27 (73*)	0
5,0	39	2
6,0	26	3
7,0	9	8
8,0	2	11 (10*)
9,0	2	7
10,0	1	2

*) Maxima eines früheren Versuchs, der hier nicht wiedergegeben wurde.

Reizung des I. Nerven links (durchschnitten).

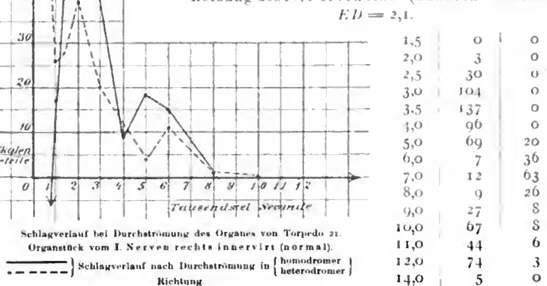
$ED = 1{,}4$.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven: absteig	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven: aufsteig	Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven: absteig	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven: aufsteig.
2,0	0	0	7,0	2	15
2,5	6	0	8,0	5	8
3,0	66	0	9,0	3	3
4,0	71	0	10,0	3	3
5,0	13	2	12,0	4	2
6,0	3	10	14,0	3	1

Reizung des IV. Nerven links (undurchschnitten).

$ED = 2{,}1$.

1,5	0	0
2,0	3	0
2,5	30	0
3.0	104	0
3.5	137	0
4,0	96	0
5,0	69	20
6,0	7	36
7,0	12	63
8,0	9	26
9,0	27	8
10,0	67	8
11,0	44	6
12,0	74	3
14,0	5	0



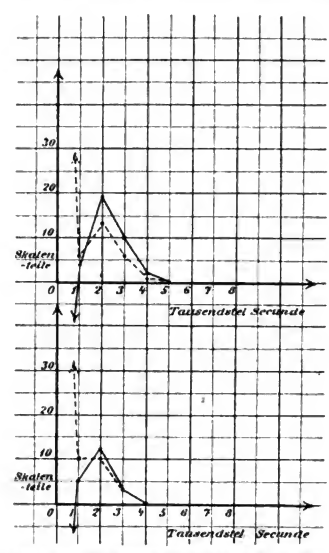
Schlagverlauf bei Durchströmung des Organes von Torpedo 21. Organstück vom I. Nerven rechts innervirt (normal).

——— / - - - - } Schlagverlauf nach Durchströmung in { homodromer / heterodromer } Richtung.

Direkte Reizung des elektrischen Organes.

Organstück vom I. Nerven links (durchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes: homo.	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes: hetero	Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes: homo.	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes: hetero.	Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes: homo.	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes: hetero.
0,5	— x	+ x	2,0	+ 28	+ 22	4,0	+ 5	+ 6
1,0	— 1	+ 2	3,0	+ 33	+ 27	4,5	+ 3	+ 3
1,5	+ 10	+ 8	3,5	+ 38	+ 30	5,0	+ 1	+ 1



Schlagverlauf bei Durchströmung des Organes von Torpedo 21.
Organstücke vom I. Nerven links innervirt
(16 Tage durchschnitten).

——— / - - - - } Schlagverlauf nach Durchströmung in { homodromer / heterodromer } Richtung.

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° wird die Skala rasch aus dem Gesichtsfeld getrieben.

Organstück vom IV. Nerven links*) (undurchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes	
	homo.	hetero.
0,5	— x	+ x
1,5	+ 18	+ 8
2,0	+ 40	+ 16
2,5	+ 27	+ 10
3,0	+ 17	+ 8
4,0	+ 1	+ 3

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° wird die Skala rasch aus dem Gesichtsfeld getrieben.

Widerstandsbestimmungen von Organstreifen.

Organstreifen vom I. Nerv rechts innervirt durchschnitten.
Streifenlänge = 2,7 cm.

↓↑ 2000, ↓↓ 1925, ↓↑ 1975, ↓↓ 1925. Nach 10 Minuten Durchströmung (Erhitzung): ↓↑ und ↓↓ 310 Ohm.

Organstreifen vom II. und III. Nerven links innervirt undurchschnitten.

↓↓ 1750, ↓↑ 2425, ↓↓ 2050, ↓↑ 2425, ↓↓ 2250, ↓↑ 2400.

Die von den durchschnittenen Nerven innervirten Organstücke gaben bei indirekter und direkter Reizung einen nur um wenig

*) Diese Prüfung konnte erst am Nachmittage vorgenommen werden.

schwächeren Strom als die normalen Organtheile, die Unterschiede des Widerstandes bei verschiedener Stromrichtung waren an einem normalen Organstück viel beträchtlicher als an dem, dessen Nerv durchschnitten worden war.

Torpedo 38, ocellata, gross, den 1. XI. links alle Nerven durchschnitten. Den 3. XI. in etwa 1½ Stunde 25 cbcm. einer 5%igen Curarelösung in die erste linke Kiemenarterie eingespritzt. Das Herz schlug bis zur Tötung des Thieres, die Bauchmuskeln waren indirekt nicht mehr, wohl aber noch direkt reizbar.

Reizungen des elektrischen Organes vom Nerven aus.

Reizungen des III. Nerven rechts (undurchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
12,0 13,0	} 0	} 0	14,0	0	0	15,0	0	0
Reizungen des III. Nerven links (durchschnitten). $ED = 2{,}3$.								
11,0 12,0	} 0	} 0	13,0	0	0	14,0	0	0

Direkte Reizungen des elektrischen Organes.

Organstück vom III. Nerven rechts innervirt.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
0,5	$-x$	$+x$	1,5	$+\frac{1}{2}$?	$+\frac{1}{2}$?	3,0	0	0
1,0	-5	$+5$	2,0	0	0			

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° machte die Skala folgende Ausschläge:

0'' 15'' 30'' 45'' 60'' 75'' } nach Umspülung	0 6 11 9 8 6 } Skalentheile							

Organstück vom III. Nerven links innervirt.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
2,0 4,0 6,0	} 0	} 0	8,0 2,0 1,0	} 0	} 0	0,84 0,5	— 9 — x	+ 9 + x

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° machte die Skala folgende Ausschläge:

0'' 15'' 30'' 45'' 60'' 75'' 90'' } nach Umspülung	0 4 9 6 5 3 2 } Skalentheile							

Widerstandsbestimmungen von Organstreifen.

Organstreifen vom III. Nerven links innervirt. Streifenlänge = 2,5 cm.

↓↓ 1350, ↓↑ 1350, ↓↓ 1350, ↓↑ 1350.

Bei Dauerschluss bleibt zunächst die Skala ruhig und erst nach ½ Minute beginnt die continuirliche Abnahme des Widerstandes. Nach 7 Minuten:

↓↑ und ↓↓ 300 Ohm.

Organstreifen vom III. Nerven rechts innervirt. Streifenlänge = 3,0 cm.

↓↑ und ↓↓ 1610 Ohm.

Das Organ der Torpedo 38, welche mit 25 cbcm einer 5%igen Curarelösung vergiftet worden war, zeigte auch auf der Seite, auf welcher die Nerven durchschnitten worden waren, bei indirekter und direkter Reizung völlige Unerregbarkeit. Erwärmen von Organstreifen ergab nur noch eine verschwindend geringe Ablenkung im Sinne des Schlages. Organstreifen der gebräuchlichen Dimensionen zeigten einen etwas geringeren, jedenfalls aber bei hetero-

und homodromer Stromesrichtung, gleichen Widerstand. Bei dauernder Durchströmung eines Streifens begann die Abnahme des Widerstandes erst nach ½ Minute.

Torpedo 25, mittelgross, marmorata, den 13. X. 98 links I., III. und IV. Nerven durchschnitten, den 7. XI. getötet. Also 24 Tage nach Durchschneidung der Nerven.

Reizungen des elektrischen Organes vom Nerven aus.

Reizung des I. Nerven rechts (undurchschnitten). $ED = 1{,}9$.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
1,0	3	0	4,5	6	5	9,0	25	3
1,5	20	0	5,0	2	30	10,0	22	0
2,0	55	0	6,0	2	10	12,0	5	0
3,0	50	0	7,0	3	15	14,0	1	0
4,0	15	0	8,0	5	11			

Reizung des I. Nerven links (durchschnitten). $ED = 1{,}7$.

2,0 3,0	0	0	4,0 6,0	0	0	8,0 10,0	0	0

Zur Prüfung der Versuchsanordnung: Bei dauerndem Bussolschluss giebt das Organ bei Durchströmung des Nerven:

↓ — 140, ↑ + 150, ↓ — 140, ↑ + 144 Skalentheile.

Nochmalige Reizung des I. Nerven links mit demselben Erfolg.

Reizung des III. Nerven rechts (undurchschnitten). $ED — 2{,}1$.

1,5	0	0	4,0	28	0	8,0	2	11
2,0	14	0	5,0	4	0	9,0	11	6
3,0	63	0	6,0	2	1	10,0	8	4
3,5	45	0	7,0	2	9	11,0	0	0

Reizung des IV. Nerven links (durchschnitten). $ED = 2{,}2$.

4,0 6,0	0	0	8,0 10,0	0	0	14,0	0	0

Zur Prüfung der Versuchsanordnung: Bei dauerndem Bussolschluss giebt das Organ bei Durchströmung des Nerven:

↓ — 17, ↑ + 19.

Reizung des II. Nerven links (undurchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
2,5	3	0	6,0	10	3	9,0	1	10
3,0	15	0	7,0	2	15	10,0	3	5
3,5	25	0	7,5	1	24	11,0	4	3
4,0	40	1	8,0	0	24	12,0	3	1
5,0	28	1						

Direkte Reizung des elektrischen Organes.

Organstück vom I. Nerven links innervirt (durchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes	
	homo.	hetero.		homo.	hetero.		homo.	hetero.
3,0	0	0	2,0	0	+ 2?	0,5	— 110	+ 128
4,0	0	0	1,0	— 10	+ 8	2,0	— 1	+ 1
6,0	0	0	0,84	{— 76 {+ 57	{+ 62 {+ 60	3,0	0	0

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° giebt das Organ folgende Ausschläge:

nach Umspülung	Skalentheile
0″	0
6″	10
20″	40
25″	43
30″	40
45″	55
60″	60
90″	120
105″	260

und geht binnen 1 Minute zurück.

Organstück vom III. Nerven rechts innervirt (undurchschnitten).

0,5	— x	+ x	1,5	+ 2	+ 7	4,0	7	8
0,84	— 50	+ 45	2,0	{+ 15 {+ 18	{+ 24 {+ 26	5,0	3	2
1,0	— 2	+ 1				6,0	2	0
			3,0	28	41			

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° schiesst die Skala in den ersten 10 Secunden aus dem Gesichtsfeld und kehrt erst nach 2 Minuten zurück.

Organstück vom IV. Nerven links innervirt (durchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes homo.	hetero.	Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes homo.	hetero.	Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes homo.	hetero.
0,5	— x	+ x	1,5	— 3	+ 3	4,0	} 0	} 0
0,84	— 14	+ 36	2,0	0	+ 2	6,0		
1,0	— 2	+ 1	3,0	0	0			

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° giebt das Organ folgende Ausschläge:

nach Umspülung	Skalentheile	nach Umspülung	Skalentheile	nach Umspülung	Skalentheile
0″	0	70″	79	140″	211
10″	26	80″	116	150″	146
20″	59	90″	156	160″	101
30″	70	100″	186	170″	51
40″	66	110″	211	180″	9
50″	79	120″	251	190″	— 9
60″	84	130″	246		

Organstück vom II. Nerven links innervirt (undurchschnitten).

0,5	— x	+ x	2,0	+ 25	+ 25	6,0	+ 2	+ 2
1,0	— 35	+ 38	2,5	+ 18	+ 10	8,0	+ 1	+ 0
1,5	+ 27*)	+ 16	3,0	+ 10	+ 12			

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° schiesst die Skala in den ersten 10 Secunden aus dem Gesichtsfeld.

Widerstandsbestimmungen von Organstreifen.

Organstreifen vom IV. Nerven rechts innervirt undurchschnitten.
Streifenlänge = 3,4 cm.

↓↓ 1250, ↑↓ 1900, ↓↓ 1475, ↑↓ 1875.

Organstreifen vom IV. Nerven links innervirt durchschnitten.

↓↓ 1415, ↓↑ 1400, ↓↓ 1375, ↓↑ 1375.

Nach 3 Minuten Durchströmung: ↓↓ und ↑↓ 250 Ohm.

Organstreifen vom IV. Nerven links innervirt durchschnitten.

↓↑ 1775, ↓↓ 1750, ↓↑ 1725, ↓↓ 1725.

Nach 5 Minuten Durchströmung: ↓↓ und ↓↑ 300 Ohm.

*) Mit — Vorschlag.

Die Organtheile von Torpedo 25, deren Nerven vor 24 Tagen durchschnitten worden waren, gaben bei direkter und indirekter Reizung keinen Strom mehr, während normale Organtheile desselben Thieres gut erregbar waren bei indirekter und direkter Reizung. Fehler in der Versuchsanordnung, die das Ergebniss beeinflussen konnten, sind ausgeschlossen, weil zwischen je 2 pathologischen Theilen immer ein normales Organstück geprüft wurde. Die Widerstände im degenerirenden Organ waren von gleicher Grösse wie im normalen, zeigten aber nicht wie an letzterem wesentliche Unterschiede bei wechselnder Stromrichtung. Beim Erhitzen der degenerirenden Organe trat noch ein Strom auf, der aber unvergleichlich schwächer war, wie der des normalen Organes.

Torpedo 42, ocellata, klein, den 3. XI. alle Nerven links durchschnitten, den 4. XI. 1 cbcm 1% Lösung von Veratrinum sulf. eingespritzt.

Befund: Bei Reizung der freigelegten Nerven wurden nur noch an der linken Seite, wo die Nerven vor der Vergiftung durchschnitten waren, mit dem Telephonschreiber Reizerfolge verzeichnet.

Reizung der Skelettmuskeln ergab die typische Veratrincontraction.

Torpedo 43, ocellata, mittelgross, den 8. XI. alle Nerven links durchschnitten, den 10. XI. 40 cbcm einer Veratrinlösung 1 : 2000 und 5 cbcm einer Veratrinlösung 1 : 100 eingespritzt.

Befund: Bei Freilegung des Herzens zeigte sich, dass das Herz sehr selten lange ausserordentlich gedehnte Zusammenziehungen ausführte und bei jeder Contraction viele Secunden brauchte, um wieder völlig zu erschlaffen. Auch die Skelettmuskeln blieben nach einem Einzelreiz in sehr langer Zusammenziehung.

Reizung der Nerven mit Inductionsschlag giebt telephonisch nur an der linken Seite bei Ableitung vom Organ ein auf die Erregung des letzteren zu beziehendes Geräusch. Desgleichen gelingt es bei Reizung eines Nerven der linken Seite mit einem einzigen Inductionsschlag an der Bussole bei aufgeschobener Rolle eine starke nicht auf Stromschleifen des Inductionsstromes zu beziehende Ablenkung vom Organ her zu erhalten. Bei dem Versuche einer Rheotomreizung (IV. Nerv links) fällt die rasche Ermüdbarkeit auf: Es scheint, als ob jedesmal bei einer Reizung nur der erste vom Rheotom geschickte Reizstrom wirksam wäre.

Torpedo 44, marmorata, klein. Links alle Nerven durchschnitten d. 11. XI., d. 12. XI. 2,5 cbcm einer Lösung von Veratrinum sulfur. 1:500 (in Seewasser gelöst) in die linke Kiemenarterie eingespritzt.

Befund: Nach der Einspritzung trat rasch ein Krampf auf. Nach 2′ war die Reflexerregbarkeit vollständig aufgehoben. Herzschlag und Contractionen der Skelettmuskulatur waren ausserordentlich gedehnt.

Die Organtheile waren am Rheotom direkt und indirekt garnicht oder nur ganz schwach erregbar. Erwärmen von Organstreifen auf 60° liefert nur sehr schwache Ströme. Der Organwiderstand war hoch geblieben, war aber bei homodromer und heterodromer Durchströmung völlig gleich.

Torpedo 45, marmorata, gross, d. 12. XI. 98 links alle Nerven durchschnitten; d. 13. XI. wurden 10 cbcm einer 1 ‰ Veratrinlösung in die erste linke Kiemenarterie eingespritzt.

Befund: Das Herz zeigte die Veratrinvergiftung sehr deutlich. In den Curven (Tafel II, Curve IV), die in der Weise gewonnen wurden, dass Herzspitze und Basis mit feinen Häkchen durchbohrt und das Ganze an einen leichten Schreibhebel (Tangentialschreibung) befestigt wurde, beträgt beispielsw. bei dem ersten durch künstliche Reizung gewonnenen Herzschlage die Zeit vom Beginn des Schlages bis zur maximalen Zusammenziehung $5\frac{1}{2}''$, der ganze Schlag aber bis zur vollständigen Erschlaffung $30''$! (Die über den Curven stehende Zeitschreibung entspricht ganzen Secunden.) Die oberste Curvenreihe (Curve IV, Tafel II), bei welcher der Reizmoment (Schliessungs- und Oeffnungsinductionsschlag) durch Herabgehen oder Hebung der über der Zeitcurve befindlichen Linie gekennzeichnet ist, (Z Curve IV), zeigt wie lange bei dieser Veratrinvergiftung des Herzens der Zustand geminderter Erregbarkeit vorhanden ist.

Zum Vergleich der Zeitverhältnisse mit denen des normalen Herzschlages der Torpedo sei hier auf die Curven des letzteren (Tafel II, Curve II und III) verwiesen, bei welchem der ganze Herzschlag etwa $1''$ beansprucht.

Die Organtheile, welche vom I. und II. Nerven links (durchschnitten) innervirt waren, zu denen das Gift bei der Einspritzung in die linke I. Kiemenarterie also zunächst gelangte, waren indirekt und direkt völlig unerregbar und bei Abtötung durch Er-

hitzung wurde nur ein Organstrom niederer Ordnung erhalten. Andere Organtheile gaben am Rheotom bei indirekter und direkter Reizung noch Skalenablenkungen. Auffallend war aber das rasche Zurückgehen der Skala gleich nach Beginn jeder Reizung (Ermüdung s. Torpedo 43). Als Beispiel für die raschere Ermüdung diene folgender Versuch.

Bei dauerndem Bussolschluss und bei dauernder Rheotomreizung (also aller 5tel Secunden eine Nervenreizung) wurde nach je 5 oder 10″ die Skala abgelesen. Die Tabelle zeigt, wie rasch die bei der Nervenreizung vom Organ gelieferte elektromotorische Kraft abnimmt, im Vergleich zu der lange anhaltenden Leistungsfähigkeit bei einem normalen Organ (vgl. unten Torpedo 36 S. 338.)

I. Nerv rechts. Dauernde Bussolschliessung und fortgesetzte Rheotomreizungen. Ablenkungen nach je 5 Secunden: in Skalentheilen

0	40	25	14	5	3
213	37	23	12	5	2
123	34	21	11	4	2
93	32	19	10	4	2
63	30	17	7	3	1
53	27	15	6	3	1
45					

Hierzu Curve *a*.

? Nerv links. Dauernde Bussolschliessung und fortgesetzte Rheotomreizungen. Ablenkungen nach je 5 Secunden: in Skalentheilen

0	144	74	34	14	6
294	134	46	29	11	7
254	84	56	24	9	4
224	87	49	21	9	4
184	86	39	17	7	3
164	79				

Hierzu Curve *b*.

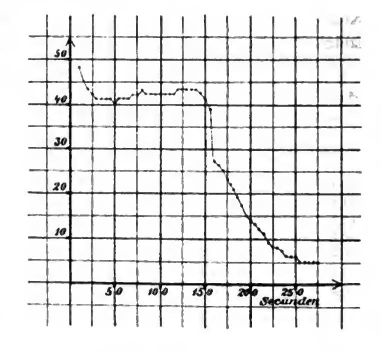
Torpedo 36, ocellata, mittelgross und kräftig, d. 25. X. 98 links alle Nerven durchschnitten; d. 13. XI. getötet, also nach 18 Tagen.

Befund. Die von den durchschnittenen Nerven innervirten Organtheile waren noch gut erregbar, indirekt und direkt.

Als Beispiel für die langsame Ermüdung eines normalen Organes wurde bei dauernder Bussolschliessung mittelst des Rheotomes fortwährend der erste Nerv rechts gereizt, also jede Fünftel Secunde. Um den zur Bussole abgeleiteten Organstrom hinreichend zu schwächen, wurde vor der Bussole ein Nebenschluss von 40 Ohm eingeführt. Da der Widerstand der Bussolrolle 1850 Ohm beträgt (s. Schoenlein I S. 466), so sind, um vergleichbare Werthe mit Torpedo 46 (s. o.) zu erhalten, die untenstehenden Skalentheile mit 46,2 zu multipliciren.

I. Nerv rechts. Dauernde Bussolschliessung und fortgesetzte Rheotomreizungen. Ablenkungen nach je 5 Secunden: in Skalentheilen

0	41	42	26	8
18	41	42	25	8
48	41	43	23	7
45	42	43	21	6
43	42	43	19	6
42	43	43	17	6
41	42	43	15	5
41	42	42	14	5
41	42	41	13	5
41	42	39	12	5
40	42	27	11	5
			9	



Torpedo 50, ocellata, untermittelgross, gesund, d. 18. XI. werden 10 cbcm einer Veratrinlösung 1:5000 in eine vordere Kiemenarterie sehr langsam eingespritzt und das Tier eine Stunde nach Beginn der Vergiftung getötet.

Befund. Die während der Vergiftung von beiden Organen mit 2 Telephonschreibern aufgenommenen Schlagcurven zeigen, dass nach der Vergiftung beiderseits (gleichzeitig — soweit bei der langsamen Trommelbewegung zu erkennen ist) eine Schaar dichtgedrängter Schläge auftrat, denen noch einige vereinzelte Schläge folgten.

Die von den Bauchmuskeln gewonnenen Curven (I—VI Tafel II Curve V), bei Reizung der Muskeln mit einem einzelnen Inductionsschlag, zeigen das typische Verhalten der Abnahme des zweiten Gipfels und die rasche Ermüdung des Veratrinmuskels. Auf der

gleichen Tafel II ist noch ein künstliche Tetanus des nun bereits ermüdeten Muskels mit nur sehr wenig Einzelreizen wiedergegeben.

Wie die Beobachtung des blossgelegten Herzens ergab, war neben der ausserordentlichen Verlangsamung des Herzschlages auch die Reizleitung vom Sinus über den Vorhof zum Ventrikel sehr verlangsamt (ca. 2″ Leitungsdauer).

Sämmtliche Organstücke waren indirekt und direkt unerregbar. Die Prüfung bei Nervenreizung wurde zuerst in der Weise vorgenommen, dass bei geschlossenem Bussolkreis die Nerven mit einem einzelnen Inductionsschlag gereizt wurden: An der Bussole gaben sich durch geringe Ausschläge nur die das Organ durchsetzenden Stromschleifen des Inductionsschlages zu erkennen. Erwärmung von Organstreifen auf 60° gab nur geringe Ausschläge im Sinne des Schlages.

Torpedo 40, ocellata, mittelgross, d. 2. XI. 98, links alle Nerven durchschnitten. Wurde moribund getötet d. 21. XI. 98, also 19 Tage nach Durchschneidung.

Befund:

Reizungen des elektrischen Organes vom Nerven aus.

Reizung des III. Nerven rechts (undurchschnitten). *ED* = 1,6 cm.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
2,0	3	0	6,0	3	4	12,0	15	3
3,0	70	0	7,0	8	14	13,0	13	4
4,0	65	0	8,0	13	26	14,0	10	10
4,5	30	—	9,0	18	28	15,0	8	11
5,0	15	3	10,0	21	12	16,0	4	6

Reizung des III. Nerven links (durchschnitten). *ED* = 1,8 cm.

4,0	0	0	6,0	0	0	10,0	0	0

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Rheotomreizung:

	0	0						

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Dauerschliessung des Reizstromes:

	— 28	+ 30						

Reizung des IV. Nerven links (durchschnitten). *ED* = 2,0 cm.

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Rheotomreizung:

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
	0	0						

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Dauerschliessung des Reizstromes:

	— 112	+ 113						

Reizung des II. Nerven links (durchschnitten). *ED* = 1,9 cm.

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Rheotomreizung:

	— 2	+ 2		— 2	+ 2			

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Dauerschliessung des Reizstromes:

	— *x*	+ *x*						

Reizung des I. Nerven links (durchschnitten). *ED* = 1,5 cm.

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Rheotomreizung:

	0	0						

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Dauerschliessung des Reizstromes:

	— 98	+ 98						

Reizung des I. Nerven rechts (undurchschnitten). *ED* = 1,7 cm.

2,0	0	0	5,0	18	4	8,0	—	18
2,5	7	—	6,0	3	18	10,0	4	8
3,0	35	0	7,0	6	21	12,0	3	2
4,0	60	0						

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Dauerschliessung des Reizstromes:

absteigend.

Bei Schliessung geht Skala zuckend bis auf + 10 und geht dann auf — 155.

aufsteigend.

Bei Schliessung geht Skala sofort auf + 150, bei Oeffnung schnellt Skala erst noch um etwa + 10 weiter vorwärts und geht dann zurück auf 0.

Direkte Reizung des elektrischen Organes.

Organstück vom I. Nerven links innervirt (durchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes homo.	hetero.	Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes homo.	hetero	Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes homo.	hetero.
1,0 4,0	} 0	} 0	0,5	— x	+ x	1,0	— 30	+ 27

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° giebt das Organ folgende Ausschläge:

Dauer der Umspülung	Skalentheile	Dauer der Umspülung	Skalentheile	Dauer der Umspülung	Skalentheile
0″	0	40″	31	90″	111
10″	1	50″	41	105″	191
20″	4	60″	49	2′	Skala weg
30″	10	75″	53	3′	Skala zurück

Organstück vom IV. Nerven links innervirt (durchschnitten).

Ist unerregbar wie das vom I. Nerven innervirte Stück.

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° giebt das Organ folgende Ausschläge:

Dauer der Umspülung in Secunden	Skalentheile	Dauer der Umspülung in Secunden	Skalentheile	Dauer der Umspülung in Secunden	Skalentheile
0	0	70	28	120	228
10	+ 5	80	36	130	Skala weg
20	+ 16	90	63	150	Skala zurück
30	22	100	113	180	38
40	20	110	178	190	— 2
60	21				

Organstück vom I. Nerven rechts innervirt (undurchschnitten).

0,5	— x	+ x	1,5	+ 14	+ 13	4,0	+ 30	+ 28
1,0	— 30	+ 30	2,0	+ 35	+ 35	6,0	+ 4	+ 6

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° geht die Skala in den ersten 10 Secunden aus dem Gesichtsfeld.

Widerstandsbestimmungen von Organstreifen.

Organstreifen vom IV. Nerven links innervirt, durchschnitten

↓↓ 2440, ↓↑ 2410, ↓↓ 2450, ↓↑ 2450 Ohm.

Organstreifen vom IV. Nerven rechts innervirt, undurchschnitten

↓↓ 2600, ↓↑ 5000, ↓↓ 4350, ↓↑ 5000 Ohm.

Die Organtheile der Torpedo 40, welche von denjenigen Nerven innervirt werden, welche 19 Tage zuvor durchschnitten waren, zeigten sich bei indirekter und direkter Reizung völlig unerregbar. Bei dauernder Ableitung eines solchen Organtheiles zum Galvanometer gab ein länger geschlossener im Nerven absteigender Strom eine ebenso starke negative Ablenkung, wie der aufsteigend gerichtete im positiven Sinne gegeben hatte. Bei einem Organtheil der normalen erregbaren Seite dagegen wurde unter gleichen Versuchsbedingungen ausser den gleichen besprochenen Dauerablenkungen bei Schliessung des absteigenden Stromes und Oeffnung des aufsteigenden ein stets positiv gerichteter Vorschlag von etwa 10 Skalentheilen beobachtet. Erwärmung der pathologischen Organtheile auf 60° brachte erst nach 1—2 Minuten einen stärkeren in der Richtung des Schlages gehenden Strom hervor, während am normalen Organ in den ersten Secunden die Skala verschwand.

Der Widerstand von Organstreifen war auf der durchschnittenen Seite ↓↓ und ↑↓ hoch aber gleich; auf der normalen Seite war, wie schon mehrfach gezeigt, ↓↓ der Widerstand wesentlich niedriger als ↑↓.

Torpedo 41, marmorata, mittelgross, d. 4. XI. links alle Nerven durchschnitten, getötet d. 26. XI., also 22 Tage nach der Durchschneidung.

Befund. Die Organstücke, deren Nerven durchschnitten waren, zeigten sich bei indirekter und direkter Reizung auch bei angeschobener Rolle völlig unerregbar. Erwärmung auf 60° gab an den Organstreifen erst nach etwa 1 Minute einen stärkeren Strom (Verschwinden der Skala).

An einem Organtheile der rechten undurchschnittenen Seite, die sehr kräftige Ströme lieferte, wurde folgender Ermüdungsversuch ausgeführt. Zunächst wurde der Schlagverlauf bei Reizung vom Nerven aus festgestellt. Dann wurde das Organstück vom Nerven aus bis zur Erschöpfung mittels des Rheotoms gereizt und alle 5 Secunden bei dauerndem Bussolschluss die Ablenkung abgelesen; war diese Null geworden, so wurde nach bestimmter Pause die Reizung nochmals begonnen u. s. w. War auch nach einer längeren Erholungspause des Organs bei Reizung kein Strom mehr zu erhalten, so wurde ein Organstreifen bei direkter Reizung und bei Erwärmung auf 60° auf seine elektromotorische Wirksamkeit hin untersucht.

Reizung des IV. Nerven rechts.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
4,0	0	0	8,0	30	3	11,0	0	8
5,0	26	0	9,0	10	15	12,0	0	4
6,0	80	5	10,0	5	28	14,0	0	0
7,0	70	3						

Rheotomreizung vom Nerven aus, nach je 5″ Ablesung:

0	85	80	73	53	40	28	17	9	4	Reizstrom aufsteigend.
140	80	80	68	50	36	24	14	7	3	
100	80	80	63	48	33	20	12	6	3	
90	80	75	59	43	33	17	10	5	3	

Nach 1 Minute Pause nochmals Rheotomreizung mit aufsteigendem Reizstrom.

Anfangs Ablenkung 22 Skalentheile, nach $^1/_2$ Minute Reizung Ablenkung 4 Skalentheile.

Nach $^1/_2$ Minute Pause Rheotomreizung mit absteigendem Reizstrom, Ablenkungen alle 5 Secunden angegeben:

0	105	80	75	55	38	20	8	2	— 7
195	95	78	73	50	30	15	6	— 3	— 7
135	90	75	68	45	25	11	3	— 4	— 9

bei Ausschaltung der Reizung (die Nulleinstellung hatte sich während des Versuches um — 9 Skalentheile verschoben).

Nach 1 Minute Pause Rheotomreizung mit absteigendem Reizstrom, Ablenkungen nach je 5″ abgelesen:

0 8 5 2 1 0 0

Nach 1 Minute Pause desgl.: 0 2 1 0

Nach 1 Minute Pause desgl.: 0 0

Direkte Organreizung an einem Streifen des so ermüdeten Organes.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes	
	homo.	hetero.		homo.	hetero.		homo.	hetero.
0,34	— 125	+ 125	2,0	0	0	4,0	+ 3	+ 8
0,5	— 60	+ 60	3,0	+ 2	+ 4	6,0	0	0
1,0	0	0						

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° werden alle 5″ folgende Ablenkungen abgelesen

0	102	105	87	37	34	30	31	34	33	22	4	0
12	102	97	72	35	32	30	33	34	30	14	2	
82	112	92	52	35	30	31	34	34	27	7	2	

Ermüdung eines schlagkräftigen Organes durch Reizung vom Nerven aus macht es möglich, das Organ für direkte Reizung so gut wie völlig unerregbar zu machen und bewirkt, dass Erwärmung eines Organstreifens nur noch einen äusserst schwachen in der Richtung des Schlages gehenden Strom erzeugt.

Torpedo 54, ocellata, mittelgross, d. 28. XI. 98, links alle Nerven durchschnitten, d. 29. XI. 3 cbcm 5%ige Curarelösung eingespritzt.

Befund. Die Organtheile der rechten Seite, deren Nerven intakt waren, gaben bei indirekter und direkter Reizung keinen Strom und beim Erwärmen auf 60° einen Strom niederer Ordnung. Die Organtheile der linken Seite, deren Nerven durchschnitten waren, waren elektromotorisch noch stark wirksam.

Der vom I. Nerven links innervirte Organtheil diente zu folgender Versuchsreihe über Ermüdung und Erholung des Organs. Es wird, wie bereits oben (s. Torpedo 41, S. 342 fg.) beschrieben, der Nerv mittels des Rheotoms so lange gereizt, bis jede Wirkung vom Organ ausbleibt, dann eine Minute ausgesetzt, wieder von neuem gereizt u. s. f. Als vom Nerven aus trotz 1 Minute Pause kein Reizerfolg mehr eintrat, wurde das Organ bei direkter Reizung untersucht.

Rheotomreizung vom Nerven aus, nach je 5″ Ablesung der Ablenkung in Skalentheilen:

0	96	89	88	90	93	95	86	71	49	24	14	10	.
148	92	88	88	90	97	93	82	66	44	21	19	.	0
108	89	88	89	90	95	92	78	62	36	17	12	.	
98	89	88	90	93	94	90	74	55	29	14	17	.	

Nach 1 Minute Pause desgl.:

42 37 29 22 18 14 11 9 6 4 3 2 1

Nach 1 Minute Pause desgl.:

18 17 12 9 6 5 3 3 2 2 1

Nach 1 Minute Pause desgl.:

12,5 12,5 10,5 7,5 5,5 3,5 2,5 1,5 1,5 0,8 0,5

Nach 1 Minute Pause desgl.:

9 9 7 4 3 1 1 0

Nach 1 Minute Pause desgl.:

6 5 4 3 2 0

Nach 1 Minute Pause desgl.:

4 4 3 2 1 0

Nach 1 Minute Pause desgl.:

3 2 1 0

Nach 1 Minute Pause desgl.:

2,5 2,0 1,0 0

Nach 1 Minute Pause desgl.:

2,0 1,0 0,5 0,5 0

Nach 1 Minute Pause desgl.:

1,0 1,0 0,5 0

Nach 1 Minute Pause desgl.:

1,0 0,5 0,5 0

Vergleiche die Curve auf Seite 346.

Direkte Organreizung an einem Streifen des so ermüdeten Organes.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes	
	homo.	hetero.		homo.	hetero.		homo.	hetero.
1,0	— 100	+ 110	3,0	+ 3	+ 4	6,0	0	0,5
2,0	0	+ 1	4,0	+ 2	3			

Das durch indirekte Reizungen ermüdete Organ war also bei direkter Reizung nur äusserst schwach elektromotorisch wirksam.

Zur Bestimmung der von einem normalen Organstreifen entwickelten Stromstärken bei Erhitzung desselben auf 60° wurde an der Ableitung zum Galvanometer eine Nebenschliessung eingefügt, um den durch das Galvanometer gehenden Stromzweig hinreichend zu verringern. Nachdem die durch den Organstreifen hervorgerufenen Ablenkungen gemessen worden waren, wurde unter Belassung der Nebenschliessung 1 Daniell'sches Element an die Stelle des Organstreifens gebracht und die durch dasselbe hervorgerufene Ablenkung gemessen. Die Zahl der in beiden Fällen abgelesenen Skalentheile ist der Stromstärke direkt proportional.

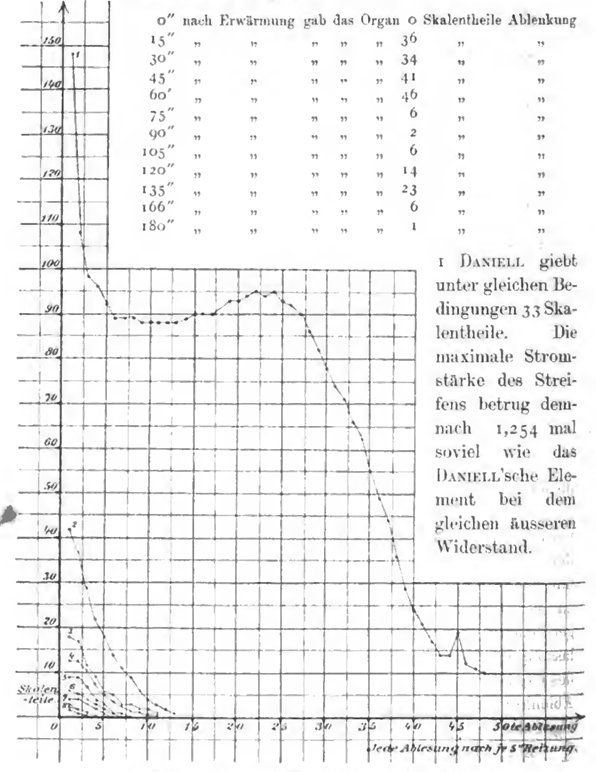
Ein Organstreifen gab bei 75 Ohm in der Nebenschliessung eine Maximalablenkung von 100 Skalentheilen, 1 Daniell lieferte

80 Skalentheile. Die Stromstärke des Organstreifens während der Erhitzungsdauer betrug in maximo 1,25 mal so viel wie die eines DANIELL unter den gleichen Bedingungen.

Für einen anderen normalen Organstreifen war bei 30 Ohm Widerstand in der Nebenschliessung der zeitliche Ablauf der Stromentwicklung folgender:

0″	nach	Erwärmung	gab	das	Organ	0	Skalentheile	Ablenkung
15″	"	"	"	"	"	36	"	"
30″	"	"	"	"	"	34	"	"
45″	"	"	"	"	"	41	"	"
60′	"	"	"	"	"	46	"	"
75″	"	"	"	"	"	6	"	"
90″	"	"	"	"	"	2	"	"
105″	"	"	"	"	"	6	"	"
120″	"	"	"	"	"	14	"	"
135″	"	"	"	"	"	23	"	"
166″	"	"	"	"	"	6	"	"
180″	"	"	"	"	"	1	"	"

1 DANIELL giebt unter gleichen Bedingungen 33 Skalentheile. Die maximale Stromstärke des Streifens betrug demnach 1,254 mal soviel wie das DANIELL'sche Element bei dem gleichen äusseren Widerstand.



Ermüdung eines Organtheiles von Torpedo 54; vgl. S. 344 ff.

Die Berechnung der elektromotorischen Kraft eines Organstreifens aus den gemessenen Stromintensitäten stösst deshalb auf Schwierigkeiten, weil bei der Erwärmung von Organstreifen (ursprünglich Widerstand ca. 2000 Ohm) der Widerstand derselben sehr rasch absinkt. Ein kurzer Ueberschlag lehrt, dass bei der Erhitzung von Organstreifen dieselben eine elektromotorische Kraft von vielen Daniell entwickeln, vielleicht in derselben Höhe, wie beim Schlag des Organs.

Torpedo 55, marmorata, mittelgross, d. 28. XI. 98 links alle Nerven durchschnitten; d. 29. XI. 98 15 cbcm 5%ige Curarelösung in die erste linke Kiemenarterie injicirt.

Befund. Die während der Vergiftung, nach Einspritzung von 3 cbcm, geschriebene Telephoncurve vom rechten Organ (Tafel II Curve I), zeigt die ausserordentliche Steigerung der centralen Erregbarkeit. Die unteren 4 Linien von links unten begonnen tragen die Zeitmarkirung, 1 Theilstrich entspricht 1 Secunde, die 4 oberen Curven, ebenfalls von links unten begonnen, sind von dem mit dem rechten Organ verbundenen Schreibtelephon Schoenlein's geschrieben. Bei o wurde mit der Vergiftung begonnen und zunächst 3 cbcm eingespritzt. Als die ersten Schläge bei a aufgetreten waren, wurde bei der grossen Erregbarkeit des Tieres versucht, durch taktmässiges Aufklopfen auf den Tisch wie bei einer Strychninvergiftung, Schläge auszulösen. Es wurde nach dem Takt des Zeitschreibers also etwa jede Secunde auf den Tisch geklopft, und die Curve zeigt, wie prompt das Thier auf jedes Klopfen mit einem Schlag reagirte. Am Ende dieser Reihe bei b antwortet das Thier jedem Klopfen mit einer grösseren Zahl rasch kleiner werdender Schläge, und ist nach etwa 12 derartigen Gruppen vollständig erschöpft. Bereits nach 1 Minute bei c gelingt es durch Klopfen, wenn auch nicht so regelmässig, eine grössere Zahl kleinerer Schläge zu erhalten. In gleicher Weise treten in kürzeren oder längeren Intervallen kleine und kleinste Schläge noch bei d, e und f bei Reizung des Thieres auf.

Die Organstücke der linken Seite, deren Nerven durchschnitten waren, gaben bei indirekter und direkter Reizung zum Theil nur Spuren eines Stromes zu erkennen. Erwärmen dieser Theile auf 60° lieferte einen Strom niederer Ordnung. Am stärksten erregbar war noch der hinterste Theil des linken Organes. Rechts fehlte, soweit geprüft, die Erregbarkeit völlig.

Die zum Vergleich vorgenommene Reizung der Bauchmuskulatur ergab bei indirekter Reizung Unerregbarkeit, während bei direkter Reizung der Muskulatur kräftige Contractionen auftraten.

Torpedo 37, ocellata, mittelgross d. 25. X. 98. links alle Nerven durchschnitten. Wird gesund getötet d. 1. XII. also 37 Tage nach Durchschneidung der Nerven.

Reizung der Organe vom Nerven aus.

Reizung des I. Nerven rechts (undurchschnitten). $ED = 1{,}8$.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven	
	absteig	aufsteig		absteig	aufsteig		absteig	aufsteig
2,0	0	—	6,5	7	6	11,0	14	8
2,4	4	—	7,0	10	12	12,0	11	3
2,5	18	0	8,0	15	20	14,0	9	6
3,0	51	0	8,5	13	28	16,0	4	3
3,5	50	0	9,0	12	32			
4,0	43	0	9,5	10	29	8,5	—	28
5,5	30	0	10,0	8	22	4,0	34	—
6,0	12	3						

Bei dauerndem Bussolschluss giebt Schliessung eines constanten durch den Nerven gehenden Stromes:

| —ca. 60*) | + 90**) | | | | | | |

Reizung des I. Nerven links (durchschnitten). $ED = 1{,}5$.

Selbst bei dauerndem Bussolschluss giebt die Rheotomreizung nur die symmetrischen durch den Reizstrom bedingten Ablenkungen

| — 5 | + 5 | | | | | | |

Bei dauerndem Bussolschluss giebt dauernde Schliessung des Reizstromes

| $-x$ | $+x$ | | | | | | |

Beide Male ohne jeden Vorschlag.

Bei Einschaltung eines DANIELL'schen Elements (zur Aichung) in den das unerregbare Organ enthaltenden Bussolkreis werden bei der Schliessung bei rotirendem Rheotom $\pm$ 4 Skalentheile erhalten.

*) Mit einem Vorschlag bei der Schliessung von + 50.

**) Bei der Oeffnung zunächst ein Vorschlag in + Richtung.

Reizung des IV. Nerven rechts (undurchschnitten). $ED = 2{,}0$.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen bei Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
2,0	0	—	9,0	3	32	16,0	2	14
2,3	3	—	10,0	28	14	17,0	2	11
3,0	100	0	11,0	54	9	18,0	23	1
4,0	136	0	12,0	41	11	19,0	29	0
5,0	25	0	13,0	21	16	20,0	22	0
6,0	17	7	14,0	4	20	22,0	4	0
7,0	8	65	15,0	2	24	24,0	0	0
8,0	9	62						

Reizung des IV. Nerven links (durchschnitten). $ED = 1{,}9$.

Bei Rheotomreizung und dauerndem Bussolschluss

	0	0						

Bei dauerndem Bussolschluss giebt dauernde Schliessung des Reizstromes

	— 41	+ 40						

Beide Male ohne jeden Vorschlag.

Direkte Reizung des elektrischen Organes.

Organstück vom I. Nerven rechts innervirt (durchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes	
	homo.	hetero.		homo.	hetero.		homo.	hetero.
0,5	— x	+ x	1,5	— 1	+ 1	3,0	— 1	+ 1
1,0	— 1,5	+ 2	2,0	— 1	+ 1	4,0	0	0

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung mit Wasser von 60° giebt das Organ folgende Ausschläge:

Dauer der Umspülung	Skalentheile	Dauer der Umspülung	Skalentheile	Dauer der Umspülung	Skalentheile
0″	0	45″	+ 7	2′	+ 13
5″	— 1	60″	+ 9	2′ 15″	+ 7
10″	— 4	1′ 15″	+ 12	2′ 30″	— 2,5
20″	+ 3	1′ 30″	+ 13	3′	— 4
30″	+ 6	1′ 45″	+ 17		

Organstück vom I. Nerven rechts innervirt (undurchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes	
	homo.	hetero.		homo	hetero.		homo	hetero.
0,5	— x	+ x	3,0	+ 33	+ 34	8,0	+ 3	+ 2
1,0	0	0	4,0	+ 39	+ 34	10,0	+ 9	+ 5
1,5	+ 2	+ 8	5,0	+ 18	+ 13	11,0	+ 5	+ 3
2,0	+ 10	+ 21	6,0	+ 7	+ 4	12,0	+ 2	+ 0

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises und Umspülung des Organstreifens mit Wasser von 65° giebt das Organ folgende Ausschläge, wenn zwischen die Ableitungsklemmen zur Bussole ein Nebenschluss von 40 Ohm eingeschaltet wird:

Dauer der Umspülung	Skalentheile	Dauer der Umspülung	Skalentheile	Dauer der Umspülung	Skalentheile
0″	0	25″	54	1′ 45″	19
5″	4	45″	52	2′	18
10″	39	1′	60	2′ 15″	7
15″	54	1′ 15″	17	2′ 30″	0
20″	57	1′ 30″	18		

Wird an Stelle des Organstreifens bei dem gleichen Nebenschluss ein DANIELL'sches Element mit der Bussole verbunden, so erhält man ∓ 52 Skalentheile. Die maximale Stromstärke des Streifens betrug demnach 1,1 mal soviel, wie die eines DANIELL'schen Elements bei dem gleichen äusseren Widerstand.

Organstück vom IV. Nerven links innervirt (durchschnitten).

0,5	— 42	+ 39	2,0	— ½	+ 1 (?)	6,0	0	0
1,0	— 1	+ 1	4,0	0	0			

Bei dauernder Schliessung des Bussolkreises (ohne Nebenschluss!) und Umspülung mit Wasser von 60° giebt das Organ folgende Ausschläge:

Dauer der Umspülung	Skalentheile	Dauer der Umspülung	Skalentheile	Dauer der Umspülung	Skalentheile
0″	0	45″	+ 19	1′ 30″	+ 1
15″	+ 8	1′	+ 4	2′	+ 2
30″	+ 13	1′ 15″	+ 2		

Zum Nachweis etwaiger rascher Stromschwankungen an einem erhitzten normalen Organstreifen wurde ein vom IV. Nerven rechts innervirter Organstreifen mit dem Telephon verbunden und hierauf mit Wasser von 60° umspült. Trotz einer grossen Empfindlich-



keit des Telephons waren nur bei Schliessen und Oeffnen des Kreises Geräusche hörbar.

Organgewicht (mit Rücken und Bauchhaut)
{ links (Nerven durchschnitten) = 75,1 gr.
{ rechts (Nerven undurchschnitten) = 70,4 gr.

Die Organtheile von Torpedo 37, deren Nerven 37 Tage zuvor durchschnitten worden waren, zeigten sich bei direkter und indirekter Reizung völlig unerregbar. Beim Erwärmen gab ein solcher Organstreifen einen verschwindend kleinen Strom. An den Organtheilen der rechten Seite war trotz der langen Gefangenschaft die Erregbarkeit gut erhalten.

Torpedo 51, marmorata, sehr gross, d. 19. XI. links alle Nerven durchschnitten, d. 7. XII. getötet, also 18 Tage nach der Durchschneidung.

Gewicht des linken Organes (Nerv durchschnitten) = 172,4 gr
„ „ rechten „ „ undurchschnitten) = 170,0 gr.

Beim Zerschneiden des Organes fühlte die das Organ haltende Hand bei jedem kräftigen Scheerenschnitt deutliche Stiche. Ich war in der Lage, Herrn Professor Schoenlein diese Erscheinung zu demonstriren. Die Erscheinung war bei dem normalen, wie bei dem pathologischen Organ vorhanden.

Reizung des elektrischen Organes vom Nerven aus.

Reizung des I. Nerven links (durchschnitten). $ED = 2,2$ cm.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven	
	absteig	aufsteig		absteig	aufsteig		absteig	aufsteig.
4,0	0	0	10,0	83	28	16,0	10	1
6,0	0	0	12,0	3	35	18,0	8	4
8,0	70	0	14,0	6	9	20,0	4	6
Nochmals:								
3,0	0	0	8,5	69	0	14,0	1	12
3,5	0	0	9,0	66	0	15,0	1	5
6,0	0	0	10,0	37	3	16,0	2	1
6,5	2	—	11,0	10	12	18,0	4	0
7,0	24	0	12,0	2	10	20,0	1	0
8,0	66	0	13,0	1	16	22,0	0	0

Reizung des I. Nerven rechts (undurchschnitten). $ED = 2{,}2$ cm.

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Nerven	
	absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.		absteig.	aufsteig.
3,0	0	0	9,0	85	24	16,0	7	2
3,5	3	0	10,0	45	56	18,0	15	3
6,0	17	0	11,0	10	83	20,0	10	2
7,0	70	4	12,0	4	64	22,0	0	2
8,0	109	20	14,0	5	7			

Zur Aichung: Ein totes Organstück gleicher Dimensionen wird bei rotirendem Rheotom mit 1 Daniell in den Bussolkreis eingeschaltet. Die Schliessung des Stromkreises giebt unter diesen Bedingungen ± 4,5 Skalentheile.

Reizung des IV. Nerven links (durchschnitten). $ED = 4{,}0$ cm.

4,0	5	0	8,0	50	23	14,0	9	3
4,5	45	1	9,0	15	50	16,0	18	3
5,0	110	3	10,0	3	58	18,0	8	8
6,0	170	4	11,0	6	43	20,0	1	7
6,0	130	3	12,0	6	28	21,0	1	1
7,0	120	10						

Reizung des IV. Nerven rechts (undurchschnitten). $ED = 4{,}0$ cm.

4,0	2	0	7,0	148	0	12,0	8	52
4,5	28	0	7,5	135	7	13,0	9	12
5,0	120	0	8,0	96	30	14,0	8	4
6,0	240 anfangs	0	8,5	62	46	16,0	16	6
			9,0	28	102	18,0	7	6
	180 später	0	10,0	8	137	20,0	7	5
5,5	131	0	11,0	4	110	21,0	3	6
6,5	180	0						

Zur Aichung: Ein totes Organstück ähnlicher Dimensionen wie die untersuchten wird mit 16 bezw. 50 Daniell'schen Elementen bei rotirendem Rheotom in den Bussolkreis eingeschaltet.

Die Schliessung giebt bei {16 Daniell ± 83 / 50 „ ± 320} Skalentheile Ablenkung.

Bei annährender Proportionalität der Elementenzahl zu der Ablenkungsgrösse würde hiernach 1 Daniell 5,2 bezw. 6,4 Skalentheilen entsprechen. Also im Mittel 1 Daniell = 5,8 Skalentheilen.

Die elektromotorische Kraft des Organes ist demnach (vgl. auch Schoenlein) sicher unter Umständen höher wie die von 30 Daniell'schen Elementen.

Direkte Organreizung.

Organstück vom IV. Nerven links innervirt (durchschnitten).

Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes		Zeit vom Reizmoment bis zur Bussolableitung in Tausendstel Secunden	Ablenkung in Skalentheilen nach Durchströmung des Organes	
	homo.	hetero.		homo.	hetero.		homo.	hetero.
0,5	$-x$	$+x$	3,0	41	45	6,0	7	4
1,0	0	0	4,0	34	35	8,0	1	3
2,0	15	18						

Organstück vom IV. Nerven rechts innervirt (undurchschnitten).

0,5	− 70	+ 60	3,0	+ 14	+ 8	6,0	+ 18	+ 22
1,0	− 3	+ 4	4,0	+ 55	+ 43	8,0	+ 17	+ 19
2,0	+ 1	+ 2	5,0	+ 46	+ 40	10,0	+ 1	+ 5

Die von den durchschnittenen Nerven von Torpedo 51 innervirten Organtheile gaben bei indirekter und direkter Reizung immer einen etwas schwächeren Strom wie die entsprechenden normalen Organtheile.

In allen Fällen war bei dem Thier die elektromotorische Kraft der Organe eine sehr hohe und überschritt sicher oft die von 30 Daniell'schen Elementen.

Allgemeine Beschreibung der Versuche am Capillarelektrometer.

Da die Rheotomversuche betreffs des veratrinisirten Organes wegen der ausserordentlich raschen Ermüdbarkeit nicht zu einer Erkenntniss des Schlagverlaufes führen konnten, so wurde versucht, allerdings mit ziemlich improvisirten Einrichtungen, den durch das Capillarelektrometer geschickten Schlag eines normalen und eines veratrinisirten Thieres auf einer vorbeischwingenden Platte photographisch zu verzeichnen.

Die Abschwächung des durch das Capillarelektrometer gehenden Stromes wurde in ähnlicher Weise ausgeführt, wie von Burch und Gotch bei einem Theile der am Malapterurus vorgenommenen Versuche.

Man führt einen hohen Widerstand in den Stromkreis ein, welcher das Organ und das Capillarelektrometer enthält. Wird dann bei einer solchen Anordnung vor dem Capillarelektrometer eine Nebenschliessung eingeführt, so gelingt es leicht, durch Veränderung des Widerstandes der Nebenschliessung in dem durch das Capillarelektrometer gehenden Stromzweige das Potentialgefälle beliebig abzuändern.

Die von Burch warm empfohlene Condensatoranordnung habe ich in Neapel nicht benutzt, da ich nach Erfahrungen am Galvanometer, welches dazu noch im trockensten Raume untergebracht war, wusste, wie schwer es war, bei der feuchten warmen Seeluft eine strenge Isolation, wie sie bei der Condensatorvorrichtung Grundbedingung ist, herbeizuführen.

Als Beleuchtung diente mir trotz der vorgerückten Jahreszeit (Dezember) das in Neapel noch sehr kräftig wirkende Sonnenlicht. Dasselbe wurde mit einem kleinen Heliostaten durch einen Fensterausschnitt in die Dunkelkammer geworfen, und nachdem es einen mit Wasser gefüllten Glastrog passirt hatte, durch eine Sammellinse auf der Capillare concentrirt.

Das Capillarelektrometer hatte ich mir nach dem von Burch (s. o.) angegebenen Muster gefertigt und in einfacher Weise selbst auf dem grossen Zeiss'schen Stativ für Mikrophotographie befestigt. Es war so möglich, durch Hebung und Senkung, Rechts- und Linksbewegung und Drehung die günstigste Stelle der Capillare in genau vertikaler Lage einzustellen. War diese Einstellung erreicht, so wurden alle Aufnahmen an genau der gleichen Capillarstelle vorgenommen. Als Widerstand im Hauptkreis diente eine mit Zinksulfatlösung gefüllte lange Glasröhre mit unpolarisirbaren Ableitungen. Als Nebenschliessung war bei allen Aufnahmen vor dem Capillarelektrometer ein Kurbelrheostat mit 200 Ohm Widerstand eingeschaltet. Das Bild der Capillare wurde auf einen Spalt von 0,2 mm Breite scharf eingestellt, hinter welchem die an einem Pendel befindliche Trockenplatte vorbeischwang. Kurz nachdem der erste Theil der Platte den Spalt passirt hatte, wurde eine gut leitende Nebenschliessung (Platincontact) des zur Reizung dienenden Stromes von dem Pendel geöffnet und entweder der Strom selbst oder ein durch denselben erzeugter Inductionsschlag durch den Nerven des Organpräparates geleitet. Dieser Moment wird durch ein Emporgehen des Schoenlein'schen sehr empfind-

lichen Telephonschreibers (T auf den Abbildungen, Tafel III—IV), der sich vor dem Spalt befand, markirt. Bei Reizung mit dem Schliessungsinductionsschlag wurden im Hauptkreis 6 Elemente verwendet, bei Reizung mit dem constanten Strom wurden 50 Elemente in den Reizkreis aufgenommen. Zur Zeitmarkirung diente eine vor dem Spalt schwingende Stimmgabel, welche, wie ein Versuch bei verlangsamter Pendelbewegung mit gleichzeitiger Einschaltung des Fünftelsecunden schreibenden Jacquet'schen Zeitmarkirers ergab, 113,25 Halbschwingungen in der Secunde ausführte. Eine Halbschwingung entspricht also 0,00883″. Die Stimmgabelcurve ist in den Abbildungen mit S bezeichnet.

Zur Aichung des Elektrometers wurde in dem oben geschilderten Stromkreis ein Daniell'sches Element an Stelle des Organs eingefügt und dessen Pole zunächst durch die am Pendelapparat befindliche gut leitende Nebenschliessung kurz geschlossen. Während des Vorbeischwingens der Platte wird die Nebenschliessung durch Aufschlagen des Contactes beseitigt. Von diesem Moment ab besteht im Stromkreis die constante Potentialdifferenz von 1 Daniell, und ein durch die constanten Widerstände fest bestimmter Theil der Potentialdifferenz wirkt jetzt dauernd auf das Elektrometer ein. Da am Ende der vorbeischwingenden Platte noch lange nicht die neue Gleichgewichtslage für den Quecksilbermeniscus erreicht ist, so wird bei Zwischenschaltung eines rothen Glases die Plattenmitte nochmals hinter den Spalt gebracht und mit Bleistift die neue Ruhelage (E Figur 3, Tafel III) markirt. Die 2 Tage nacheinander so gemachten Aichungscurven stimmen gut mit einander überein. Zur allgemeinen Orientirung sei noch erwähnt, dass die Bewegung des Quecksilbermeniscus (H auf den Abbildungen) gegen die Spitze der Capillare auf den Abbildungen einer Bewegung der Linie H nach aufwärts entspricht und durch einen in der Schlagrichtung des Organs den Stromkreis durchfliessenden Strom hervorgerufen wird.

Zur Messung der Curven diente ein nach dem Muster von Burch gebauter Messtisch, dessen Beschreibung sowie die des Messverfahrens sich in der citirten Abhandlung von Burch vorfindet.

Die Messung der Curven stiess bei meinen Aufnahmen insofern auf Schwierigkeiten, als bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung des Pendels im Gegensatz zu der von Burch benutzten Kreisbewegung mit constanter Geschwindigkeit zunächst durch

Ausmessung einer Reihe von Coordinatenwerthen die Curve in eine solche mit constanter Geschwindigkeit hätte übergeführt werden müssen, und dann erst hätte man an dieser die entsprechenden Messungen ausführen können. Da die Aenderungen der Geschwindigkeit an der Stelle des Schlages nicht sehr bedeutend waren, habe ich auf jene Reduction der Curve auf eine solche mit constanter Geschwindigkeit verzichtet und habe direkt an der Platte die Messungen vorgenommen.

Wie von vornherein bemerkt sei, war bei der von mir vorgesehenen primitiven Einrichtung Hauptzweck, zunächst festzustellen, ob, wie die Resultate am Rheotom vermuthen liessen, grobe Unterschiede zwischen dem Schlag des normalen und des veratrinisirten Organes vorhanden wären und hierzu reichte, wie ich glaube, meine Einrichtung völlig aus. Die aus den Elektrometercurven auf Grund der Aichung berechneten Curven, die den zeitlichen Verlauf des Schlages wiedergeben sollen, stellen also nur grob angenähert das zeitliche Verhalten der elektromotorischen Kraft des Organes während eines Schlages dar.

Verzeichniss der zu Capillarelektrometer-Versuchen verwendeten Thiere.

Torpedo 57, ocellata klein, d. 5. XII. links alle Nerven durchschnitten, d. 6. XII. 7 cbcm einer Veratrinlösung 1 : 500 in die linke Kiemenarterie injicirt. Nach $^1/_4$ Stunde, als das Thier getödet wurde, schlug das Herz noch.

Hierzu Versuch Nr. 1 und 8 (Taf. III).

Torpedo 58, ocellata gross, d. 5. XII. links alle Nerven durchschnitten, d. 6. XII. 15 cbcm Veratrinlösung 1 : 500 injicirt.

Hochgradige Vergiftung. Direkte Beobachtung am Capillarelektrometer zeigte, dass von den vergifteten Organtheilen der linken Seite nur wenige kräftige Reizerfolge (1 oder 2) zu erhalten waren, dieselben erschienen am Capillarelektrometer als ein dauernder sicher über eine Secunde anhaltender Strom.

Hierzu Versuch Nr. 7 (Taf. III).

Torpedo 60, marmorata gross, d. 6. XII. links alle Nerven durchschnitten, d. 7. XII. 7 cbcm Veratrinlösung 1 : 500 sehr langsam eingespritzt.

Hierzu Versuch 13 und 14 (Taf. IV).

Torpedo 48, ocellata mittelgross, d. 16. XI. links alle Nerven durchschnitten, getötet d. 9. XII., also 23 Tage nach Durchschneidung.

Befund: Gewicht des linken Organes (Nerv durchschnitten) 60,2 gr
„ „ rechten „ (normal) 52,0 „
Bei einem normalen Thier: Gewicht des linken Organes 83,3 „
„ „ rechten „ 82,15 „

Direkte Beobachtung am Capillarelektrometer zeigte, dass bei der Nervenreizung rechterseits die Organtheile von Torpedo 48 noch gut erregbar waren. An der linken Seite, wo die Nerven durchschnitten worden waren, waren dagegen die Organtheile bei der Nervenreizung völlig unerregbar. Auch die Erwärmung eines Organstreifens der linken Seite auf 60° gab am Capillarelektrometer keine Reaction mehr.

Bestimmung der Constanten nach der Aichungscurve Nr. 3.

Nach Burch ist $V = K \cdot \Delta r + lN$, wo V die gesammte elektromotorische Kraft in einem bestimmten Punkte der Curve bedeutet. Δr ist der Abstand vom „Nullkreis" in Theilstrichen des Maassstabes, N ist die Zahl der Theilstriche der für den gegebenen Punkt gemessenen Subnormale der Tangente, K und l sind die zu bestimmenten Constanten.

Ist der Quecksilbermeniscus nach Schliessung des ein Daniell enthaltenden Stromkreises zu Ruhe gekommen, so wird $N = 0$, also $V = K \cdot \Delta r = 1$ Daniell (1 D), also ist (1) $K = \frac{1}{\Delta r}$, im vorliegenden Fall kommt der Meniscus nach Steigung um 53,5 mm zur Ruhe, also $K = \frac{1}{53,5}$.

Nun wird die Constante l aus einer Zahl von Messungen an der Curve an verschiedenen Punkten berechnet, nach der Gleichung

$$l = \frac{1 - \frac{\Delta r}{53,5}}{N}.$$

Δr	Gemessen: N	Berechnet: l
6,65	87	0,0000
17,25	71	0,0096
13,75	66	0,0112
6,75	84	0,0095
1,5	104	0,0093
	Mittelwert:	0,00992 abgekürzt $l = 0,01$.

Erläuterung der Abbildungen.

Tafel I.

Fig. 1. In 2 %iger Osmiumsäure fixirte und nach Isolation in Carbolwasser untersuchte Platte des elektrischen Organs von Torpedo 37. Das Thier war 37 Tage nach der Nervendurchschneidung getötet worden. Ein letztes markhaltiges Aestchen zeigt noch deutlich den Markzerfall und ermöglicht es, schärfer die Stelle, an welcher die Markscheide aufhört, zu erkennen, als an der daneben gezeichneten normalen Platte (Abbildung 2). Das feinere marklose Geäst lässt im Vergleich zur normalen Platte bei der schwachen Vergrösserung keine Veränderung erkennen.

Fig. 2. Platte eines normalen Organs wie in Fig. 1 behandelt, ebenfalls schwache Vergrösserung.

Fig. 3. Normale Platte, in 2 %iger Osmiumsäure fixirt, in Wasser isolirt, mit Haematoxylin gefärbt und in Wasser beobachtet. Mit Zeiss Apochromat 1,40 Apert. und Compens. Ocular 6 gezeichnet. Die Abbildung zeigt den Uebergang eines marklosen Aestchens in die Endausbreitung. Die die Endausbreitung begleitenden Punkte stellen die Boll'sche Punktirung (Pallisaden) in der Flächenansicht dar.

Fig. 4. Pathologische Platte von Torpedo 37. Dieselbe Vorbehandlung u. s. w. wie bei Fig. 3. 37 Tage nach der Nervendurchschneidung. Die letzten marklosen Nerven sind angeschwollen und zeigen vielfach Vacuolen, wie sie theilweise in der Endausbreitung selbst zu liegen scheinen.

Die Abbildungen auf Tafel II—IV sind in der Reproduction in $^{2}/_{5}$ der natürlichen Grösse wiedergegeben worden.

Tafel II.

Curve I zeigt, dass bei Torpedo 55 nach Injection der 3 cbcm 5 %iger Curarelösung die centale Erregbarkeit, wie sie sich in Entladungen des electrischen Organs äussert, ausserordentlich gesteigert ist. *B* Secundenmarkirung, *A* Telephoncurve. Jeder nach abwärts gerichtete Strich der letzteren entspricht einer Entladung. Von *a* bis *b* wurde nach dem Takte des Zeitschreibers leicht auf den Tisch geklopft und durch jede noch so leise Erschütterung, wie die nach abwärts gehenden Striche an der Linie *A* zeigen, wird je eine Entladung hervorgerufen. Aehnliche immer schwächer werdende Entladungen werden bei *c*, *d*, *e*, *f* und *g* erhalten.

Curve II und III. Normale Herzschläge bei Befestigung des Ventrikels an zwei Häkchen und Verbindung mit einem leichten Schreibhebel. Darüber Secundenmarkirung.

Curve IV. Herzschlag einer Torpedo nach Vergiftung mit 10 mmg Veratrin; künstliche Reizung. Bei I erfolgt der erste Herzschlag, der, wie die Secundenmarkirung lehrt, 30″ dauert. Je mehr Herzschläge ausgelöst werden, desto kürzer

und zugleich schwächer werden dieselben. Auf der letzten obersten Reihe ist über der Zeitmarkirung eine Reizmarkirung geschrieben. Senkung oder Emporgehen dieser Linie bedeutet Reizung mit einem Schliessungs- bezw. Oeffnungsinductionsschlag. Demonstration der langen Unerregbarkeit.

Curve V. Bauchmuskel der Torpedo 50 (2 mmg Veratrin in 1 Stunde injicirt) 6 Muskel„zuckungen" nach direkter Muskelreizung mit Oeffnungsinductionsschlag, fortlaufend I—VI nummerirt. Abnahme der absoluten Höhe und Dauer der Zusammenziehungen, vgl. die darüber stehende Secundenmarkirung.

Tafel III—IV.

Schlagcurven von elektrischen Organen am Capillarelektrometer beobachtet. Auf den Photographien giebt *H* die Bewegung des Quecksilbermeniscus wieder, Bewegung des Quecksilbers nach oben entspricht einem Strom in der Richtung des Schlages. *S* Stimmgabelcurve, eine Halbschwingung gleich 0,0088″. Emporgehen von *T* (Telephonschreiber) markirt den Reizmoment. Meist direkt neben den Aufnahmen sind die zugehörigen aus ihnen berechneten Curven des Schlagverlaufes wiedergegeben.

Tafel III.

1a und b. Schlag der mit Veratrin vergifteten Torpedo 57.

3. Aichungscurve. Dauerschliessung eines Daniell an Stelle des Organes in den Stromkreis eingeschaltet. *E* Einstellung des Quecksilbers bei dauernder Schliessung.

2a und b. Schlag eines normalen Organes.

7a und b. Schlag der mit Veratrin vergifteten Torpedo 58.

8a und b. Schlag der mit Veratrin vergifteten Torpedo 57, mehrere Stunden nach der Präparation.

9a und b. Schlag eines kleinen normalen Organes.

Tafel IV.

10a und b. Reflexschlag einer kräftigen lebenden Torpedo bei Ableitung des Stromes aus einem mit Seewasser gefüllten Bassin.

13. Drei über einander geschriebene Schläge der mit Veratrin vergifteten Torpedo 60. Die hierzu berechneten Curven 13I, II, III. Bei jedem folgenden Schlage beginnt das Absinken des Quecksilbers zeitiger, bei *a*, *b*, *c* in den Curven 13I, II, III.

14. Schlag der mit Veratrin vergifteten Torpedo 60 (anderer Organtheil wie bei 13). Es wurde nur die abgeleitete Curve hier wiedergegeben.

28. Schlag von einer normalen Torpedo. Reizung des Nerven durch Schliessung eines im Nerven absteigenden constanten Stromes. Da während der Aufnahme noch eine Dauerschliessung des Reizstromes bestehen bleibt, so tritt im Capillarelektrometerkreis ein kleiner Stromzweig des Reizstromes auf, so dass dauernd eine schwache, dem Schlage entgegengesetzt gerichtete elektromotorische Kraft beobachtet wird.

Litteraturverzeichniss.*)

1. Abelous. Contribution à l'étude de la fatigue. Archives de Physiologie norm. et path. 1893. S. 437.
2. Babuchin. Uebersicht der neueren Untersuchungen über Entwickelung, Bau und physiologische Verhältnisse der electrischen und pseudoelectrischen Organe. Du Bois-Reymond's Archiv 1876. S. 501.
3. Babuchin. Entwickelung der electrischen Organe und Bedeutung der electrischen Endplatte. Medicinisches Centralblatt 1870.
4. Babuchin. Ueber die Bedeutung und Entwickelung der pseudoelectrischen Organe. Medic. Centralblatt 1872.
5. Babuchin. Ueber den Bau der electrischen Organe beim Zitterwels. Medic. Centralblatt 1875.
6. Babubhin. Die Säulenzahl im electrischen Organ von Torpedo marmorata. Medic. Centralblatt 1882.
7. Babuchin. Zur Begründung des Satzes von der Präformation der electrischen Elemente im Organe der Zitterfische. Du Bois-Reymond's Archiv 1883.
8. Babuchin. Beobachtungen und Untersuchungen am Zitterwelse und Mormyrus des Nils. Du Bois-Reymond's Archiv 1877.
9. Babuchin. Ueber die Präformation der electrischen Elemente u. s. w. Du Bois-Rexmond's Archiv 1882.
10. Burdon-Sanderson und Gotch. On the electrical Organ of the skate. Journal of Physiologie. IX. 1888. S. 137.
11. Desgl. Journal of Physiologie. X. Nr. 4.
12. Boll. Neue Untersuchungen über die Structur der electrischen Platten von Torpedo. Archiv für Anatomie und Physiologie 1876.
13. Boll. Neue Untersuchungen zur Anatomie und Physiologie von Torpedo. Monatsber. der Berliner Akad. 1875.
14. Boll. Die Structur der electrischen Platten von Malapterurus. Archiv für mikr. Anat. Bd. X. 1874.
15. Burch und Gotch. The electromotive properties of malapterurus. Philosoph. Transactions of the Royal Society of London 1896.
16. Burch. On the time relations of the excursions of the capillary-electrometer etc. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1892.
17. Burch. The Capillary Electrometer in Theorie und Practice. London 1896. Reprinted from „The Electrician".
18. Du Bois-Reymond. Vorläufiger Bericht über die von Prof. Fritsch in Egypten angestellten neuen Untersuchungen an electr. Fischen. Monatsber. der Berlin. Akad. 1881 und Du Bois' Archiv 1882. S. 61.

*) Das Verzeichniss enthält eine Reihe von Arbeiten, auf die im Text nicht Bezug genommen wurde. Demjenigen, der sich mit der Physiologie der Zitterfische befasst, wird aber eine ausführliche Zusammenstellung nur willkommen sein.

19. Du Bois-Reymond. Ueber secundär-electromotorische Erscheinungen an Muskeln, Nerven und electrischen Organen. Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Akad d. W. zu Berlin. Bd. XVI. 1883. S. 1 flg.

20. Du Bois-Reymond. Lebende Zitterrochen in Berlin. Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Akad. d. W. zu Berlin. Bd. XVI. 1884. 13. März.

21. Du Bois-Reymond. Lebende Zitterrochen in Berlin. 2. Mittheilung. Ebenda 1885. 16. Juli.

22. Du Bois-Reymond. Bemerkungen über einige neuere Versuche an Torpedo. Ebenda 1888.

23. C. Sachs. Untersuchungen am Zitteraal, mitgetheilt von Du Bois-Reymond. Leipzig 1881.

24. Du Bois-Reymond's gesammelte Abhandlungen. 1877. Bd. II.

25. Du Bois-Reymond. Lebende Zitterrochen in Berlin. 3. Mittheilung. Du Bois-Reymond's Archiv 1887.

26. Du Bois-Reymond. Vorläufiger Bericht über die von Prof. Fritsch angestellten neuen Untersuchungen an electrischen Fischen. Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Akad. d. W. zu Berlin 1891. S. 233.

27. Bezold und Hirt. Ueber die physiolog. Wirkung des essigsauren Veratrins. Untersuchungen aus dem physiol. Laboratorium zu Würzburg. Bd. I. 1867.

28. Boehm. Chemische Studien über das Curare. Beiträge zur Physiologie. C. Ludwig gewidmet. 1887. S. 42.

29. Boehm. Einige Beobachtungen über die Nervenendwirkung des Curarin. Archiv f. exper. Path. u. Pharmokol. Bd. XXXV. 1894. S. 16.

30. Ballowitz. Ueber den Bau des electrischen Organes von Torpedo, mit bes. Berücksichtigung der Nervenendigungen in demselben. Archiv f. mikr. Anat. 1892. Bd. 42.

31. Ballowitz. Die Nervenendigungen in dem electrischen Organ des afrikanischen Zitterwelses. Anatom. Anzeiger 1898. Nr. 7.

32. Ballowitz. Ueber das Vorkommen echter peripherer Nervenendnetze. Anatom. Anzeiger 1894. Bd. IX.

33. Biedl. Ueber die Centra der Nervi splanchnici. Wiener Klin. Wochenschrift 1895. Nr. 52.

34. Bernstein. Die Erregungszeit der Nervenorgane in den Muskeln. Du Bois-Reymond's Archiv 1882.

35. Bilharz. Das electrische Organ des Zitterwelses. Leipzig 1857.

36. Biedermann. Ueber die electr. Erregung des Schliessmuskels von Anodonta. Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. W. zu Wien. Bd. 91. III. Abth. 1885.

37. Biedermann. Beiträge zur allgem. Nerven- und Muskelphysiologie. 18. Mittheilung. Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. W. zu Wien. Bd. 92. III. Abth. S. 142.

38. Biedermann. Desgl. 19. Mittheilung. Ebenda 1886.

39. Biedermann. Electrophysiologie. 1895.

40. Ciaccio. Osservazione intorno al modo come terminano i nervi motori ne muscoli striati delle torpedini e delle razze e intorno alla somiglianza tra la piastra elettrica e la motrici. Memoria dell' Academia de Scienze di Bologna. Ser. III. Bd. 8.

41. Ciaccio. La terminaison des nerfs dans les plaques électriques de la torpille. Journal de Micrographie 1888. Bd. XII. S. 433.

42. Ciaccio. Se la terminazioni dei nervi nelle piastre elettriche delle torpedini etc. Lo Spallanzani Roma Fasc. I. 1889. S. 1—6.

43. CREVATIN. Ueber das sogenannte Stäbchennetz im electr. Organ der Zitterrochen. Anat. Anzeiger 1898. Nr. 9. S. 243.

44. CARVALLO und WEISS. Action de la vératrine sur le muscle blanc et le muscle rouge du lapin. Comptes rend. de la société de biologie. 21. Mai 1898.

45. EWALD. Ueber den Modus der Nervenverbreitung im electrischen Organ von Torpedo. Heidelberg 1881.

46. EWART. The electrical organs of the skate. Philosophical Transactions 1892. S. 389.

47. ENGELMANN. Die Blätterschicht der electrischen Organe in ihrer genetischen Beziehung zur quergestreiften Muskelsubstanz. PFLÜGER's Archiv 1894. S. 149.

48. EISENMENGER. Ueber den Einfluss einiger Gifte auf die Zuckungscurve des Froschmuskels. Inauguraldiss. Giessen 1869.

49. FICK und BÖHM. Ueber die Wirkung des Veratrins auf die Muskelfaser. Verhandl. der physik.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Bd. III. 1872.

50. FRITSCH. Die electrischen Fische. Leipzig, Veit & Co. 1890.

51. FRITSCH. Weitere Beiträge zur Kenntniss der schwach electrischen Fische. Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1891.

52. FUCHS. Ueber den zeitlichen Verlauf des Erregungsvorganges in marklosen Nerven. Sitzungsber. der Wiener Akad. 1893/94. III. Abth. S. 207.

53. GOTCH und BURDON-SANDERSON. The electromotive properties of the electrical Organ of Torpedo marmorata. Philosoph. Transactions. Vol. 178. S. 487. 1887.

54. GOTCH. Experiments on curarised Torpedos. Proced. of the Physiolog. Society 1888. Nr. II.

55. GOTCH. Further observations on the elektromotive properties of Torpedo. Philosophial Transactions. Vol. 179. 1889. p. 329.

56. GREHAUT ET JOLYET. Formation de l'urée par la décharge électrique de la torpille. Comptes rendus de la Societé de Biologie Paris 1891. Bd. 3. 9. Ser. S. 687.

57. C. FRANZ HOFMANN. Zuckungs- und Gewebsbeschaffenheit des entnervten Kaltblütermuskels. Archiv f. experiment. Pathologie. 1894. Bd. 33. S. 117.

58. HELD. Beiträge zur Structur der Nervenzellen und ihrer Fortsätze. 1. Abth. HIS und BRAUNE's Archiv 1895. S. 396.

59. HELD. Desgl. II. Mittheil. Ebenda 1897. S. 203.

60. HERMANN. Neue vermeintliche Argumente für die Molekulartheorie des Muskels und Nervenstromes. PFLÜGER's Archiv. Bd. 26. 1881. S. 483.

61. HERMANN. Ueber sogenannte electromotorische Erscheinungen am Muskel und Nerven. PFLÜGER's Archiv. Bd. 33. 1884. S. 103.

62. HERING. Beiträge zur allgem. Nerven- und Muskelphysiologie. 12. Mittheilg. Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 88. 1883. S. 415.

63. HERING. Desgl. 13. Mittheilg. Ebenda. S. 445.

64. HERING. Ueber das electromotorische Verhalten curarisirter Muskeln nach galvanischer Durchströmung. PFLÜGER's Archiv. Bd. 58. 1894. S. 48.

65. IWANZOFF. Der mikroskopische Bau des electrischen Organes von Torpedo. Moskau 1895. Extrait du Bulletin de la société impériale des Naturalistes de Moscou. 1894. Nr. 4.

66. W. KRAUSE. Die motorischen Endplatten der quergestreiften Muskeln. Hannover 1869.

67. W. KRAUSE. Die Nervenendigung im electrischen Organ. Internationale Monatsschrift f. Anat. und Histolog. 1886. Bd. III.
Desgl. II. Theil. 1887.

68. W. Krause. Ueber die Folgen der Resection der electrischen Nerven des Zitterrochen. Göttingen 1886. Sitzungsber. d. Kais. Akad. zu Berlin und Du Bois-Reymond's Archiv 1887.
69. W. Krause. Die Nervenendigung im electr. Organ. Internationale Monatsschrift für Anat. und Hist. Bd. 8. 1891/92.
70. Kühne. Ueber das Verhalten des Muskels zum Nerven. Heidelberger Untersuchung. Bd. III. 1880.
71. Kühne und Steiner. Beobachtungen über markhaltige und marklose Nervenfasern. Ebenda S. 149.
72. Kühne. Die Verbindung der Nervenscheiden mit dem Sarkoleum. Zeitschr. für Biologie. Bd. XIX. S. 501. 1883.
73. Köllicker. Ueber die Endigung der Nerven im electrischen Organe der Zitterrochen. Verhandlungen der physikal.-medic. Gesellschaft in Würzburg. Bd. 8. 1858.
74. Laury. Lésions medullaires expérimentales. Archiv de physiologie 1897.
75. Leone de Sanctis. Embriogenia degli Organi elettrici delle Torpedini et degli organi pseudoelettrici etc. Napoli 1872.
76. Lissauer. Untersuchungen über die Wirkungen der Veratrumalkaloide. Archiv f. exper. Pathol. XXIII. 1887.
77. Marey. Sur les caractères des décharges électriques de la torpille. Comptes rend. 84. 1877. S. 359.
78. Marey. Sur la décharge de la torpille étudiée au moyen de l'électromètre de Lippmann. Ebenda. S. 359.
79. Marey. Nouvelles recherches sur les poissons électriques, caractères de la décharge du Gymnote, effets d'une décharge de torpille lancée dans une téléphone.
80. Marey. Détermination de la durée de la décharge électrique chez la torpille. Comptes rend. 1871. Tome LXXIII.
81. Moreau. Recherches sur la nature de la source electrique de la torpille et manière de recueillir l'eléctricité produite par l'animal. Annales des sciences naturelles quatrième Série Tome XVIII. 1862.
82. Matteucci. Sur l'électricité de la torpille. Comptes rend. LXI. 1865. S. 627.
83. Muskens. Zur Kenntniss der electrischen Organe. Tijdschrift der Nederlandschen Dierkundige Verenigung. Deel IV. 1893—94. 2. Serie.
84. Marfori. Influence de la vératrine cristallisée sur les caractères des muscles. Archives Ital.de Biologie. Bd. XV. 1891. p. 267.
85. Nissl. Ueber die Veränderungen der Ganglienzellen am Facialiskern des Kaninchens nach Ausreissung der Nerven. Zeitschrift für Psychiatrie. 1892. Bd. 48. S. 197.
86. Nissl. Ueber experimentell erzeugte Veränderungen an den Vorderhornzellen des Rückenmarkes bei Kaninchen u. s. w. Ebenda. S. 675.
87. Nikolski und Dogiel. Zur Lehre über die physiologische Wirkung des Curare. Pflüger's Archiv. Bd. 47. 1890. S. 42.
88. Ogneff. Ueber die Entwickelung des electrischen Organes bei Torpedo. Du Bois-Reymond's Archiv 1897. S. 270.
89. Overend. Ueber den Einfluss des Curare und Veratrins auf die quergestreifte Muskulatur. Archiv f. exper. Pathol. und Pharmak. 1890. Bd. XXVI.
90. Ranvier. Sur les terminaisons nerveuses dans les lames électriques de la torpille. Comptes rend. Tome LXXXI. 1875.

91. Ranvier. Traité technique d'histologie. 1875.
92. Röhmann. Ueber den Stoffumsatz in dem thätigen electrischen Organ des Zitterrochen u. s. w. Du Bois-Reymond's Archiv 1893. S. 423.
93. Robin. Démonstration experimentale de la production d'électricité par un appareil propre aux poissons du genre des Raies. Comptes rend. Tome LXI.
94. Remak. Ueber die Enden der Nerven im electrischen Organ des Zitterrochen. Müller's Archiv f. Anat. 1856. S. 467.
95. M. Schultze. Zur Kenntniss des den electrischen Organen verwandten Schwanzorganes von Raja clavata. Müller's Archiv 1858. S. 193.
96. Schoenlein. Beobachtungen und Untersuchungen über den Schlag von Torpedo. Zeitschr. f. Biologie. Bd. XXXI. N. F. XIII. S. 449.
97. Schoenlein. Desgl. II. Mittheilung. Ebenda. Bd. XXXIII. S. 408.
98. Sokolow. Sur les transformations des nerfs dans les muscles de la grenouille après la section des nerfs. Archiv de physiologie 1874. p. 300.
99. Steiner. Zur Wirkung des Curare. Heidelberger Untersuchungen. Bd. III. S. 394.
100. Santesson. Einige Beobachtungen der Ermüdbarkeit der motorischen Nervenendigungen und der Muskelsubstanz. Skandinav. Archiv für Physiologie. Bd. V. 1895.
101. Schultze. Zur Kenntniss der electr. Organe der Fische. Abhandlung. der naturf. Gesellsch. zu Halle. Bd. IV. S. 39.
102. Wiener. Erklärung der Umkehr des Zuckungsgesetzes bei der Entartungsreaction. C. W. Vogel, Leipzig. 1898.
103. Willem und Schoenlein. Beobachtungen über den Kreislauf und die Respiration bei einigen Fischen. Zeitschr. für Biologie. XXXII. S. 511.
104. Warrington. On the structural alterations observed in nerve-cells. Journal of Physiologie. Vol. XXIII. S. 112.
105. Weyl. Physiologische und chemische Studien am Torpedo. Du Bois-Reymond's Archiv 1883 u. 1884.
106. Waller. Experiments and observations relating to the process of fatigue and recovering. British medical Journal 1885. S. 135.
107. Tilli. Ueber die Wirkung des Curare und seiner Alkaloide. Archiv für experiment. Patholog. u. Pharmak. Bd. XXVII. S. 1. 1890.
108. Gessler. Die motorische Endplatte und ihre Bedeutung für die periphere Lähmung. Leipzig, C. W. Vogel. 1885.

Inhaltsverzeichnis.



Fig. 1. Flächenansicht einer elektr. Platte, 37 Tage nach Durchschneidung des zugehörigen Nerven, bei schwacher Vergrösserung.

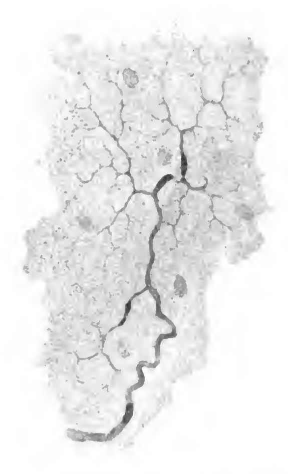


Fig. 2. Flächenansicht einer normalen elektrischen Platte bei schwacher Vergrösserung.

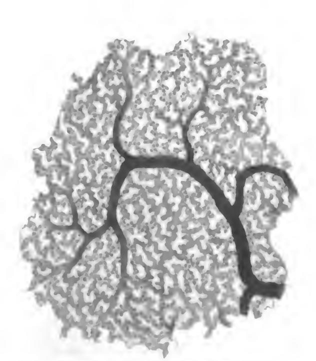


Fig. 3. Flächenansicht einer normalen elektrischen Platte bei starker Vergrösserung.

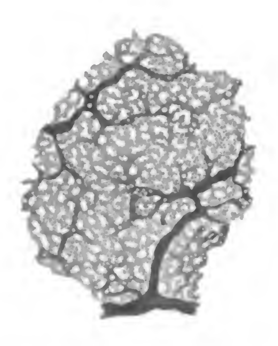
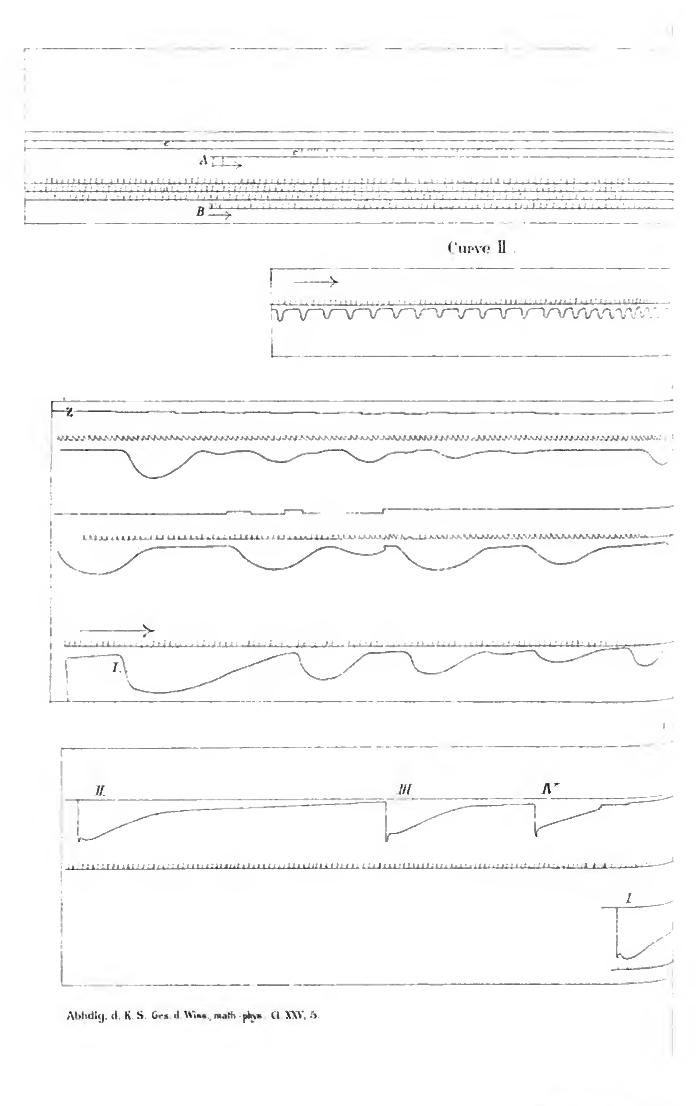


Fig. 4. Flächenansicht einer elektrischen Platte, 37 Tage nach Durchschneidung des zugehörigen Nerven, bei starker Vergrösserung.


e
e
A
B
Curve II.
z
I.
II.
III
IV
I

f g

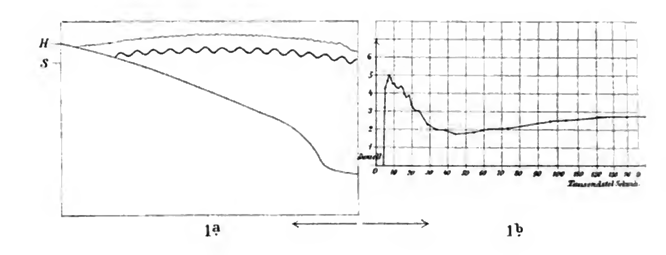
a b

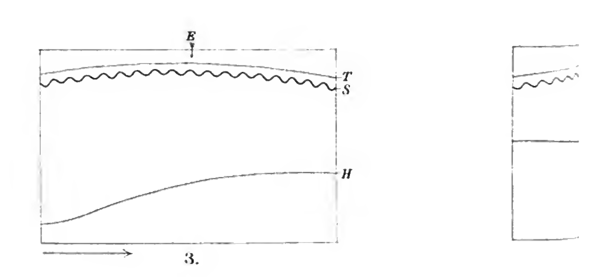
Curve III.

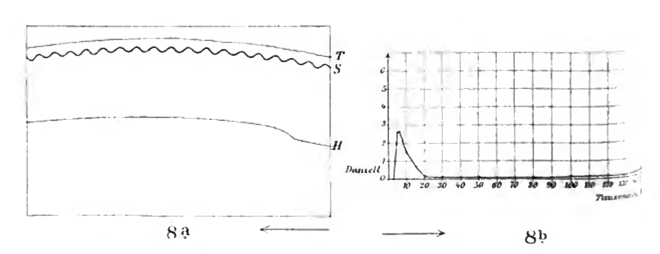
Z

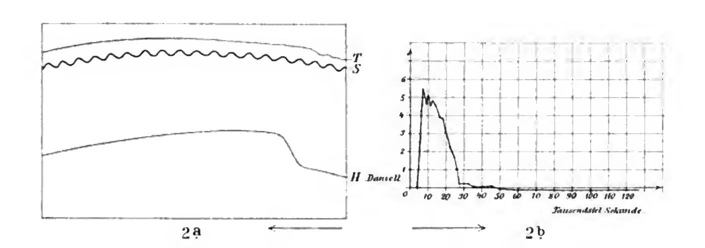
17

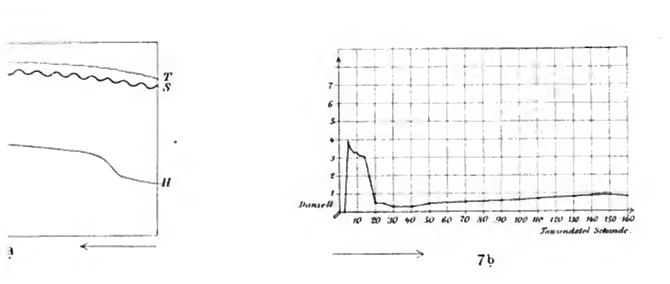
Lith. Eschebach & Schäfer, Leipzig

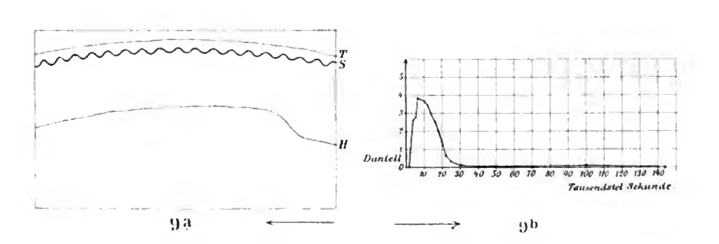

H
S
Daniell
Tausendstel Sekunde
1a
1b

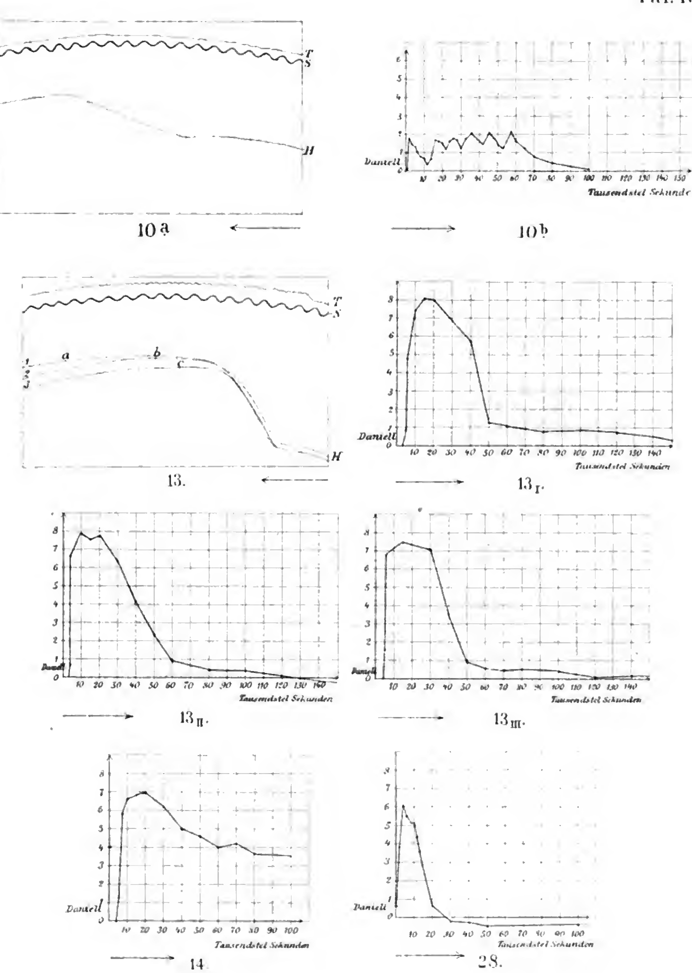

E
T
S
H
3.


T
S
H
Daniell
8a
8b


T
S
H
Daniell
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120
Tausendstel Sekunde
2a
2b


T
S
H
Daniell
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160
Tausendstel Sekunde.
7b


T
S
H
Daniell
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140
Tausendstel Sekunde.
9a
9b



T
S
H
Daniell
Tausendstel Sekunde
10 a
10 b
a
b
c
13.
Tausendstel Sekunden
13 I.
13 II.
13 III.
14.
28.

ZUR THEORIE

DES LEGENDRE-JACOBI'SCHEN SYMBOLS $\left(\frac{n}{m}\right)$

VON

W. SCHEIBNER.

Des XXV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° VI.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1900.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 23. Oktober 1899.
Das Manuscript eingeliefert am 25. November 1899.
Den letzten Bogen druckfertig erklärt am 4. Januar 1900.

ZUR THEORIE

DES LEGENDRE-JACOBI'SCHEN SYMBOLS $\left(\frac{n}{m}\right)$

VON

W. SCHEIBNER.

Die Eigenschaften der zahlentheoretischen Function $\left(\frac{n}{m}\right)$ haben seit EULER eine grosse Anzahl der hervorragendsten Mathematiker beschäftigt, unter denen hier nur die Namen von GAUSS, LEGENDRE, JACOBI, CAUCHY, DIRICHLET, EISENSTEIN, KUMMER, KRONECKER, SCHERING . . . angeführt werden mögen. Im zweiten Bande von GAUSS' Werken S. 313—374 finden sich aus dem Nachlasse abgedruckt eine Reihe von Untersuchungen über biquadratische Reste, in denen der sogenannte „*Decident* des biquadratischen Verhältnisses" zweier complexer *relativer* Primzahlen von der Form $p + qi$ definirt wird. Diese Definition steht im engsten Zusammenhange mit dem auf biquadratische Reste angewandten, und von JACOBI auf den Fall zusammengesetzter Nenner ausgedehnten, LEGENDRE'schen Symbol, indem für

$$\left(\frac{n}{m}\right) = i^{\varrho} \quad \text{die Zahl} \quad D\left(\frac{n}{m}\right) \equiv \varrho \mod 4$$

den Decidenten bedeutet. Der zugehörige Reciprocitätssatz[1]) wird in der Form

$$D\left(\frac{n}{m}\right) - D\left(\frac{m}{n}\right) = 0 \text{ oder } 2$$

aufgestellt (S. 332) und bewiesen (S. 367), ohne m und n als *absolute* Primzahlen vorauszusetzen, wie z. B. S. 371 ausdrücklich betont ist. In der 1828—31 publicirten *Theoria residuorum biquadraticorum* (cf. Art. 67 und 71) wird allerdings an dieser Primzahlqualität festgehalten, indess eine Fortsetzung der Untersuchung mit dem vollständigen Beweise des Reciprocitätsgesetzes verhiessen.

Der verdienstvolle Herausgeber der GAUSS'schen Werke hat darauf aufmerksam gemacht, dass auch in der Theorie der quadratischen Reste $\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\varrho}$ gesetzt werden kann, wenn m eine *beliebige* ungerade Zahl ist, während ϱ die nach dem sogen. GAUSS'schen Lemma sich ergebende Anzahl der absolut kleinsten negativen Reste bedeutet. In der That braucht man bei den meisten

1) *Göttinger gelehrte Anzeigen*, 1831 Apr. 23, *Werke* Bd. II, S. 173.

der für das quadratische Reciprocitätsgesetz aufgestellten Beweise die Primzahlqualität der Moduln nicht vorauszusetzen, wie namentlich von KRONECKER gezeigt worden ist. Dem nämlichen Thema sind die folgenden Zeilen gewidmet.

Dabei stellt sich heraus, dass das LEGENDRE-JACOBI'sche Symbol $(\frac{n}{m})$ für quadratische, cubische, biquadratische und bicubische Reste von der Form

$$p + qj, \quad j = e^{\frac{\pi i}{k}}, \quad k = 2, 3$$

durch das Product

$$(\tfrac{n}{m}) = \prod_{\mu} (n - \tfrac{\nu m}{\mu})$$

definirt werden kann, wenn μ ein sogenanntes *Theilsystem*[1]) nicht associirter Reste für die ungerade und durch $1 + j$ untheilbare complexe Zahl m als Modul durchläuft, und ν so bestimmt wird, dass die Differenz $\mu n - \nu m$ nur Werthe annimmt, welche den μ gleich oder associirt sind, d. h. durch Multiplication mit einer complexen Einheit aus den μ erhalten werden können. Das Product der betreffenden Einheiten stellt den Werth von $(\frac{n}{m})$ dar. Lässt man insbesondere μ ein sogen. halbes, ein Drittel-, Viertel- oder Sechstelsystem absolut kleinster (nicht associirter) Reste durchlaufen, so bedeutet $\nu = \frac{\mu n}{m}$ die dem Quotienten $\frac{\mu n}{m}$ zunächst liegende ganze (complexe) Zahl, oder was dasselbe ist, die grösste in $[\frac{\mu n}{m} + \frac{1+j}{2}]$ enthaltene Zahl. Die absolut kleinsten Reste μ werden dadurch charakterisirt, dass die Coefficienten des reellen wie des imaginären Theils von $\frac{\mu}{m}$ zwischen $\pm \frac{1}{2}$ enthalten sein müssen.

Für reelle *quadratische* Reste hat man

$$(\tfrac{n}{m}) = \frac{1}{\frac{m-1}{2}\,!} \prod_{\mu} (\mu n - \nu m),$$

wenn μ das halbe System der kleinsten positiven Reste durchläuft, so dass es sich nur um das Vorzeichen des Products $\prod(\mu n - \nu m)$ handelt, wo

$$\nu = \frac{\mu n}{m}$$

die dem Quotienten $\frac{\mu n}{m}$ *zunächstliegende* ganze Zahl bedeutet. Nun ist

1) GAUSS' *Werke* Bd. II, S. 368, EISENSTEIN in CRELLE's *Journal* Bd. 29, S. 180.

$$\sum_{\mu}(\mu n - \nu m) = \sum \mu_1 - \sum \mu_2 = n \sum \mu - m \sum \nu,$$

und da

$$\sum \mu_1 + \sum \mu_2 = \sum \mu,$$

so wird für ungerade Werthe von m und n

$$\sum \nu = \sum \frac{\mu n}{m} \equiv 0 \mod 2.$$

Gauss bezeichnet durch $[\frac{\mu n}{m}]$ die *grösste* in $\frac{\mu n}{m}$ enthaltene ganze Zahl. Für $\nu < \frac{\mu n}{m}$ stimmt diese mit $\frac{\mu n}{m}$ überein, während

für $\nu > \frac{\mu n}{m}$, $\qquad \frac{\mu n}{m} = [\frac{\mu n}{m}] + 1.$[1])

Da in letzterem Falle

$$\mu n - \nu m = -\mu_2$$

wird, so folgt, wenn ϱ die Anzahl der μ_2,

$$\sum \frac{\mu n}{m} = \sum [\frac{\mu n}{m}] + \varrho$$

und für

$$\sum [\frac{\mu n}{m}] = \lambda, \quad \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\varrho} = (-1)^{\lambda}.$$

Während ϱ die Anzahl der *negativen* Factoren in $\prod(\mu n - \nu m)$ bezeichnet, wenn μ von 1 bis $\frac{m-1}{2}$ wächst, so drückt dagegen λ die Anzahl der *positiven* Factoren des analogen Products aus, sobald μ und ν *unabhängig* von einander die Zahlen $< \frac{m}{2}$ und resp. $< \frac{n}{2}$ durchlaufen.

Als unmittelbare Folge ergibt sich durch Vertauschung von m und n das *quadratische* Reciprocitätsgesetz in der Gestalt

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{m}\right),$$

wobei die relativen Primzahlen m und n in *primärer* Form, d. h. als positiv und ungerade, vorausgesetzt sind.

Für *biquadratische* und *bicubische* Reste erhält man analog

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{M-1}{4} \cdot \frac{N-1}{4}} \left(\frac{n}{m}\right) \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{M-1}{6} \cdot \frac{N-1}{6}} \left(\frac{n}{m}\right),$$

wenn M und N die *Normen* von m und n bezeichnen, wo also

$$\text{für } m = p + qi, \quad M = p^2 + q^2, \qquad i = e^{\frac{\pi i}{2}}$$

$$\text{und für } m = p + qj, \quad M = p^2 + pq + q^2, \quad j = e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

1) Uebrigens kann man in allen Fällen $\frac{\mu n}{m} = [\frac{\mu n}{m} + \frac{1}{2}]$ setzen.

Durch Quadrirung folgt für *cubische* Reste

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)$$

und die nämliche Gleichung gilt für *quadratische* Reste der Zahlen von der Form $p + qi$. Vorausgesetzt ist, dass m und n ungerade, durch $1 + i$ resp. $1 + j$ untheilbar, und *primär* gewählt werden, so dass das Product mn gleichfalls primär wird.[1])

Ich entnehme die folgende Darstellung einer älteren Ausarbeitung, welche für meine Vorlesungen über Zahlentheorie vor längeren Jahren niedergeschrieben worden, und beginne mit einigen bekannten elementaren Betrachtungen.

I.

Wenn man die Zahlen von 1 bis $p - 1$ mit der durch die ungerade Primzahl p untheilbaren Zahl n multiplicirt, so erhält man ein neues Restensystem, und durch Multiplication

$$(p-1)!\, n^{p-1} \equiv (p-1)! \quad \text{oder} \quad n^{p-1} \equiv 1 \mod p,$$

d. i. Fermat's Lehrsatz. Multiplicirt man dagegen die Zahlen von 1 bis $\frac{p-1}{2}$ mit n und bestimmt die Reste der Producte zwischen $\pm \frac{p}{2}$, so durchlaufen in der Congruenz

$$\varpi n \equiv \pm r_\varpi \mod p$$

die absoluten Werthe der Reste r_ϖ sämmtliche Zahlen von 1 bis $\frac{p-1}{2}$, so dass

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!\, n^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^\varrho \left(\frac{p-1}{2}\right)! \quad \text{oder} \quad n^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^\varrho \mod p,$$

wo ϱ die Anzahl der negativen Reste bedeutet.

Wenn

$$n \equiv x^2 \mod p, \quad \text{so wird} \quad n^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} \equiv 1.$$

---

1) Gauss' *Werke*, Bd. II, S. 107. Manche Mathematiker haben in der Theorie der cubischen Reste diese Bedingung nicht beibehalten, aber wenn man sich nicht auf absolute Primzahlen beschränken will, so bedarf man bei dem Uebergang zu den zusammengesetzten Zahlen der Gleichungen

$$\left(\frac{mm'}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m'}{n}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{m}{nn'}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right).$$

Vgl. *Berichte der K. S. Gesellschaft* 1888 S. 162.

Folglich ist ϱ gerade für einen Quadratrest n von p, dagegen wird n ein quadratischer Nichtrest genannt, wenn ϱ ungerade oder

$$n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1,$$

weil dann die Congruenz $n \equiv x^2 \bmod p$ nicht lösbar ist. Es gibt $\frac{p-1}{2}$ incongruente Quadratreste (z. B. die Quadrate 1, 4 . . . $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$) und ebensoviele Nichtreste, weil die Congruenz $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^\varrho$ als Theiler von $n^{p-1} \equiv 1$ so viele Wurzeln hat, als ihr Grad beträgt.

Führt man mit Legendre[1]) die Bezeichnung ein

$$(-1)^\varrho = \left(\frac{n}{p}\right),$$

so ist offenbar

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{n'}{p}\right) \quad \text{für} \quad n \equiv n' \bmod p;$$

während allgemeiner für ein beliebiges n'

$$n'^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\varrho'} \quad \text{und} \quad \left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{n'}{p}\right) = \left(\frac{nn'}{p}\right),$$

d. h. das Product zweier Quadratreste oder zweier Nichtreste ist ein Quadratrest, während ein Quadratrest mit einem Nichtrest multiplicirt einen Nichtrest liefert.

2.

Um den Fall eines beliebigen ungeraden Moduls m in Betracht zu ziehen, sei n eine beliebige relative Primzahl und

$$\mu n \equiv \pm r_\mu \bmod m.$$

Wir verstehen unter einem *halben* Restensystem $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{\frac{m-1}{2}}$ ein solches, welches zusammen mit den entgegengesetzten Werthen $-\mu_1 - \mu_2 \ldots - \mu_{\frac{m-1}{2}}$ ein vollständiges Restensystem (mit Ausschluss der Null) bildet, und nennen wiederum ϱ die Anzahl der Reste $-r_\mu$, wenn μ ein halbes Restensystem durchläuft. Dann durchlaufen die r_μ das nämliche halbe Restensystem — beispielsweise alle positiven Zahlen $< \frac{m}{2}$ — obgleich Nichts darauf ankommt, ob diese Reste sämmtlich positiv gewählt sind. Wir werden gleich-

1) *Essai sur la théorie des Nombres*, 1798, p. 186.

wohl die ϱ mit dem Minuszeichen versehenen Reste $-r_\mu$ negative Reste nennen, obschon für r_μ eine negative, also $-r_\mu$ eine positive Zahl gewählt sein kann. Die geraden, wie die ungeraden Zahlen $< m$ liefern gleichfalls solche halbe Restensysteme. Durch eine verschiedene Wahl des den weiteren Betrachtungen zu Grunde gelegten halben Restensystems kann man den betreffenden Ableitungen leicht verschiedene Formen geben.

Setzt man auch jetzt

$$(-1)^\varrho = \left(\frac{n}{m}\right),$$

so erhält das Symbol die von JACOBI eingeführte[1]) allgemeinere Bedeutung, worauf namentlich SCHERING hingewiesen hat.[2])

Durch Multiplication mit der relativen Primzahl n' folgt

$$\mu n n' \equiv \pm r_\mu n' \quad \text{neben} \quad \mu n' \equiv \pm r'_\mu,$$

wofür man auch

$$r_\mu n' \equiv \pm r'$$

mit ϱ' negativen Resten r' schreiben darf, weil r_μ die nämlichen Werthe wie μ durchläuft. Die ϱ'' negativen Reste in der Congruenz

$$\mu n n' \equiv \pm r''$$

werden sich mithin zusammensetzen sowohl aus den negativen r', welche positiven r entsprechen, wie aus denjenigen positiven r', welche negativen r correspondiren. Wenn die Anzahl der letzteren ϱ_0 beträgt, und die Anzahl der ersteren $\varrho' - \varrho_1$, so wird

$$\varrho_0 + \varrho_1 = \varrho \quad \text{und} \quad \varrho'' = \varrho_0 + \varrho' - \varrho_1 = \varrho + \varrho' - 2\varrho_1,$$

folglich

$$(-1)^{\varrho''} = (-1)^{\varrho+\varrho'} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{nn'}{m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n'}{m}\right).$$

3.

Die Zahlen n können positiv oder negativ, gerade oder ungerade sein, und zwar wird

$$\left(\frac{-n}{m}\right) = \left(\frac{-1}{m}\right)\left(\frac{n}{m}\right)$$

sowie für $n' = 2^\alpha n$

$$\left(\frac{n'}{m}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)^\alpha \left(\frac{n}{m}\right),$$

1) *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1837, S. 134.

2) Ebendas. 1876, S. 330.

so dass man sich auf positive ungerade Werthe von n beschränken kann, wenn die Werthe von $\left(\frac{-1}{m}\right)$ und $\left(\frac{2}{m}\right)$ ermittelt sind. Für $n = -1$ wird

$$-\mu \equiv \pm r_\mu \bmod m,$$

d. h. alle $\frac{m-1}{2}$ Reste sind negativ und

$$\left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}};$$

für $n = 2$ wird

$$2\mu \equiv \pm r_\mu \bmod m$$

und ϱ bezeichnet die Anzahl der geraden Zahlen zwischen $\frac{m}{2}$ und m. Diese ergibt sich sogleich aus $m = 4\varrho \pm 1$, folglich

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^\varrho = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}.$$

4.

Wir setzen jetzt n gleichwie m als positiv und ungerade voraus und schreiben die Congruenz für μn in der Form der Gleichung

$$\mu n - \nu m = \pm r_\mu,$$

wo gleichzeitig $\mu < \frac{m}{2}$ und $\nu < \frac{n}{2}$ sein müssen, weil für

$$\mu = \frac{m-1}{2}, \quad \nu = \frac{n+1}{2}, \quad -r = \frac{m+n}{2}$$

folgen würde. ν aber bedeutet offenbar die dem Quotienten $\frac{\mu n}{m}$ zunächst gelegene ganze Zahl, was wir durch die Bezeichnung

$$\nu = \frac{\mu n}{m}$$

ausdrücken wollen. Dabei erkennt man, dass ν für $m < n$ nicht sämmtliche Zahlen $< \frac{n}{2}$ durchlaufen kann, dagegen für $m > n$ gewisse Werthe mehr als Einmal annimmt, während μ von 1 bis $\frac{m-1}{2}$ variirt. Das Umgekehrte findet natürlich statt, wenn man

$$\nu m - \mu n = \pm s_\nu$$

setzt und s_ν nebst ν alle Zahlen von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ durchlaufen lässt; dann nimmt μ für $m < n$ gewisse Werthe $< \frac{m}{2}$ mehr als Einmal an, während für $m > n$ diese Zahlen nicht sämmtlich vorkommen

können. Jedenfalls aber kommen für $m < n$ die sämmtlichen r_μ unter den s_ν vor und zwar dergestalt, dass die ϱ negativen Reste r_μ unter den positiven s_ν — und ebenso die positiven r_μ unter den negativen s_ν — enthalten sein müssen. Wenn man durch σ die Anzahl der negativen s bezeichnet, so sind $\frac{n-1}{2} - \sigma$ positive Reste vorhanden, von denen mithin $\frac{n-1}{2} - \varrho - \sigma$ zwischen $\frac{m}{2}$ und $\frac{n}{2}$ liegen.

Die Anzahl dieser Reste ist gerade, sowohl wenn $m \equiv -1$, als wenn $n \equiv 1 \bmod 4$ ist.

In der That liefern die Congruenzen

$$\nu m \equiv s \quad \text{und} \quad \nu' m \equiv s' \bmod n$$

$$(\nu + \nu')\, m \equiv s + s'$$

$$\text{für } \nu + \nu' = \frac{n+1}{2}, \quad s + s' = \frac{m+n}{2},$$

d. h. je zwei Reste s und s' liegen gleichzeitig zwischen $\frac{m}{2}$ und $\frac{n}{2}$, wenn $\nu + \nu' = \frac{n+1}{2}$. Eine Ausnahme kann nur für $s = s'$, d. h.

$$\nu = \nu' = \frac{n+1}{4} \quad \text{oder} \quad n \equiv -1 \bmod 4$$

eintreten. Dann wird

$$\frac{n+1}{4}\, m \equiv \frac{m+n}{4} \bmod n,$$

falls gleichzeitig $m + n \equiv 0$ oder $m \equiv 1 \bmod 4$ ist. Für $m \equiv -1$ dagegen erhält man

$$\frac{n+1}{4}\, m \equiv -\frac{n-m}{4} \bmod n,$$

also keinen positiven Rest.

Mithin wird $\varrho + \sigma$ nur dann ungerade, wenn gleichzeitig

$$m \equiv n \equiv -1 \bmod 4$$

ist. Da nun

$$(-1)^\varrho = \left(\frac{n}{m}\right), \quad (-1)^\sigma = \left(\frac{m}{n}\right),$$

so ergibt sich das sogenannte quadratische Reciprocitätsgesetz für beliebige ungerade relative Primzahlen in der Form

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}.$$

Für absolute Primzahlen ist dieses Gesetz bekanntlich von Euler[1])

1) *Opuscula analytica*, Vol. I, 1783 p. 82.

und Legendre[1]) aufgestellt und *zuerst* von Gauss[2]) streng bewiesen worden. Die obige Ableitung rührt im Wesentlichen von Zeller[3]) her.

5.

Das Reciprocitätsgesetz gestattet der früheren Formel

$$\left(\frac{nn'}{m}\right)=\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n'}{m}\right)$$

eine analoge zur Seite zu setzen. Denn da

$$\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right),\quad \left(\frac{n'}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n'-1}{2}}\left(\frac{m}{n'}\right)$$

sowie

$$\left(\frac{nn'}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{nn'-1}{2}}\left(\frac{m}{nn'}\right),$$

so ergibt sich wegen

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'-1}{2}}=1=(-1)^{\frac{nn'-1}{2}-\frac{n-1}{2}-\frac{n'-1}{2}}:$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right)=\left(\frac{m}{nn'}\right),$$

und zwar gilt nicht bloss die erstere Formel, nach ihrer früheren Ableitung, auch für gerade und für negative Werthe der Zähler n und n', sondern auch die letztere Gleichung für dergleichen Werthe des Zählers m. Man braucht dazu bloss die Gleichungen

$$\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{-1}{n'}\right)=\left(\frac{-1}{nn'}\right)\quad\text{und}\quad\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2}{n'}\right)=\left(\frac{2}{nn'}\right)$$

oder

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n'-1}{2}}=(-1)^{\frac{nn'-1}{2}}\quad\text{und}\quad(-1)^{\frac{n^2-1}{8}+\frac{n'^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{n^2n'^2-1}{8}}$$

zu verificiren. Wollte man *negative* Nenner oder Moduln zulassen und $\left(\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{n}{-m}\right)$ statuiren, so würden die Formeln eine Modification erleiden, sobald Zähler und Nenner zugleich negativ sind. In diesem Falle erhält man

$$\left(\frac{-1}{-m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}},\quad\text{folglich}\quad\left(\frac{-m}{-n}\right)\left(\frac{-n}{-m}\right)=-(-1)^{\frac{m+1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}.$$

1) *Recherches d'analyse indéterminée, Histoire de l'Académie*, 1785 p. 465.

2) *Disquisitiones arithmeticae*, 1801 Art. 135 f. Natürlich abgesehen von den fünf weiteren Beweisen, welche Gauss *später* gegeben hat, cf. *Werke* II, S. 49, sowie S. 234 f.

3) *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1872 S. 846.

Endlich kann man auch die Beschränkung aufheben, dass Zähler und Nenner ohne gemeinschaftlichen Theiler sein sollen, wenn man für den Fall eines solchen den Werth des Symbols $\left(\frac{n}{m}\right) = 0$ setzt.

Die Gleichung

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{m'}\right) = \left(\frac{n}{m\,m'}\right),$$

welche der JACOBI'schen Bezeichnung als Definition zu Grunde liegt, ist unabhängig von dem Reciprocitätssatze von SCHERING[1]) und WEBER[2]) direct bewiesen worden.

6.

Die Benutzung des Reciprocitätsgesetzes führt zu einer bequemen Berechnungsweise des Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$ ohne Factorenzerfällung von m oder n. Denn für

$$m \equiv n_1 \bmod n, \qquad n \equiv n_2 \bmod n_1 \quad \text{u. s. w.}$$

wird

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n_1}{n}\right), \quad \left(\frac{n_1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n_1-1}{2}} \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad \text{u. s. w.}$$

wenn $n_1, n_2 \ldots$ positive ungerade Zahlen bedeuten. Im Allgemeinen wird jedoch diese Bedingung für die abnehmenden Werthe von $n_1 n_2 \ldots$ nicht erfüllt sein. Indessen kann man leicht die Vorzeichen der betreffenden Reste so wählen, dass sie sämmtlich durch ungerade Zahlen ausgedrückt werden, wie die Gleichung

$$m = 2\nu n \pm n_1 \qquad \text{oder} \qquad \frac{n}{m} = \frac{1}{2\nu} \pm \frac{n_1}{n}$$

zeigt, welche auf eine Kettenbruchsentwickelung mit geraden Nennern führt. Bei einem negativen Vorzeichen von n_1 hat man dann

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m+1\cdot n-1}{4}} \left(\frac{n_1}{n}\right)$$

zu setzen. Vgl. EISENSTEIN in CRELLE's *Journal*, Bd. 27, S. 317.

7.

Wir wollen jetzt in der Differenz

$$\mu n - \nu m = D$$

μ und ν *unabhängig von einander* die Zahlen $< \frac{m}{2}$ und resp. $< \frac{n}{2}$ durch-

1) *Acta mathematica* Bd. I, S. 166 (1882).
2) *Elliptische Functionen* S. 236 (1891).

laufen lassen. Dann kann D nur verschwinden, wenn m und n einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen und $\frac{\mu}{\nu} = \frac{m}{n}$ wird. Für ungerade relative Primzahlen m und n soll in λ Fällen $D > 0$, also in den übrigen $\frac{m-1 \cdot n-1}{4} - \lambda$ Fällen $D < 0$ werden. Alsdann erhält man den Werth

$$(-1)^{\lambda} = (\tfrac{n}{m})$$

und das Reciprocitätsgesetz ergibt sich ohne Weiteres durch die Vertauschung von m und n, wobei die positiven Werthe von D in die negativen übergehen und umgekehrt.

So lange nämlich ν kleiner ist, als die grösste in $\frac{\mu n}{m}$ enthaltene ganze Zahl $[\frac{\mu n}{m}]$, wird $D > 0$, folglich hat man

$$\lambda = \sum_{\mu} [\tfrac{\mu n}{m}].$$

Die absolut kleinsten Reste von

$$\mu n \equiv \pm r_{\mu} \bmod m$$

zerfallen für die verschiedenen Werthe von μ in positive Reste

$$r = \mu n - m\,[\tfrac{\mu n}{m}]$$

und in negative Reste

$$-r' = \mu n - m\,[\tfrac{\mu n}{m}] - m.$$

Da die r und r' alle Zahlen von 1 bis $\frac{m-1}{2}$ darstellen, ist

$$\sum r + \sum r' = \frac{m^2-1}{8},$$

während

$$\sum r - \sum r' = n \sum \mu - m \sum [\tfrac{\mu n}{m}] - m\varrho$$
$$= n\,\frac{m^2-1}{8} - m\lambda - m\varrho,$$

wenn ϱ die Anzahl der negativen Reste ausdrückt. Durch Subtraction folgt

$$2 \sum r' = m(\lambda + \varrho) - (n-1)\,\frac{m^2-1}{8},$$

woraus hervorgeht, da m und n ungerade angenommen worden sind, dass $\lambda + \varrho$ gerade sein muss, oder

$$(-1)^{\lambda} = (-1)^{\varrho}.$$

Die beiden Ausdrücke $(-1)^{\varrho}$ und $(-1)^{\lambda}$ für den Werth des

Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$ rühren von GAUSS[1]) her, auf den Zusammenhang mit den Vorzeichen der Differenz D oder $\frac{\mu}{m} - \frac{\nu}{n}$ hat KRONECKER[2]) aufmerksam gemacht.

8.

Man kann auch — wenigstens für ungerade Werthe des Zählers — von der Definitionsgleichung

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\lambda}$$

ausgehen und mit KRONECKER (a. a. O.) direct zeigen, dass für

$$\lambda = \sum\left[\frac{\mu n}{m}\right], \qquad \lambda' = \sum\left[\frac{\mu n'}{m}\right], \qquad \lambda'' = \sum\left[\frac{\mu n n'}{m}\right]$$

$$(-1)^{\lambda+\lambda'} = (-1)^{\lambda''}$$

wird. In der That folgt aus

$$\mu n n' - m n' \left[\frac{\mu n}{m}\right] = n' r \qquad \text{resp.} \quad = n'(m - r')$$

$$\left[\frac{\mu n n'}{m}\right] - n'\left[\frac{\mu n}{m}\right] = \left[\frac{n' r}{m}\right] \qquad \text{resp.} \quad = \left[\frac{n'(m - r')}{m}\right]$$

$$= n' - 1 - \left[\frac{n' r'}{m}\right].$$

Für ungerade n' ist mithin sowohl $\left[\frac{n' r}{m}\right]$ wie $\left[\frac{n' r'}{m}\right]$ gleichzeitig gerade oder ungerade mit $\left[\frac{\mu n n'}{m}\right] - \left[\frac{\mu n}{m}\right]$. Da nun r und r' mit μ die Werthe von 1 bis $\frac{m-1}{2}$ durchlaufen, so erhält man durch Summation

$$\sum\left[\frac{\mu n n'}{m}\right] \equiv \sum\left[\frac{\mu n}{m}\right] + \sum\left[\frac{\mu n'}{m}\right] \mod 2$$

q. e. d.

Die letztgefundene Gleichung gilt auch für gerade Werthe von n und liefert z. B. für $n = 2$

$$\sum\left[\frac{\mu n'}{m}\right] \equiv \sum\left[\frac{2 \mu n'}{m}\right] \mod 2 .$$

Die oben entwickelte Congruenz

$$\lambda + \varrho \equiv (n-1)\frac{m^2-1}{8} \mod 2$$

geht jedoch, wenn $2n$ statt n geschrieben wird, über in

$$\lambda + \varrho \equiv \frac{m^2-1}{8} \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{2n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{n}{m}\right).$$

---

1) *Commentationes societ. Gottingensis* Vol. XVI, 1808, p. 69, sowie *Commentat. recentiores* Vol. IV, 1817, S. 1.

2) *Berliner Monatsberichte* 1876, S. 335; 1884, S. 519; 1885, S. 117.

9.

Der Reciprocitätssatz ergibt sich ferner nach GAUSS (a. a. O.) aus der einfachen Bemerkung, dass die Summe

$$\lambda = \sum_{\mu} \left[\frac{\mu n}{m}\right]$$

$\left[\frac{m\nu}{n}\right]$ Glieder enthält, welche kleiner als $\nu < \frac{n}{2}$ sind. In der That entsprechen sich die Ungleichungen

$$\mu < \frac{m\nu}{n} < \mu + 1 \quad \text{und} \quad \frac{\mu n}{m} < \nu < \frac{(\mu+1)n}{m}.$$

Damit ergeben sich aber

$$\left[\frac{m(\nu+1)}{n}\right] - \left[\frac{m\nu}{n}\right] \text{ Glieder } = \nu,$$

nur für $\nu = \frac{n-1}{2}$ wird die betreffende Anzahl gleich

$$\frac{m-1}{2} - \left[\frac{m\frac{n-1}{2}}{n}\right].$$

Mithin hat man

$$\lambda = \sum_{\nu} \nu \left\{\left[\frac{m(\nu+1)}{n}\right] - \left[\frac{m\nu}{n}\right]\right\}$$

oder

$$\sum_{\mu}\left[\frac{\mu n}{m}\right] = \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} - \sum_{\nu}\left[\frac{m\nu}{n}\right]$$

q. e. d.

EISENSTEIN[1]) hat eine schöne geometrische Construction des Reciprocitätsgesetzes auf die Gleichung $\lambda = \sum_{\mu}\left[\frac{\mu n}{m}\right]$ gegründet. Auf der Abscissenaxe seien die Werthe von μ, auf der Ordinatenaxe die Werthe von ν aufgetragen. Construirt man die entsprechenden Ordinaten und Abscissen, so liegen die $\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$ gegenseitigen Schnittpunkte dieser Linien jedenfalls innerhalb des mit der Abscisse $\frac{m}{2}$ und der Ordinate $\frac{n}{2}$ gebildeteten Rechtecks (oder Parallelogramms). Die Diagonale $my = nx$ schneidet die zu μ gehörige Ordinate dergestalt, dass $\left[\frac{\mu n}{m}\right]$ Schnittpunkte unterhalb der Diagonale fallen. Folglich beträgt

$$\lambda = \sum_{\mu}\left[\frac{\mu n}{m}\right]$$

1) CRELLE's *Journal*, Bd. 28 (1844) S. 246.

die Anzahl der sämmtlichen *innerhalb* des durch die Abscissenaxe begrenzten Dreiecks liegenden Schnitt- oder Gitterpunkte. Analog erhält man

$$\lambda' = \sum_\nu \left[\frac{\nu m}{n}\right]$$

Schnittpunkte in der durch die Ordinatenaxe begrenzten Rechteckshälfte, während die Anzahl der sämmtlichen Schnittpunkte durch

$$\lambda + \lambda' = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$$

gegeben ist.

10.

Wir verlassen nunmehr die rein arithmetischen Betrachtungen, um uns zur analytischen Bedeutung des Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$ zu wenden.

Aus

$$\mu n \equiv \pm r_\mu \bmod m$$

geht hervor, dass

$$\sin\frac{2\mu n\pi}{m} = \pm \sin\frac{2r_\mu\pi}{m}$$

mit dem gleichen Vorzeichen wie $r_\mu < \frac{m}{2}$ versehen ist. Mithin wird

$$\prod_\mu \sin\frac{2\mu n\pi}{m} = (-1)^\varrho \prod_\mu \sin\frac{2r_\mu\pi}{m} = \left(\frac{n}{m}\right) \prod_\mu \sin\frac{2\mu\pi}{m},$$

wo $\mu < \frac{m}{2}$. Da ferner

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = 2^{m-1} \prod_\mu \left(\sin^2\frac{2\mu\pi}{m} - \sin^2 x\right),$$

so folgt für $x = \frac{2\nu\pi}{n}$:

$$\sin\frac{2\nu m\pi}{n} = 2^{m-1} \sin\frac{2\nu\pi}{n} \prod_\mu \left(\sin^2\frac{2\mu\pi}{m} - \sin^2\frac{2\nu\pi}{n}\right)$$

nebst

$$\prod_\nu \frac{\sin\frac{2\nu m\pi}{n}}{\sin\frac{2\nu\pi}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right) = 2^{\frac{m-1\cdot n-1}{2}} \prod_{\mu\nu} \left(\sin^2\frac{2\mu\pi}{m} - \sin^2\frac{2\nu\pi}{n}\right).$$

Hier verschwindet $\left(\frac{m}{n}\right)$, wenn m und n einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, also $\frac{\mu}{m} = \frac{\nu}{n}$ wird.

Der gefundene Ausdruck liefert durch Vertauschung von m und n unmittelbar das Reciprocitätsgesetz, wie EISENSTEIN in seiner

originellen Abhandlung „*Applications de l'Algèbre à l'Arithmétique transscendante*" gezeigt hat.[1])

Setzt man dagegen $x = 0$, so ergibt sich

$$m = 2^{m-1} \prod_\mu \sin^2 \frac{2\mu\pi}{m}$$

und durch Wurzelausziehung

$$+\sqrt{m} = \prod_\mu 2 \sin \frac{2\mu\pi}{m}$$

nebst

$$\left(\frac{n}{m}\right)\sqrt{m} = \prod_\mu 2 \sin \frac{2\mu n\pi}{m}.^{2})$$

Durch Einführung der m-ten Einheitswurzel

$$q = e^{\frac{2n\pi i}{m}}$$

transformirt sich dieser Ausdruck für $m = 4\varrho \pm 1$ in

$$\left(\frac{n}{m}\right)\sqrt{m} = e^{-\frac{(m-1)^2\pi i}{8}} q^{\varrho\varrho}(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^{\frac{m-1}{2}})$$

$$= e^{-\frac{(m-1)^2\pi i}{8}} \{1 + q + q^4 + q^9 \cdots + q^{(m-1)^2}\},$$

wie im Folgenden gezeigt werden soll.

II.

Die vorstehende, von Gauss in der berühmten Abhandlung[3]) *Summatio quarundum serierum singularium* gelehrte Transformation kann als ein specieller Fall einer allgemeinen Entwickelungsformel elementaren Charakters aufgefasst werden, welche im Jahrg. 1859 der *Leipziger Berichte* S. 159 enthalten ist.

Die doppelte Functionalgleichung

$$f(\omega\,\omega_1) = (1-\omega)\, f(q\omega\,\omega_1) = \frac{f(\omega\, q\omega_1)}{1-\omega_1}$$

1) Crelle's *Journal* Bd. 29, 1845, S. 178.

2) Da

$$2 \sin \frac{2\mu n\pi}{m} = 4\frac{\mu n\pi}{m} \lim_{\lambda=\infty} \prod_{l=-\lambda}^{\lambda'} \left(1 - \frac{2\mu n}{lm}\right)$$

mit $\left[\frac{2\mu n}{m}\right]$ negativen Factoren, so ist auch (vergl. Art. 8)

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\sum_\mu' \left[\frac{2\mu n}{m}\right]}.$$

3) *Commentationes societ. Gottingensis recent.* T. I, 1808.

liefert

$$f(\omega\,\omega_1) = X\omega\, f(0\,\omega_1) = \frac{f(\omega\,0)}{X\omega_1} = f(0\,0)\,\frac{X\omega}{X\omega_1},$$

wo

$$X\omega = (1-\omega)(1-q\omega)(1-q^2\omega)(1-q^3\omega)\cdots = \prod_{l=0}^{\infty}(1-q^l\omega).$$

Bildet man die unendliche Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^{m(m-1)} \frac{\omega_1-\omega\cdot\omega_1-q\omega\cdots\omega_1-q^{m-1}\omega}{1-\omega_1\cdot 1-q\omega_1\cdots 1-q^{m-1}\omega_1}\cdot\frac{1-\omega\cdot 1-q\omega\cdots 1-q^{m-2}\omega\cdot 1-q^{2m-1}\omega}{1-q\cdot 1-q^2\cdots 1-q^{m-1}\cdot 1-q^m},$$

so lässt sich durch directe Rechnung die nämliche Functionalgleichung verificiren.[1]) Da $f(0\,0)=1$ wird, so erhält man zwischen dem unendlichen Product und der unendlichen Reihe die Gleichung

$$\frac{X\omega}{X\omega_1} = 1 + \frac{\omega_1-\omega\cdot 1-q\omega}{1-\omega_1\,.\,1-q} + q^2\frac{\omega_1-\omega\cdot\omega_1-q\omega\cdot 1-\omega\,.\,1-q^3\omega}{1-\omega_1\cdot 1-q\omega_1\cdot 1-q\cdot 1-q^2} +$$
$$+ q^6\frac{\omega_1-\omega\cdot\omega_1-q\omega\,.\,\omega_1-q^2\omega\cdot 1-\omega\cdot 1-q\omega\cdot 1-q^5\omega}{1-\omega_1\cdot 1-q\omega_1\cdot 1-q^2\omega_1\cdot 1-q\cdot 1-q^2\cdot 1-q^3} + \cdots,$$

welche zu ihrer Convergenz mod. $q<1$ erfordert. Die betreffenden Ausdrücke werden jedoch endlich, wenn $\omega_1 = q^\lambda\omega$ gesetzt wird. Alsdann ergibt sich die identische Formel

$$1-\omega\cdot 1-q\omega\cdot 1-q^2\omega\cdots 1-q^{\lambda-1}\omega = 1-\omega\frac{1-q^\lambda\cdot 1-q\omega}{1-q\cdot 1-q^\lambda\omega} + \omega^2 q^3\frac{1-q^\lambda\cdot 1-q^{\lambda-1}\,.\,1-\omega\cdot 1-q^3\omega}{1-q\cdot 1-q^2\cdot 1-q^\lambda\omega\cdot 1-q^{\lambda+1}\omega} +$$
$$\text{bis } (-1)^\lambda\omega^\lambda q^{\frac{3}{2}\lambda(\lambda-1)}\frac{1-\omega\cdot 1-q\omega\cdots 1-q^{\lambda-2}\omega}{1-q^\lambda\omega\cdot 1-q^{\lambda+1}\omega\cdots 1-q^{2\lambda-2}\omega}$$

und diese verlangt zu ihrer Gültigkeit nur, dass nicht $q^{\lambda-\lambda_1}=1$ sei, weil in diesem Falle schon $\omega_1 = q^{\lambda_1}\omega$ sein würde. Das allgemeine Glied auf der rechten Seite wird die Form haben

$$(-1)^l\omega^l q^{\frac{3}{2}l(l-1)}\frac{1-q^\lambda\cdot 1-q^{\lambda-1}\cdots 1-q^{\lambda-l+1}}{1-q\cdot 1-q^2\cdots 1-q^l}\cdot\frac{1-\omega\cdot 1-q\omega\cdots 1-q^{l-2}\omega\cdot 1-q^{2l-1}\omega}{1-q^\lambda\omega\cdot 1-q^{\lambda+1}\omega\cdots 1-q^{\lambda+l-1}\omega}.$$

---

1) Man erhält sogleich

$$(1-\omega)f(q\omega\,\omega_1) = \sum q^{m(m-1)}\frac{\omega_1-q\omega\cdot\omega_1-q^2\omega\cdots\omega_1-q^m\omega}{1-\omega_1\cdot 1-q\omega_1\cdots 1-q^{m-1}\omega_1}\cdot\frac{1-\omega\cdot 1-q\omega\cdots 1-q^{m-1}\omega\,.\,1-q^{2m}\omega}{1-q\cdot 1-q^2\cdots 1-q^{m-1}\cdot 1-q^m},$$

wo

$$(\omega_1-q^m\omega)(1-q^{m-1}\omega)-\omega(1-q^m)(1-q^{m-1}\omega_1) = (\omega_1-\omega)(1-q^{2m-1}\omega)$$

und analog

$$\frac{f(\omega\,q\omega_1)}{1-\omega_1} = \sum q^{m^2-1}\frac{q\omega_1-\omega\cdot\omega_1-\omega\cdot\omega_1-q\omega\cdots\omega_1-q^{m-2}\omega}{1-\omega_1\cdot 1-q\omega_1\cdots 1-q^m\omega_1}\cdot\frac{1-\omega\cdots 1-q^{m-2}\omega\cdot 1-q^{2m-1}\omega}{1-q\cdots 1-q^{m-1}\cdot 1-q^m},$$

wo

$$(q\omega_1-\omega)(1-q^{2m-1}\omega)$$
$$=(1-q^m\omega_1)[q\omega_1-\omega-q^m\omega(\omega_1-q^{m-1}\omega)]+q^{m+1}\omega_1(\omega_1-q^{m-1}\omega)(1-q^{m-1}\omega),$$

Für $\omega = q$ ergibt sich hieraus die identische Gleichung

$$1-q\cdot 1-q^2\cdots 1-q^\lambda = 1-q(1+q)\frac{1-q^\lambda}{1-q^{\lambda+1}} + q^5(1+q^2)\frac{1-q^\lambda\cdot 1-q^{\lambda-1}}{1-q^{\lambda+1}\cdot 1-q^{\lambda+2}} + \cdots$$

$$\text{bis } (-1)^\lambda q^{\frac{1}{2}\lambda(3\lambda-1)}(1+q^\lambda)\frac{1-q^\lambda\cdot 1-q^{\lambda-1}\cdots 1-q}{1-q^{\lambda+1}\cdot 1-q^{\lambda+2}\cdots 1-q^{2\lambda}}.$$

Lässt man hier λ über alle Grenzen wachsen, so geht für $q < 1$ die EULER'sche Formel

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^i q^{\frac{1}{2}i(3i-1)}$$

hervor, wo die Exponenten die sogen. Pentagonalzahlen darstellen.[1])

12.

Man kann die gefundene identische Gleichung zur Ableitung der hauptsächlichsten in GAUSS' „*Summatio*“ enthaltenen Resultate benutzen, indem man q einer primitiven Wurzel der Einheit gleichsetzt. Sei zunächst

$$q^{2\lambda+1} = 1, \quad \lambda = \frac{m-1}{2}, \quad q = e^{\frac{2n\pi i}{m}};$$

$$1-q\cdot 1-q^2\cdots 1-q^{\frac{m-1}{2}} = 1+q^{\lambda+1}(1+q)+q^{2(\lambda+2)}(1+q^2)+q^{3(\lambda+3)}(1+q^3)\cdots+q^{2\lambda^2}(1+q^\lambda).$$

Diese Summe kann man nach Belieben unter den Formen

$$\overset{\text{mod } m}{\underset{\mu}{S}}\, q^{\mu(\mu+\lambda)} = q^{-\frac{1}{4}\lambda^2}\underset{\mu}{S}\, q^{(\mu+\frac{1}{2}\lambda)^2}$$

und

$$\underset{\mu}{S}\, q^{\mu(\mu+\lambda+1)} = q^{-\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2}\underset{\mu}{S}\, q^{\left(\mu+\frac{\lambda+1}{2}\right)^2}$$

schreiben, wo μ ein vollständiges Restensystem nach dem Modul

1) Es mag daran erinnert werden, dass die Entwickelung für $\frac{X\omega}{X\omega_1}$ als specielle Fälle auch die Formeln

$$\frac{1-q\cdot 1-q^2\cdot 1-q^3\cdots}{1+q\cdot 1+q^2\cdot 1+q^3\cdots} = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^i q^{ii}$$

und

$$\frac{1-q^2\cdot 1-q^4\cdot 1-q^6\cdots}{1-q\cdot 1-q^3\cdot 1-q^5\cdots} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{i(2i+1)} = \sum_{0}^{\infty} q^{\frac{1}{2}i(i+1)}$$

in sich enthält, deren Exponenten die Reihen der viereckigen und der dreieckigen Zahlen liefern. Vergl. *Leipziger Berichte* 1862, S. 103.

$m = 2\lambda + 1$ durchläuft. Für $m = 4\varrho \pm 1$ ist entweder $\frac{1}{2}\lambda = \varrho$ oder $\frac{1}{2}(\lambda + 1) = \varrho$ und damit

$$1 - q \cdot 1 - q^2 \cdots 1 - q^{\frac{m-1}{2}} = q^{-\varrho\varrho}\{1 + q + q^4 \cdots + q^{(m-1)^2}\}.$$

Da nun gleichzeitig

$$1 - q \cdot 1 - q^2 \cdots 1 - q^{\frac{m-1}{2}} = (-1)^\varrho q^{\varrho\varrho}(1 - q^2)(1 - q^4) \cdots (1 - q^{m-1}),$$

so wird

$$1 + q + q^4 \cdots + q^{(m-1)^2} = (-1)^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}} \left(q - \frac{1}{q}\right)\left(q^2 - \frac{1}{q^2}\right) \cdots \left(q^\lambda - \frac{1}{q^\lambda}\right)$$

$$= i^{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2} \prod_{\mu=1}^{\frac{m-1}{2}} 2 \sin \frac{2\mu n \pi}{m}$$

oder

$$\mathop{S}_{\mu}^{\text{mod}\, m} e^{\mu^2 \frac{2n\pi i}{m}} = e^{\frac{(m-1)^2 \pi i}{8}} \left(\frac{n}{m}\right) \sqrt{m}.$$

Bekanntlich hat GAUSS aus der vorstehenden Formel für absolute Primzahlen den Reciprocitätssatz abgeleitet.[1] Durch directe Multiplication ergibt sich leicht

$$\mathop{S}_{\mu}^{m} e^{\mu^2 \frac{l n \pi i}{m}} \mathop{S}_{\nu}^{n} e^{\nu^2 \frac{l m \pi i}{n}} = \mathop{S}_{\mu\nu} e^{(m\nu + \mu n)^2 \frac{l\pi i}{mn}} = \mathop{S}_{\lambda}^{\text{mod}\, mn} e^{\lambda^2 \frac{l\pi i}{mn}},$$

wenn das Product lmn gerade genommen wird, damit die Summen von den von $\lambda\mu\nu$ durchlaufenen Restensystemen unabhängig werden. Für $l = 2$, m und n ungerade und ohne gemeinschaftlichen Theiler, erhält man

$$\mathop{S}_{\mu}^{m} e^{\mu^2 \frac{2n\pi i}{m}} \mathop{S}_{\nu}^{n} e^{\nu^2 \frac{2m\pi i}{n}} = \mathop{S}_{\lambda}^{mn} e^{\lambda^2 \frac{2\pi i}{mn}}$$

$$= i^{\left(\frac{mn-1}{2}\right)^2} \sqrt{mn} = i^{\left(\frac{m-1}{2} + \frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{mn}$$

oder

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}}.$$

Analog folgt für $l = 1$, wenn man $2n$ statt n schreibt,

$$\mathop{S}_{\mu}^{m} e^{\mu^2 \frac{2n\pi i}{m}} \mathop{S}_{\nu}^{2n} e^{\nu^2 \frac{m\pi i}{2n}} = \mathop{S}_{\lambda}^{2mn} e^{\lambda^2 \frac{\pi i}{2mn}}$$

$$= \sqrt{2mni},$$

1) *Werke* Bd. II, S. 42, vergl. auch DIRICHLET in CRELLE's *Journal* Bd. 17, S. 65.

wie Art. 16 gezeigt werden soll. Man kann auch setzen

$$\overset{m}{\underset{\mu}{S}}(-1)^{\mu n} e^{\mu^2 \frac{n\pi i}{m}} \overset{n}{\underset{\nu}{S}}(-1)^{\nu m} e^{\nu^2 \frac{m\pi i}{n}} = \overset{mn}{\underset{\lambda}{S}}(-1)^{\lambda} e^{\lambda^2 \frac{\pi i}{mn}},$$

wo m und n beliebige relative Primzahlen bedeuten dürfen.

Wir wollen ferner den Fall betrachten, wo

$$q^{\lambda} = -1, \quad \text{also für } \lambda = n,\ m \text{ ungerade},\ q = e^{\frac{m\pi i}{n}}$$

eine primitive $2n$-te Wurzel der Einheit. Alsdann ergibt sich für das allgemeine Glied unserer identischen Formel

$$(-1)^l \cdot q^{\frac{1}{2}l(3l-1)}(1+q^l)\frac{1+1\cdot 1+\frac{1}{q}\cdots 1+\frac{1}{q^{l-1}}}{1+q\cdot 1+q^2\cdots 1+q^l} = (-1)^l 2q^{l^2},$$

während das letzte Glied für $l = \lambda$ sich auf die Einheit reducirt. Mithin erhält man nach Division durch $1 - q^{\lambda} = 2$

$$1-q\cdot 1-q^2\cdots 1-q^{n-1} = 1-q+q^4 \mp \cdots + (-1)^{n-1}q^{(n-1)^2}$$
$$= \overset{\bmod n}{\underset{\nu}{S}}(-1)^{\nu m} e^{\nu^2 \frac{m\pi i}{n}}.$$

Bedenkt man, dass

$$(1-q^l)(1-q^{n-l}) = \frac{1}{q^l} - q^l = (1-i)^2 \sin\frac{lm\pi}{n},$$

so folgt für ungerade Werthe von n

$$1-q\cdot 1-q^2\cdots 1-q^{n-1} = (1-i)^{n-1}\prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{lm\pi}{n} = \overset{\bmod n}{\underset{\nu}{S}}(-1)^{\nu m} e^{\nu^2 \frac{m\pi i}{n}},$$

während für ein gerades n

$$1-q\cdot 1-q^2\cdots 1-q^{n-1} = (1-i)^{n-1} i^{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2}\prod_{l=1}^{\frac{n-2}{2}}\sin\frac{lm\pi}{n} = \overset{n}{\underset{\nu}{S}}(-1)^{\nu m} e^{\nu^2 \frac{m\pi i}{n}}.$$

In Art. 18 wird für $m > 0$ der Werth der Summe abgeleitet:

$$\overset{n}{\underset{\nu}{S}}(-1)^{\nu m} e^{\nu^2 \frac{m\pi i}{n}} = e^{-[m(n-1)+1]\frac{\pi i}{4}}\left(\frac{n}{m}\right)\sqrt{ni}.$$

Schreibt man $2n$ statt n, so ergibt sich für m und $n > 0$

$$\prod_{l=1}^{n-1} 2\sin\frac{lm\pi}{2n} = (-1)^{\frac{m-1}{2}(n-1)}\left(\frac{n}{m}\right)\sqrt{n},$$

dagegen folgt für ungerade positive Werthe von m und n

$$\prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} 2\sin\frac{lm\pi}{n} = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{m}\right)\sqrt{n} = \left(\frac{m}{n}\right)\sqrt{n}$$

oder durch Buchstabenvertauschung:

$$\prod_{\mu=1}^{\frac{m-1}{2}} 2\sin\frac{\mu n\pi}{m} = \left(\frac{n}{m}\right)\sqrt{m} = \prod_{\mu} 2\sin\frac{2\mu n\pi}{m},$$

in Uebereinstimmung mit der früher gefundenen Doppelgleichung

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\sum_\mu \left[\frac{\mu n}{m}\right]} = (-1)^{\sum_\mu \left[\frac{2\mu n}{m}\right]}.$$

13.

Um den Werth der GAUSS'schen Summe[1])

$$G\left(\frac{n}{m}\right) = \mathop{\mathrm{S}}_{\mu}^{\bmod m} e^{\mu^2 \frac{2n\pi i}{m}} = 1 + 2\mathop{\mathrm{S}}_{\mu=1}^{\frac{m-1}{2}} e^{\mu^2\frac{2n\pi i}{m}}$$

$$= e^{\frac{(m-1)^2\pi i}{8}}\left(\frac{n}{m}\right)\sqrt{m} = e^{-\frac{(m-1)\pi i}{4}}\left(\frac{2n}{m}\right)\sqrt{m}$$

nebst

$$G\left(-\frac{n}{m}\right) = e^{-\frac{(m-1)^2\pi i}{8}}\left(\frac{n}{m}\right)\sqrt{m} = e^{\frac{(m-1)\pi i}{4}}\left(\frac{2n}{m}\right)\sqrt{m}$$

durch directe Rechnung zu finden, gehen wir mit CAUCHY[2]) aus von der bekannten Thetaformel

$$\sqrt{h}\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\lambda\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} q_1^{\lambda\lambda},$$

wo

$$q = e^{-\pi h}, \quad q_1 = e^{-\pi h_1} \quad \text{und} \quad h h_1 = 1$$

geschrieben ist. Diese Gleichung erfordert die reellen Theile von h und $\sqrt{h}$ positiv und geht für abnehmende Werthe von h und

$$x = \lambda\sqrt{h} \quad \text{über in} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1.$$

1) KRONECKER schreibt statt dessen

$$2\,G\left(\frac{ni}{m}\right) = \mathop{\mathrm{S}}_{\mu}^{\bmod 2m} e^{-\mu^2\frac{n\pi i}{m}},$$

weil für ungerade Werthe von m und n die Summe $\mathop{\mathrm{S}}_{\mu}^{\bmod m}$ nicht unabhängig sein würde von dem Restensystem, welches μ durchläuft. *Berliner Monatsberichte* 1880, S. 692.

2) *Comptes rendus*, Avril 1840, (*Liouville Journal* V, p. 154), vergl. *Bulletin de la société philomatique*, 1817, p. 121.

Der Werth von q bleibt ungeändert, wenn man h um ein gerades Vielfaches von i ändert. Damit wird

$$\sqrt{h+2li}\sum q^{\lambda\lambda}=\sum q_1^{\lambda\lambda}$$

für $(h+2li)\,h_1=i$ oder

$$h_1 i=\frac{1}{2l}\dot{-}hi, \qquad \frac{1}{hi}=\frac{1}{2l}\dot{-}\frac{1}{h_1 i}.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man

$$\sqrt{h+2li}\sqrt{h_1+2l_1 i}\cdots\sqrt{h_{\varkappa-1}+2l_{\varkappa-1}i}\sum q^{\lambda\lambda}=\sum q_\varkappa^{\lambda\lambda}=\sum e^{-\lambda^2\pi h_\varkappa},$$

wenn

$$1=(h+2li)h_1=(h_1+2l_1 i)h_2\cdots=(h_{\varkappa-1}+2l_{\varkappa-1}i)\,h_\varkappa$$

oder

$$h_\varkappa i=\frac{1}{2l_{\varkappa-1}}\dot{-}\frac{1}{2l_{\varkappa-2}}\dot{-}\cdots\dot{-}\frac{1}{2l}\dot{-}hi$$

nebst

$$\frac{1}{hi}=\frac{1}{2l}\dot{-}\frac{1}{2l_1}\dot{-}\frac{1}{2l_2}\cdots\dot{-}\frac{1}{2l_{\varkappa-1}}\dot{-}\frac{1}{h_\varkappa i}.$$

Hiefür kann man auch schreiben

$$h_\varkappa i=\frac{\mu_\varkappa-\lambda_\varkappa hi}{\mu_{\varkappa+1}-\lambda_{\varkappa+1}hi}, \qquad hi=\frac{\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa+1}h_\varkappa i}{\lambda_\varkappa-\lambda_{\varkappa+1}h_\varkappa i},$$

wo

$$\lambda_{\varkappa-1}=2l_{\varkappa-1}\lambda_\varkappa-\lambda_{\varkappa+1} \qquad \text{und} \qquad \mu_{\varkappa-1}=2l_{\varkappa-1}\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa+1}$$

bis

$$\mu_1=2l_1\mu_2-\mu_3=\pm 1, \qquad 0=2l\mu_1-\mu_2$$

resp.

$$0=2l_1\lambda_2-\lambda_3, \qquad \lambda_2=\pm 1, \qquad \lambda_1=0$$

mit abnehmenden absoluten Werthen der $\lambda_\varkappa$ und $\mu_\varkappa$, während

$$\lambda_{\varkappa+1}\mu_\varkappa-\lambda_\varkappa\mu_{\varkappa+1}=1$$

bleibt. Für $h=0$ wird

$$h_\varkappa i=\frac{\mu_\varkappa}{\mu_{\varkappa+1}}=\frac{1}{2l_{\varkappa-1}}\dot{-}\frac{1}{2l_{\varkappa-2}}\dot{-}\cdots\dot{-}\frac{1}{2l}$$

von gleichem Vorzeichen mit $l_{\varkappa-1}$. Nun ist

$$(h+2li)(h_1+2l_1 i)\cdots(h_{\varkappa-1}+2l_{\varkappa-1}i)=\frac{1}{h_1 h_2\cdots h_\varkappa}$$

$$=\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa} i\,\frac{\mu_{\varkappa+1}-\lambda_{\varkappa+1}hi}{\mu_\varkappa-\lambda_\varkappa hi}=i^\varkappa(\mu_{\varkappa+1}-\lambda_{\varkappa+1}hi),$$

folglich ergibt sich

$$\sqrt{i^\varkappa(\mu_{\varkappa+1}-\lambda_{\varkappa+1}hi)}\sum q^{\lambda\lambda}=\sum_\lambda e^{\lambda^2\pi i\frac{\mu_\varkappa-\lambda_\varkappa hi}{\mu_{\varkappa+1}-\lambda_{\varkappa+1}hi}},$$

Lässt man hier nach Multiplication durch $\sqrt{h}$ h unendlich abnehmen, so wird

$$\sqrt{i^{\varkappa}\mu_{\varkappa+1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}dx = \lim_{h=0}\sqrt{h}\sum_{\lambda} e^{\lambda^2\frac{\mu_\varkappa \pi i}{\mu_{\varkappa+1}}}\, e^{-\frac{\lambda^2 h\pi}{\mu_{\varkappa+1}(\mu_{\varkappa+1}-\lambda_{\varkappa+1}hi)}}.$$

Berücksichtigt man nun, dass $\mu_\varkappa\mu_{\varkappa+1}$ gerade sein muss, so ergibt sich für

$$\lambda = \lambda'\mu_{\varkappa+1} + \mu\,,$$

wo λ und λ' alle Zahlen zwischen $\pm\infty$ und μ ein Restensystem mod $\mu_{\varkappa+1}$ durchlaufen:

$$\sqrt{i^{\varkappa}\mu_{\varkappa+1}} = \mathop{\mathrm{S}}_{\mu}^{\mu_{\varkappa+1}} e^{\mu^2\frac{\mu_\varkappa \pi i}{\mu_{\varkappa+1}}} \lim_{h=0}\sqrt{h}\sum_{\lambda'} e^{-\left(\lambda'+\frac{\mu}{\mu_{\varkappa+1}}\right)^2 \frac{h\pi}{1-\frac{\lambda_{\varkappa+1}}{\mu_{\varkappa+1}}hi}}.$$

Nach der Definition eines bestimmten Integrals ist der Grenzwerth von

$$\sqrt{h}\sum_{\lambda'} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1\,,$$

also unabhängig von μ und somit

$$\pm\sqrt{i^{\varkappa}\mu_{\varkappa+1}} = \mathop{\mathrm{S}}_{\mu}^{\mathrm{mod}\,\mu_{\varkappa+1}} e^{\mu^2\frac{\mu_\varkappa \pi i}{\mu_{\varkappa+1}}} = 1 + 2\mathop{\mathrm{S}}_{\mu}^{\frac{1}{2}\mathrm{mod}\,\mu_{\varkappa+1}} e^{\mu^2\frac{\mu_\varkappa \pi i}{\mu_{\varkappa+1}}},$$

wenn rechts μ ein halbes Restensystem modulo $\mu_{\varkappa+1}$ durchläuft.

14.

Zur Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel hat man zu beachten, dass jeder einzelne Factor $\sqrt{\frac{\mu_{\varkappa+1}}{\mu_\varkappa}i}$ mit positivem reellen Theile zu nehmen ist, also

$$= e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\pm\frac{\mu_{\varkappa+1}}{\mu_\varkappa}}\,,$$

wo das obere Vorzeichen für $l_{\varkappa-1} > 0$, das untere für $l_{\varkappa-1} < 0$ gilt. Folglich wird

$$\pm\sqrt{i^{\varkappa}\mu_{\varkappa+1}} = e^{\frac{\varkappa'\pi i}{4}}\sqrt{\mu_{\varkappa+1}}\,,$$

wenn μ den absoluten Werth von μ bezeichnet und $\varkappa' = \varkappa_1 - \varkappa_2$ gesetzt wird, während unter den Kettenbruchsnennern $ll_1 \cdots l_{\varkappa-1}$

$\varkappa_1$ positive und $\varkappa_2$ negative sich befinden. Uebrigens ist leicht zu sehen, dass

$$\varkappa\ \varkappa'\ \mu_\varkappa \text{ und } \lambda_{\varkappa+1}$$

gleichzeitig gerade und ungerade sind.

Bedient man sich der absoluten Werthe

$$\bar{l}_\varkappa = \varepsilon_\varkappa l_\varkappa, \qquad \bar{\mu}_\varkappa = \eta_\varkappa \mu_\varkappa,$$

so wird

$$\eta_{\varkappa+1}\bar{\mu}_{\varkappa+1} = 2\,\varepsilon_{\varkappa-1}\eta_\varkappa \bar{l}_{\varkappa-1}\bar{\mu}_\varkappa - \eta_{\varkappa-1}\bar{\mu}_{\varkappa-1},$$

also

$$\bar{\mu}_{\varkappa+1} = 2\bar{l}_{\varkappa-1}\bar{\mu}_{\varkappa-1} - \vartheta_{\varkappa-1}\bar{\mu}_{\varkappa-1},$$

wenn neben

$$\varepsilon_{\varkappa-1} = \eta_\varkappa \eta_{\varkappa+1}, \qquad \vartheta_{\varkappa-1} = \eta_{\varkappa-1}\eta_{\varkappa+1} = \varepsilon_{\varkappa-2}\varepsilon_{\varkappa-1}$$

geschrieben wird. In der Regel werden mittelst

$$\frac{\mu_\varkappa}{\mu_{\varkappa+1}} = \frac{\vartheta_\varkappa}{2\bar{l}_{\varkappa-1}} \dot{-} \frac{\vartheta_{\varkappa-1}}{2\bar{l}_{\varkappa-2}} \dot{-} \frac{\vartheta_{\varkappa-2}}{2\bar{l}_{\varkappa-3}} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{\vartheta_1}{2\bar{l}}$$

die $\vartheta_\varkappa$ bequem zu berechnen sein: man findet dann[1])

$$\begin{aligned}\varkappa' &= \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cdots\cdots \varepsilon_{\varkappa-1} = \mathfrak{S}\,\vartheta_\varkappa \varepsilon_\varkappa \\ &= \vartheta_\varkappa + \vartheta_\varkappa\vartheta_{\varkappa-1} + \vartheta_\varkappa\vartheta_{\varkappa-1}\vartheta_{\varkappa-2} + \text{etc.}\end{aligned}$$

15.

Setzt man für ein *gerades* $\varkappa$

$$\mu_\varkappa = 2\,n, \qquad \mu_{\varkappa+1} = m > 0,$$

so folgt

$$i^{\frac{\varkappa'}{2}}\sqrt{m} = \mathfrak{S}_\mu^m\, e^{\mu^2\frac{2\,n\,\pi\,i}{m}} = e^{\frac{(m-1)^2\pi i}{8}}\left(\frac{n}{m}\right)\sqrt{m}$$

mithin

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{2\varkappa'-(m-1)^2}{8}}, \qquad \left(\frac{2\,n}{m}\right) = (-1)^{\frac{\varkappa'+m-1}{4}},$$

wenn

$$\frac{2\,n}{m} = \frac{\vartheta_\varkappa}{2\bar{l}_{\varkappa-1}} \dot{-} \frac{\vartheta_{\varkappa-1}}{2\bar{l}_{\varkappa-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{\vartheta_1}{2\bar{l}}.$$

Da für

$$m = 4\,\varrho \pm 1, \qquad \varkappa' - 1 = 4\,\varrho' \mp 1$$

sein muss, so ergibt sich kürzer

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\varrho'}, \qquad \left(\frac{2\,n}{m}\right) = (-1)^{\varrho+\varrho'}.$$

---

1) in Uebereinstimmung mit KRONECKER, *Berl. Monatsberichte* 1880, S. 698.

Als Beispiel wählen wir $m = 143$, $n = -105$

$$\frac{-210}{143} = \frac{-1}{0} \,\dot{-}\, \frac{-1}{2} \,\dot{-}\, \frac{1}{2} \,\dot{-}\, \frac{1}{8} \,\dot{-}\, \frac{-1}{2} \,\dot{-}\, \frac{-1}{4}$$

$\varkappa_1 = 4$, $\varkappa_2 = 2$, $\varkappa' = 2$, $\varkappa' - 1 = 1$, $\varrho' = 0$, $m = 143 = 4 \cdot 36 - 1$, $\varrho = 36$, folglich

$$\left(\frac{-105}{143}\right) = \left(\frac{-210}{143}\right) = 1 .$$

Hieraus entspringt die folgende Regel, welche *auch für gerade Zähler* gilt:

„Um den Werth des Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$ zu finden, wo m eine „positive, ungerade Zahl bedeutet, während n irgend eine rela„tive Primzahl von beliebigem Vorzeichen, gerade oder ungerade „sein kann, setze man

$$2n = \delta_1 m_1$$

„und bilde das lineare System

$$m = \gamma_1 m_1 - \delta_2 m_2, \quad m_1 = \gamma_2 m_2 - \delta_3 m_3 \cdot\cdot\ m_{\varkappa-2} = \gamma_{\varkappa-1} m_{\varkappa-1} - \delta_\varkappa m_\varkappa .$$

„Hier sollen die Factoren γ sämmtlich gerade, die $\delta = \pm 1$ und

$$m_1 > m_2 > m_3 \cdots > m_\varkappa = 1$$

„sein. Schreibt man dann

$$\lambda = \delta_1 + \delta_1 \delta_2 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 + \text{etc.}$$

„so sind $\varkappa$ und λ gerade und man erhält für $\lambda - 1 = 4\mu \pm 1$

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^\mu .\text{“}$$

Die Umkehr des Vorzeichens von n entspricht der Umkehr des Zeichens von δ_1, und folglich auch von λ. Da für

$$\lambda - 1 = 4\mu + 1 \qquad -\lambda - 1 = -4(\mu + 1) + 1$$

und für

$$\lambda - 1 = 4\mu - 1 \qquad -\lambda - 1 = -4\mu - 1 ,$$

so erhält man für $\lambda = 2$, $m \equiv -1 \bmod 4$

$$\left(\frac{-n}{m}\right) = (-1)^{\mu+1} = -\left(\frac{n}{m}\right),$$

während für $\lambda = 0$, $m \equiv 1 \bmod 4$

$$\left(\frac{-n}{m}\right) = (-1)^\mu = \left(\frac{n}{m}\right).$$

Für $n = -1$, $\delta_1 = -1$, $m_1 = 2$ steht die Rechnung wie folgt. Wenn $m = 4\varrho + 1$, so hat man

$$\frac{-2}{m} = \frac{-1}{2\varrho} \,\dot{-}\, \frac{-1}{2} ,$$

mithin $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = -1$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Dagegen wird für $m = 4\varrho - 1$

$$\frac{-2}{m} = \frac{-1}{2\varrho} \dot{-} \frac{1}{2}, \qquad \delta_1 = -1 \;\; \delta_2 = 1$$

$\lambda = -2$, $\mu = -1$. Damit ergibt sich wie erforderlich

$$\left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Für $n = 2$ erhält man $m_1 = 4$, $\delta_1 = 1$, und wegen $m = 4\varrho \pm 1$

$$\varrho \text{ gerade, } \frac{4}{m} = \frac{1}{\varrho} \dot{-} \frac{\mp 1}{4}, \quad \delta_2 = \mp 1, \quad \lambda - 1 = \mp 1, \quad \mu = 0,$$

$$\varrho \text{ ungerade, } \frac{4}{m} = \frac{1}{\varrho \pm 1} \dot{-} \frac{\pm 1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2}, \quad \lambda - 1 = \pm 3, \quad \mu = \pm 1,$$

folglich

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\varrho}.$$

Von verschiedenen Autoren sind anderweite Vorschriften für die Berechnung von $\left(\frac{n}{m}\right)$ aufgestellt worden, welche von den Näherungswerthen des Kettenbruchs abhängen. Wir erwähnen in dieser Beziehung Zeller's Methode in den *Göttinger Nachrichten* für 1879, S. 201 und Schering's Abhandlung *Bestimmung des quadratischen Restcharakters* in den *Göttinger Abhandlungen* für 1879. Als Beispiel gibt Schering die Berechnung von

$$\left(\frac{14930352}{155006407}\right) = 1$$

nach Zeller's und seiner eigenen Methode. Die oben gegebene Regel führt auf die Kettenbruchsentwickelung von

$$\frac{29860704}{155006407} = \frac{1}{6} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{6} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{6} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-}$$
$$\dot{-} \frac{1}{6} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{6} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{6} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{4}$$

und liefert die Werthe $\varkappa = 26$ $\lambda = 26$ $\mu = 6$, mithin $\left(\frac{n}{m}\right) = 1$.

16.

Für den Fall ungerader Werthe von $\varkappa$ $\varkappa'$ $\mu_\varkappa$ und $\lambda_{\varkappa+1}$ sei

$$\mu_\varkappa = m > 0, \qquad \mu_{\varkappa+1} = 2n$$

$$\sqrt{i^\varkappa \mu_{\varkappa+1}} = e^{\frac{\varkappa' \pi i}{4}} \sqrt{2n} = \underset{\mu}{\overset{\text{mod } 2n}{S}} e^{\mu^2 \frac{m\pi i}{2n}}.$$

Hiermit wird

$$\frac{m}{2n} = \frac{\delta_\varkappa}{2\,l_{\varkappa-1}} \dot{-} \frac{\delta_{\varkappa-1}}{2\,l_{\varkappa-2}} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{\delta_1}{2\,l}$$

und der Kettenbruch besteht aus einer ungeraden Anzahl von Partialbrüchen. Als Beispiel setzen wir wieder

$$m = 143, \quad n = -105,$$

wodurch

$$\frac{13}{-210} = \frac{-1}{2} \dotplus \frac{1}{2} \dotplus \frac{1}{8} \dotplus \frac{-1}{2} \dotplus \frac{-1}{4}$$

d. h.

$$\delta_5 = -1, \quad \delta_4 = \delta_3 = 1, \quad \delta_2 = \delta_1 = -1$$

$$\varkappa_1 = 1, \quad \varkappa_2 = 4, \quad \varkappa' = -3$$

$$e^{-\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{210} = \overset{210}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}\, e^{-\mu^2 \frac{143\pi i}{210}}.$$

Um die Beziehung der Summe $\overset{\mathrm{mod}\,2n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}$ zur Gauss'schen Summe $G\left(\frac{n}{m}\right)$ zu finden, kehren wir zurück zu der Gleichung

$$\sqrt{h} \sum q^{\lambda\lambda} = \sum q_1^{\lambda\lambda}$$

und schreiben

$$h = \xi^2 + \frac{m'}{m} i, \quad \text{mithin} \quad h_1 = -\frac{mi}{m'} + \frac{\xi^2 m i}{m'\left(\xi^2 + \frac{m'}{m} i\right)}.$$

Dadurch wird

$$\sqrt{\left(\xi^2 + \frac{m'}{m} i\right)} \sum_{\lambda} e^{-\lambda^2 \pi \left(\xi^2 + \frac{m'}{m} i\right)} = \sum e^{\lambda^2 \frac{m\pi i}{m'}}\, e^{-\lambda^2 \frac{\xi^2 m \pi i}{m'\left(\xi^2 + \frac{m'}{m} i\right)}}.$$

Sei nun

$$\lambda = \lambda' m + \mu \quad \text{resp.} \quad \lambda = \lambda' m' + \mu',$$

wo λ und λ' alle Zahlen zwischen $\pm\infty$, und μ resp. μ' Restensysteme nach den Moduln m und m' durchlaufen, so kann man setzen

$$\sqrt{\xi^2 + \frac{m'}{m} i}\; \overset{\mathrm{mod}\,m}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}} \sum_{\lambda'=-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda' m + \mu)^2 \pi \left(\xi^2 + \frac{m'}{m} i\right)} = \overset{\mathrm{mod}\,m'}{\underset{\mu'}{\mathrm{S}}} \sum_{\lambda'=-\infty}^{\infty} e^{(\lambda' m' + \mu')^2 \frac{m\pi i}{m'}}\, e^{-(\lambda' m' + \mu')^2 \frac{\xi^2 m \pi i}{m'\left(\xi^2 + \frac{m'}{m} i\right)}}$$

und hier die reelle Grösse ξ unbegrenzt abnehmen lassen.

Wenn das Product mm' als eine gerade Zahl vorausgesetzt wird, so erhält man

$$\sqrt{\frac{m'}{m} i}\; \overset{m}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}\, e^{\mu^2 \frac{m'\pi i}{m}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda m + \mu)^2 \pi \xi^2} = \overset{m'}{\underset{\mu'}{\mathrm{S}}}\, e^{\mu'^2 \frac{m\pi i}{m'}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda m' + \mu')^2 \frac{m^2 \pi \xi^2}{m'^2}},$$

die Quadratwurzel mit positivem reellen Theile genommen. Man hat aber vermöge der Definition eines bestimmten Integrals:

$$\lim_{\xi=0} m\xi \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda m + \mu)^2 \pi \xi^2} = \lim m\xi \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda m' + \mu')^2 \frac{m^2 \pi \xi^2}{m'^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx = 1,$$

folglich

$$\sqrt{\frac{m'}{m}\,i} \text{ oder } \sqrt{\frac{m'i}{m}} \overset{\text{mod } m}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}} e^{-\mu^2 \frac{m' \pi i}{m}} = \overset{\text{mod } m'}{\underset{\mu'}{\mathrm{S}}} e^{\mu'^2 \frac{m\pi i}{m'}}$$

und für $m' = 2n$

$$\sqrt{\frac{2ni}{m}} \overset{m}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}} e^{-\mu^2 \frac{2n\pi i}{m}} = \overset{2n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}} e^{\mu^2 \frac{m\pi i}{2n}}.$$

Durch Einführung des Werthes von $G\left(-\frac{n}{m}\right)$ wird

$$\overset{\text{mod } 2n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}} e^{\mu^2 \frac{m\pi i}{2n}} = e^{\frac{(m-1)\pi i}{4}} \left(\frac{2n}{m}\right) \sqrt{2ni},$$

wo n von beliebigem Vorzeichen sein kann, bei positivem reellen Theile der Quadratwurzel. Selbstverständlich kann man auch schreiben

$$\overset{2n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}} e^{-\mu^2 \frac{m\pi i}{2n}} = e^{-\frac{(m-1)\pi i}{4}} \left(\frac{2n}{m}\right) \sqrt{\frac{2n}{i}}.$$

17.

Wir erhalten nunmehr die Gleichung

$$e^{\frac{\varkappa'\pi i}{4}} \sqrt{2n} = e^{\frac{(m-1)\pi i}{4}} \left(\frac{2n}{m}\right) \sqrt{2ni},$$

also

$$\left(\frac{2n}{m}\right) = e^{(\varkappa' - m)\frac{\pi i}{4}} \quad \text{für} \quad n > 0$$

und

$$\left(\frac{2n}{m}\right) = e^{(\varkappa' - m + 2)\frac{\pi i}{4}} \quad \text{für} \quad n = -\bar{n},$$

woraus folgt, dass im ersten Falle

$$m = 4\varrho \pm 1 \equiv \varkappa' \mod 4,$$

im zweiten

$$m = 4\varrho \pm 1 \equiv \varkappa' + 2 \mod 4$$

sein muss. Für unser Beispiel war

$m = 143$, $n = -105$, $\varkappa' = -3$, also $143 \equiv -3 + 2 \mod 4$,

folglich

$$\left(\frac{2n}{m}\right) = \left(\frac{-210}{143}\right) = e^{-\frac{144\pi i}{4}} = 1.$$

In der Formel

$$\sqrt{\frac{2ni}{m}} \overset{m}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}} e^{-\mu^2 \frac{2n\pi i}{m}} = \overset{2n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}} e^{\mu^2 \frac{m\pi i}{2n}}$$

lässt sich für positive ungerade Werthe von m und n der Werth der Summe $\overset{2n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}$ mittelst einer einfachen Transformation finden, welche zugleich eine Ableitung des Reciprocitätssatzes liefert. Man erhält leicht

$$\overset{\mathrm{mod}\,2n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}\; e^{\mu^2 \frac{m\pi i}{2n}} = \overset{\mathrm{mod}\,n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}} \left\{ e^{\mu^2 \frac{2m\pi i}{n}} + e^{(2\mu+1)^2 \frac{m\pi i}{2n}} \right\}$$

und für

$$2\nu \equiv 1 \mod n$$

$$\overset{2n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}\; e^{\mu^2 \frac{m\pi i}{n}} = \overset{n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}\; e^{\mu^2 \frac{2m\pi i}{n}} + e^{(1-4\nu^2)\frac{m\pi i}{2n}} \overset{n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}\; e^{(\mu+\nu)^2 \frac{2m\pi i}{n}}$$

$$= \left\{ 1 + (-1)^{\frac{m+n}{2}} \frac{1}{i} \right\} \sum_{\mu}^{n} e^{\mu^2 \frac{2m\pi i}{n}} = \sqrt{\frac{2}{i}}\, e^{\frac{(m+n)^2 \pi i}{8}} \sum_{\mu}^{n} e^{\mu^2 \frac{2m\pi i}{n}}.$$

Damit ergibt sich nach Multiplication durch $\sqrt{\frac{mi}{2}}$

$$\sqrt{m}\, e^{\frac{(m+n)^2 \pi i}{8}} \overset{n}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}\; e^{\mu^2 \frac{2m\pi i}{n}} = \sqrt{n}\, e^{\frac{\pi i}{2}} \overset{m}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}\; e^{-\mu^2 \frac{2n\pi i}{m}},$$

und bei Einführung der Werthe von $G\left(\frac{m}{n}\right)$ und $G\left(-\frac{n}{m}\right)$:

$$e^{\frac{(m+n)^2 \pi i}{8} + \frac{(n-1)^2 \pi i}{8}} \left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{\pi i}{2} - \frac{(m-1)^2 \pi i}{8}} \left(\frac{n}{m}\right)$$

oder

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{m}\right).$$

18.

Wir wollen noch die allgemeinere Summe

$$M = \overset{\mathrm{mod}\,m}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}\; e^{\frac{\pi i}{m}(m'\mu^2 + m''\mu)}$$

betrachten. Damit dieselbe unabhängig sei von dem System incongruenter Zahlen modulo m, welches μ durchlaufen soll, muss

$$e^{\pi i (m m' + m'')} = 1 \quad \text{oder} \quad m m' + m'' = 2 m_2$$

sein. Ausserdem sollen m und m' keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, so dass die Gleichung $l m' - l' m = 1$ aufgelöst werden kann. Schreibt man

$$(m+1)\, m' = m_1, \quad l m' + l' = l_1,$$

so hat man auch $l m_1 - l_1 m = 1$. Hiermit folgt

$$M = \mathop{\mathrm{S}}_{\mu}^{m} e^{\frac{\pi i}{m}(m_1 \mu^2 + 2 m_2 \mu)} = \mathrm{S}\, e^{\frac{\pi i}{m}[m_1 \mu^2 + 2 m_2 (l m_1 - l_1 m)\mu]}$$

$$= \mathop{\mathrm{S}}_{\mu}^{m} e^{\frac{m_1 \pi i}{m}(\mu^2 + 2 l m_2 \mu)} = e^{-\frac{l^2 m_1 m_2^2 \pi i}{m}} \mathrm{S}\, e^{\frac{m_1 \pi i}{m}(\mu + l m_2)^2}$$

$$= e^{-\frac{l m_1 l m_2^2 \pi i}{m}} \mathop{\mathrm{S}}_{\mu}^{m} e^{\mu^2 \frac{m_1 \pi i}{m}} = (-1)^{l l_1 m_2} e^{-\frac{l m_2^2 \pi i}{m}} \mathrm{S} (-1)^{\mu m'} e^{\mu^2 \frac{m' \pi i}{m}}.$$

Setzt man beispielsweise $m'' = m m' = m_2$, so wird

$$M = \mathop{\mathrm{S}}_{\mu}^{m} (-1)^{\mu m'} e^{\mu^2 \frac{m' \pi i}{m}} = \mathrm{S}\, e^{\mu^2 \frac{m+1}{m} m' \pi i}$$

und durch Umkehr des Vorzeichens von i

$$M' = \mathop{\mathrm{S}}_{\mu}^{m} (-1)^{\mu m'} e^{-\mu^2 \frac{m' \pi i}{m}} = \mathrm{S}\, e^{-\mu^2 \frac{m+1}{m} m' \pi i}.$$

Die Substitution der früher erhaltenen, resp. für ungerade Werthe von m und m' gültigen Formeln ergibt hieraus

a) für positive, ungerade Werthe von m und beliebige m':

$$M = e^{-\frac{m \pi i}{4}} \left(\frac{m'}{m}\right) \sqrt{m i}, \quad M' = e^{\frac{m \pi i}{4}} \left(\frac{m'}{m}\right) \sqrt{\frac{m}{i}},$$

b) für positive, ungerade Werthe von m' und beliebige m:

$$M = e^{-[(m-1)m'+1]\frac{\pi i}{4}} \left(\frac{m}{m'}\right) \sqrt{m i}, \quad M' = e^{[(m-1)m'+1]\frac{\pi i}{4}} \left(\frac{m}{m'}\right) \sqrt{\frac{m}{i}}.$$

Sind m und m' gleichzeitig positiv und ungerade, so reduciren sich beide Formen *a*) und *b*) vermöge des Reciprocitätssatzes auf einander, die Werthe der Quadratwurzeln aber sind stets mit positivem reellen Theile zu verstehen.

19.

Die entwickelten Formeln gestatten eine berühmte Anwendung auf die sogenannte *lineare Transformation der Thetafunctionen.*

Die Functionalgleichung der vier coordinirten Thetafunctionen schreiben wir in der Form

$$\Theta_\delta^\varepsilon (u\, h) = \delta\, \Theta(u + \pi) = \varepsilon q e^{2ui}\, \Theta(u + h i).^{1)}$$

1) *Leipziger Berichte* vom 4. März 1889, S. 86.

wo $q = e^{-h}$, $\delta^2 = \varepsilon^2 = 1$. Der reelle Theil von h muss positiv sein. In Verbindung mit der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} = 4 \frac{\partial \Theta}{\partial h} \quad \text{oder} \quad \Theta'' u = 4 \frac{\partial \Theta u}{\partial h}$$

bestimmen sich hieraus — bis auf einen numerischen, von u und h unabhängigen Factor — die vier Jacobi'schen Functionen

$$\vartheta_3(u\,q) = \Theta_1^1(u\,h) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2} e^{2mui}$$
$$\vartheta\ (u\,q) = \Theta_1^{-1}(u\,h) = \sum (-1)^m q^{m^2} e^{2mui}$$
$$\vartheta_2(u\,q) = \Theta_{-1}^1(u\,h) = \sum q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)ui}$$
$$\vartheta_1(u\,q) = \Theta_{-1}^{-1}(u\,h) = \frac{1}{i} \sum (-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)ui}.$$

Die Thetafunction erlangt durch Hinzufügung eines geeigneten Exponentialfactors von der Form $e^{\lambda u^2}$ bemerkenswerthe Eigenschaften.[1]) So wird z. B. für $\lambda = \frac{1}{h}$

$$\varphi u = e^{\frac{u^2}{h}} \Theta_\delta^\varepsilon(u) = \delta e^{-\frac{\pi^2}{h^2} - \frac{2\pi u}{h}} \varphi(u+\pi) = \varepsilon \varphi(u+hi),$$

mithin für

---

1) Wir sehen hier ab von den Fällen, in denen resp.

$$\lambda = -\frac{1}{2}\frac{\vartheta''}{\vartheta}, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}.$$

Schreibt man

$$e^{\lambda u^2}\vartheta u = \vartheta \zeta u, \qquad e^{\lambda_1 u^2}\vartheta_1 u = u\vartheta_1' \zeta_1 u,$$
$$e^{\lambda_2 u^2}\vartheta_2 u = \vartheta_2 \zeta_2 u, \qquad e^{\lambda_3 u^2}\vartheta_3 u = \vartheta_3 \zeta_3 u,$$

so werden die von Jacobi, Abel und Weierstrass betrachteten vier Functionen von der Form der beständig convergirenden Reihen

$$\zeta u = 1 - \tfrac{1}{12}\alpha_2 u^4 + \tfrac{1}{30}\alpha_3 u^6 \mp \cdots$$
$$\zeta_1 u = 1 - \tfrac{1}{12}\beta_2 u^4 - \tfrac{1}{30}\beta_3 u^6 - \cdots$$
$$\zeta_2 u = 1 - \tfrac{1}{12}\gamma_2 u^4 - \tfrac{1}{30}\gamma_3 u^6 - \cdots$$
$$\zeta_3 u = 1 + \tfrac{1}{12}\delta_2 u^4 + \tfrac{1}{30}\delta_3 u^6 + \cdots$$

durch das Weierstrass'sche unendliche Doppelproduct

$$\prod_{pp'} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}$$

dargestellt, wenn resp.

$$\omega = p\pi + (p' + \tfrac{1}{2})hi, \quad \omega_1 = p + p'hi$$
$$\omega_2 = (p + \tfrac{1}{2})\pi + p'hi, \quad \omega_3 = (p + \tfrac{1}{2})\pi + (p' + \tfrac{1}{2})hi$$

gesetzt werden und die Indices p und p' alle ganzen Zahlen durchlaufen mit einziger Ausnahme von $\omega_1 = 0$. Vergl. *Mathem. Annalen* Bd. 34, S. 507.

$$u' = \frac{\pi u i}{h}, \quad h' = \frac{\pi^2}{h}, \quad q' = e^{-h'}, \quad \varphi(u h) = f(u' h')$$
$$f u' = \varepsilon f(u' + \pi) = \delta q' e^{2u'i} f(u' + h'i).$$

Hieraus folgt zunächst

$$f(u'h') = e^{\frac{u^2}{h}} \Theta_\delta^\varepsilon u = \gamma_h \Theta_\varepsilon^\delta (u'h'),$$

wo die Abhängigkeit des Factors γ_h von h mit Hülfe der Gleichung

$$\Theta'' u = 4 \frac{\partial \Theta}{\partial h}$$

zu ermitteln ist. Man erhält durch logarithmische Differentiation

$$\frac{1}{\Theta_\delta u} \frac{\partial \Theta n}{\partial h} - \frac{u^2}{h^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} + \frac{1}{\Theta_\varepsilon u'} \left\{ \frac{\partial \Theta u'}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial h} + \frac{\partial \Theta u'}{\partial h'} \frac{\partial h'}{\partial h} \right\},$$

folglich wegen

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \frac{\pi i}{h}, \quad \frac{\partial u'}{\partial h} = -\frac{\pi u i}{h^2}, \quad \frac{\partial h'}{\partial h} = -\frac{\pi^2}{h^2}$$
$$\frac{1}{4} \frac{\Theta'' u}{\Theta_\delta u} - \frac{u^2}{h^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} - \frac{\pi u i}{h^2} \frac{\Theta' u'}{\Theta_\varepsilon u'} - \frac{\pi^2}{4 h^2} \frac{\Theta'' u'}{\Theta_\varepsilon u'}.$$

Die zweimalige Differentiation nach u liefert aber

$$\frac{\Theta' u}{\Theta_\delta u} + \frac{2u}{h} = \frac{\Theta' u'}{\Theta_\varepsilon u'} \frac{\partial u'}{\partial u} = \frac{\pi i}{h} \frac{\Theta' u'}{\Theta_\varepsilon u'}$$
$$\frac{\Theta'' u}{\Theta_\delta u} - \left(\frac{\Theta' u}{\Theta_\delta u}\right)^2 + \frac{2}{h} = -\frac{\pi^2}{h^2} \left\{ \frac{\Theta'' u'}{\Theta_\varepsilon u'} - \left(\frac{\Theta' u'}{\Theta_\varepsilon u'}\right)^2 \right\}.$$

Durch Substitution ergibt sich damit ohne Schwierigkeit

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{1}{2h} \quad \text{oder} \quad \gamma = c \sqrt{\frac{\pi}{h}}.$$

Die Bestimmung des numerischen Factors c können wir für $\delta = \varepsilon = 1$ aus der mehrfach benutzten Cauchy'schen Gleichung

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2} = \sqrt{\frac{\pi}{h}} \sum q'^{m^2} \quad \text{oder} \quad \vartheta_3(0\, q) = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\, \vartheta_3(0\, q')$$

(nachdem h durch $\frac{h}{\pi}$ und q_1 durch q' ersetzt worden) entnehmen, wonach $c = +1$ sein muss, wenn $\sqrt{\frac{\pi}{h}}$ mit positivem reellen Theile gewählt wird. Um von der Gleichung

$$e^{\frac{u^2}{h}} \vartheta_3(u\, q) = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\, \vartheta_3\left(\frac{\pi u i}{h}, q'\right)$$

zu den coordinirten Thetafunctionen überzugehen, hat man u um $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{h i}{2}$, also u' um $\frac{h' i}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ zu ändern. Alsdann ergibt sich, dass die Gleichung $c = 1$ für $\delta = \pm 1$ $\varepsilon = \mp 1$ gültig bleibt, während für $\delta = \varepsilon = -1$ $c = \frac{1}{i}$ wird, also wie bekannt:

$$e^{\frac{u^2}{h}}\vartheta_1(u\,q)=\sqrt{\frac{\pi}{h}}\,\frac{1}{i}\,\vartheta_1\left(\frac{\pi u i}{h},q'\right)$$

neben

$$e^{\frac{u^2}{h}}\vartheta(u\,q)=\sqrt{\frac{\pi}{h}}\,\vartheta_2\left(\frac{\pi u i}{h},q'\right)$$

$$e^{\frac{u^2}{h}}\vartheta_2(u\,q)=\sqrt{\frac{\pi}{h}}\,\vartheta\left(\frac{\pi u i}{h},q'\right).$$

20.

Wir schreiben jetzt allgemeiner

$$p=k\pi+lhi,\qquad p'=k'\pi+l'hi,$$
$$n\pi=l'p-lp',\qquad nhi=-k'p+kp'.\qquad n=kl'-lk'>0$$

Vergleicht man die Formel

$$\Theta_\delta^\varepsilon(u+p)=\delta^k\varepsilon^l q^{-ll}e^{2lui}\,\Theta_\delta^\varepsilon u$$

mit der identischen Gleichung

$$e^{\alpha(u+p)^2 i}=e^{\alpha p(k\pi i-lh+2ui)}\,e^{\alpha u^2 i},$$

so ergibt sich für $\alpha p=l$

$$e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\Theta u=\eta u=(-1)^{kl}\delta^k\varepsilon^l\eta(u+p)$$
$$=(-1)^{k'l'}\delta^{k'}\varepsilon^{l'}e^{\frac{2u+p'}{p}n\pi i}\,\eta(u+p').$$

Schreibt man hier

$$\pi u=pu',\quad h'i=\pi\frac{p'}{p},\quad q'=e^{-h'}<1,$$

also auch[1])

$$e^{\frac{lu^2i}{p}}=e^{\frac{luu'i}{\pi}}=e^{\frac{lpu'^2i}{\pi^2}},$$

---

1) Wir erwähnen hierbei noch einige Relationen, die zuweilen von Nutzen sein können:

$$hi=-\pi\frac{k'\pi-kh'i}{l'\pi-l'h'i}=-\frac{k}{l}\pi+\frac{\pi^2}{l(l'\pi-lh'i)}=-\frac{k'}{l'}\pi+\frac{h'\pi i}{l'(l'\pi-lh'i)}$$

$$h'i=\pi\frac{k'\pi+l'hi}{k\pi+lhi}=\frac{l'}{l}\pi-\frac{\pi^2}{l(k\pi+lhi)}=\frac{k'}{k}\pi+\frac{h\pi i}{k(k\pi+lhi)}$$

$$n\pi^2=(k\pi+lhi)(l'\pi-lh'i),\quad nhh'=(k'\pi+l'hi)(k'\pi-kh'i)$$

$$n\pi u'=(l'\pi-lh'i)u,\quad \pi u=(k\pi+lhi)u'$$

$$\frac{dh}{k\pi+lhi}=\frac{dh'}{l'\pi-lh'i},\quad dh=\frac{n\pi^2dh'}{(l'\pi-lh'i)^2},\quad dh'=\frac{n\pi^2dh}{(k\pi+lhi)^2}$$

Einer Aenderung von u um $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{hi}{2}$ entspricht eine Aenderung von u' um resp. $\frac{1}{2}(l'\pi-lh'i)$ und $\frac{1}{2}(-k'\pi+kh'i)$, während sich u' um $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{h'i}{2}$ ändert, wenn u um $\frac{p}{2}$ oder um $\frac{p'}{2}$ geändert wird.

Endlich mag noch die folgende Bemerkung Platz finden. Da man die Vor-

ferner

$$\delta' = (-1)^{kl} \delta^k \varepsilon^l, \qquad \varepsilon' = (-1)^{k'l'} \delta^{k'} \varepsilon^{l'}$$
$$\delta = (-1)^{ll'} \delta'^{l'} \varepsilon'^{l}, \quad \varepsilon = (-1)^{kk'} \delta'^{k'} \varepsilon'^{k},$$

so erhält man

$$\eta u = Hu' = \delta' H(u' + \pi) = \varepsilon' e^{n(2u'i - h')} H(u' + h'i).$$

Diese Gleichung geht für $n = kl' - lk' = 1$ über in

$$Hu' = \delta' H(u' + \pi) = \varepsilon' q' e^{2u'i} H(u' + h'i),$$

die Functionalgleichung der Thetafunction. Man darf folglich

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}} \Theta_\delta^\varepsilon(uh) = \gamma_h \Theta_{\delta'}^{\varepsilon'}(u'h')$$

setzen und kann durch ein analoges Verfahren wie Art. 18 die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{li}{p} = -\frac{li}{2(k\pi + lhi)}$$

ableiten. Vermöge dieser folgt

$$\gamma_h = c\sqrt{\frac{\pi}{p}} = c\sqrt{\frac{l'\pi - lh'i}{\pi}} = c\sqrt{\frac{u'}{u}},$$

wo der Werth des numerischen Factors c aufzusuchen bleibt.

21.

Bevor wir uns zu dieser Aufgabe wenden, lassen wir noch einige allgemeine Betrachtungen über die lineare Transformation vorausgehen. Von Wichtigkeit erscheint die Beantwortung der Frage, wann durch die Transformation $\bar{q}' < \bar{q}$ oder für

$$h = h_1 + h_2 i, \quad h' = h'_1 + h'_2 i, \quad h'_1 > h_1 > 0$$

gemacht werden könne, weil die rasche Convergenz der Thetareihen durch die Kleinheit von q bedingt wird.

Man leitet sogleich die Gleichung ab

$$h'_1 = \frac{n\pi^2 h_1}{(k\pi - lh_2)^2 + l^2 h_1^2},$$

welche für $n = 1$ die Ungleichung

$$(k\pi - lh_2)^2 + l^2 h_1^2 < \pi^2$$

---

zeichen von $k\,l\,k'$ und l' gleichzeitig umkehren kann, so darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit k oder $l > 0$ annehmen, wenn man nur bedenkt, dass bei einem Vorzeichenwechsel von p und p' $-u'$ an die Stelle von u' tritt, während h' ungeändert bleibt.

liefert. Setzt man nun $l = 1$ und wählt k so, dass

$$-\frac{\pi}{2} < k\pi - lh_2 < \frac{\pi}{2},$$

so ergibt sich die Bedingung $h_1^2 < \frac{3}{4}\pi^2$ oder $h_1 < \sqrt{\frac{3}{4}}$. Folglich kann man stets bewirken, dass

$$\bar{q} = e^{-h_1} < e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}\ ^{1})$$

wird, weil entgegengesetzten Falls $\bar{q}$ durch den Uebergang zu $\bar{q}'$ verkleinert werden kann.

Für $h_1 > \pi$ hat man stets $h_1' < h_1$, dagegen hängt, wie leicht zu sehen, im Falle

$$\pi > h_1 > \pi\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

das Wachsen oder Abnehmen der Grösse q' von der Beschaffenheit des imaginären Theils h_2 ab. Ist z. B. q reell, so kann man jederzeit $k\pi - lh_2 = 0$ machen und erhält

$$h_1' = \frac{\pi^2}{h_1}.$$

In diesem Falle sinkt also der Maximalwerth von $\pm q$ auf $e^{-\pi}$ herab.

Eine weitere Betrachtung knüpft sich an die Einführung der elliptischen Integralmoduln $\varkappa$ und $\varkappa'$ mittelst der Gleichungen

$$\varkappa = \left(\frac{\vartheta_2(0\,q)}{\vartheta_3(0\,q)}\right)^2, \quad \varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2} = \left(\frac{\vartheta(0\,q)}{\vartheta_3(0\,q)}\right)^2,$$

sowie der zugehörigen ganzen elliptischen Integrale

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} \quad \text{und} \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa'^2\sin^2\varphi}},$$

wofür

$$h = \pi\frac{K'}{K}.$$

Wenn l und k' gerade, also k und l' ungerade genommen werden, so folgt $\delta = \delta'$, $\varepsilon = \varepsilon'$ und

$$\gamma_k\,\Theta_\delta^\varepsilon(u'h') = e^{\frac{lu^2i}{p}}\,\Theta_\delta^\varepsilon(u\,h).$$

Daraus schliesst man[2]), dass auch

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\vartheta_2 q'}{\vartheta_3 q'}\right)^4, \quad \varkappa'^2 = \left(\frac{\vartheta q'}{\vartheta_3 q'}\right)^4,$$

---

1) Vergl. Jacobi's *Werke* Bd. II, S. 117; *Leipziger Berichte* 1862, S. 92.

2) Allerdings braucht γ nicht unabhängig zu sein von δ und ε, doch wird am Schlusse von Art. 23 gezeigt, dass diese Unabhängigkeit in Bezug auf γ^4 in der That stattfindet.

d. h. die Werthe der elliptischen Modulquadrate ändern sich durch den Uebergang von q zu q' nicht, falls l und k' gerade sind. Man erhält damit Aufschluss über die Vieldeutigkeit von q, als Function der elliptischen Moduln oder Integrale betrachtet.[1] Denn aus

$$h'i = \pi \frac{k'\pi + l'hi}{k\pi + lhi} = \pi \frac{k'K + l'K'i}{kK + lK'i}$$

folgt

$$h' = \pi \frac{l'K' - k'Ki}{kK + lK'i} = \pi \frac{(4m'+1)K' - 2n'Ki}{(4m+1)K + 2nK'i},$$

wenn

$$\pm l' = 4m' + 1, \quad \pm k = 4m + 1, \quad \pm k' = 2n', \quad \pm l = 2n$$

geschrieben werden, wo wegen $kl' - lk' = 1$

$$4mm' + m + m' = nn'$$

sein muss.

22.

Wir kehren jetzt zur Bestimmung des Factors c als einer achten Wurzel der Einheit zurück. Diese Bestimmung ist bekanntlich mit eigenthümlichen Schwierigkeiten verknüpft, zu deren Ueberwindung JACOBI in seinen Königsberger Vorlesungen einen doppelten Weg eingeschlagen hat.

Man gelangt am directesten zum Ziele, wenn man p unbegrenzt abnehmen lässt. Hierzu setzen wir

$$p = \sigma\pi i, \quad \text{mithin} \quad p' = \frac{\pi}{l}(l'\sigma i - 1)$$

$$hi = \frac{\pi}{l}(\sigma i - k), \qquad h'i = \frac{\pi}{l}\left(\frac{i}{\sigma} + l'\right),$$

also

$$q = e^{-\frac{\pi\sigma}{l}} e^{-\frac{k\pi i}{l}}, \qquad q' = e^{-\frac{\pi}{l\sigma}} e^{\frac{l'\pi i}{l}},$$

wo l und σ gleiche Vorzeichen haben sollen. Für abnehmende Werthe von σ convergirt mod $q = \bar{q}$ zur Einheit, während q' sich der Null nähert.

Um weitläufige Unterscheidungen zu ersparen, gehen wir aus von dem Falle

$$\delta = \varepsilon = \delta' = \varepsilon' = -1, \quad e^{\frac{lu^2 i}{p}} \Theta_{-1}^{-1}(uh) = \gamma_k \Theta_{-1}^{-1}(u'h')$$

oder

$$\sqrt{\frac{p}{\pi}}\, \vartheta_1(uq) = c\, e^{-\frac{lu^2 i}{p}} \vartheta_1(u'q'),$$

1) Vergl. die Anmerkung von WEIERSTRASS in Bd. 1 der *Werke* von JACOBI S. 545 f.

wie sich leicht ergibt, schon weil eine gerade Function von u keiner ungeraden gleich sein kann. Wir setzen hier

$$u = \frac{\pi}{2l}, \quad \text{mithin} \quad u' = \frac{\pi}{2l\sigma i}$$

und untersuchen zunächst die Grenze des Ausdrucks

$$\sqrt{\frac{p}{\pi}}\, \vartheta_1(u\,q) = \sqrt{\sigma i}\; \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2l}, q\right)$$

für $\lim \sigma = 0$. In der Definitionsgleichung

$$\vartheta_1(u\,q) = \frac{1}{i} \sum (-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)ui}$$

ersetzen wir m durch $ln + \lambda$, wo m und n alle Zahlen zwischen $\pm\infty$ und λ ein Restensystem mod l durchlaufen. Dadurch erhält man

$$\frac{1}{i} \overset{\text{mod}\, l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} (-1)^\lambda q^{(\lambda+\frac{1}{2})^2} e^{(2\lambda+1)ui} \sum_n (-1)^{ln} q^{ln(ln+2\lambda+1)} e^{2lnui}.$$

Durch Einführung der Werthe von u und q wird

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2l}, q\right) = \frac{1}{i} \overset{l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} (-1)^\lambda e^{-(\lambda+\frac{1}{2})^2 \frac{k\pi i}{l} + (\lambda+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{l}} \sum_n$$

$$\sum_n = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{n(k+1)(l+1)} e^{-\pi l\sigma\left(n+\frac{2\lambda+1}{2l}\right)^2}.$$

Schreibt man ferner

$$l\sigma = \xi^2, \quad w = (\lambda+\tfrac{1}{2})\sqrt{\frac{\sigma}{l}}$$

und bedenkt, dass wegen $kl' - lk' = 1$ k und l nicht gleichzeitig gerade sein können, also $(-1)^{(k+1)(l+1)} = 1$ sein muss, so wird wegen

$$\lim_{\xi=0} \sum_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-\pi(n\xi+w)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$$

$$\lim_{\sigma=0} \sqrt{l\sigma} \sum_n e^{-\pi l\sigma\left(n+\frac{2\lambda+1}{2l}\right)^2} = 1,$$

mithin

$$\lim \sqrt{\sigma i}\; \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2l}, q\right) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{i}{l}} \overset{l}{\underset{\lambda}{\mathrm{S}}} (-1)^\lambda e^{-(\lambda+\frac{1}{2})^2\frac{k\pi i}{l} + (\lambda+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{l}}.$$

Auf der rechten Seite dagegen erhält man

$$\vartheta_1(u'q') = \frac{1}{i} \sum_m (-1)^m e^{-(m+\frac{1}{2})^2 \frac{\pi}{l\sigma} + (m+\frac{1}{2})^2 \frac{l'\pi i}{l} + (m+\frac{1}{2})\frac{\pi}{l\sigma}}$$

$$= \frac{1}{i} e^{\frac{\pi}{4l\sigma} + \frac{l'\pi i}{4l}} \sum_m (-1)^m e^{-\frac{m^2\pi}{l\sigma} + m(m+1)\frac{l'\pi i}{l}}.$$

Da für $\sigma = 0$ offenbar $\sum_m = 1$ wird, so folgt die Gleichung

$$c e^{-\frac{l u'^2 i}{p}} \vartheta_1(u' q') = \frac{c}{i} e^{\frac{l'_1 \pi i}{4 l}} = \lim \sqrt{\sigma i}\, \vartheta_1(u\, q)$$

und damit

$$c = \sqrt{\frac{i}{l}}\, e^{-\frac{l' \pi i}{4 l}} \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda}^{l} (-1)^{\lambda} e^{-(\lambda + \frac{1}{2})^2 \frac{k \pi i}{l} + (\lambda + \frac{1}{2}) \frac{\pi i}{l}}$$

oder für

$$2 k_1 = (k-1)(l-1)$$

$$c = \sqrt{\frac{i}{l}}\, e^{-\frac{(k + l' - 2) \pi i}{4 l}} \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda}^{l} (-1)^{k \lambda} e^{-(k \lambda^2 - 2 k_1 \lambda) \frac{\pi i}{l}}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist mit positivem reellen Theile zu nehmen, wenn $\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ der nämlichen Bedingung unterworfen wird.

Hieraus ergibt sich z. B. für die speciellen Werthe

$$k = l' = 0, \quad l = -1, \quad k' = 1:$$

$$p = -h i, \quad p' = \pi, \quad h' = \frac{\pi^2}{h}, \quad u' = \frac{\pi u i}{h}$$

$$c = \sqrt{-i}\, e^{-\frac{\pi i}{2}} = e^{-\frac{3 \pi i}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{-h i}{\pi}}\, \vartheta_1(u\, q) = \frac{\sqrt{-i}}{i} e^{-\frac{u^2}{h}} \vartheta_1\left(\frac{\pi u i}{h}, q'\right)$$

oder

$$\sqrt{\frac{h}{\pi}}\, \vartheta_1(u\, q) = \frac{1}{i} e^{-\frac{u^2}{h}} \vartheta_1(u' q'),$$

in Uebereinstimmung mit Art. 19.

22.

Es bleibt noch der Werth der Summe

$$L = \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda}^{l} (-1)^{k \lambda} e^{-(k \lambda^2 - 2 k_1 \lambda) \frac{\pi i}{l}}$$

zu ermitteln, was nach den Entwickelungen des Art. 18 zu geschehen hat. Zunächst wird wegen $k l' - k' l = 1$

$$L = \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda}^{l} (-1)^{k \lambda} e^{-(\lambda^2 - 2 k_1 l' \lambda) \frac{k \pi i}{l}} = e^{\frac{k k_1^2 l'^2 \pi i}{l}} \mathop{\mathrm{S}} (-1)^{k \lambda} e^{-(\lambda - k_1 l')^2 \frac{k \pi i}{l}}$$

$$= (-1)^{(k + k') k_1 l'} e^{\frac{k_1^2 l' \pi i}{l}} \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda} (-1)^{k \lambda} e^{-\lambda^2 \frac{k \pi i}{l}},$$

und da

$$\frac{k_1^2 l'}{l} = \frac{k + l' - 2}{4l} + \frac{(k-1)^2 (l-2) l'}{4} + \frac{(k-2) k'}{4},$$

so folgt

$$c = (-1)^{(k+k') k_1 l'} e^{[(k-1)^2 (l-2) l' + (k-2) k'] \frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{i}{l}} \overset{\text{mod}\, l}{\underset{\lambda}{S}} (-1)^{k\lambda} e^{-\lambda^2 \frac{k \pi i}{l}}.$$

Nun ist nach Artikel 18, für positive ungerade Werthe von l, wenn man zur Abkürzung die achte Einheitswurzel

$$\omega = e^{\frac{\pi i}{4}}$$

schreibt:

$$\underset{\lambda}{S} = M'_a = \omega^{l'} \left(\frac{k}{l}\right) \sqrt{\frac{l}{i}}$$

und wenn $l = -\bar{l}$

$$\underset{\lambda}{S} = M_a = \omega^{-l'} \left(\frac{k}{\bar{l}}\right) \sqrt{\bar{l} i} = \omega^{l'} \left(\frac{k}{\bar{l}}\right) \sqrt{\frac{l}{i}};$$

dagegen für positive ungerade Werthe von k:

$$\underset{\lambda}{S} = M'_b = \omega^{k(l-1)+1} \left(\frac{l}{k}\right) \sqrt{\frac{l}{i}},$$

während für $k = -\bar{k}$

$$\underset{\lambda}{S} = M_b = \omega^{-\bar{k}(l-1)-1} \left(\frac{l}{\bar{k}}\right) \sqrt{l i}$$

$$= \omega^{k(l-1)+1} \left(\frac{l}{\bar{k}}\right) \sqrt{\frac{l}{i}}$$

hervorgeht. Nur für den Fall, dass l und k gleichzeitig negativ sind, also für $l = -\bar{l}$, wird

$$\underset{\lambda}{S} = -\omega^{k(l-1)+1} \left(\frac{l}{\bar{k}}\right) \sqrt{\frac{\bar{l}}{i}}.$$

Die Substitution dieser Werthe ergibt

für ungerade Werthe von l:

$$c = (-1)^{(k+k') k_1 l'} \omega^{(k-1)^2 (l-2) l' + (k-2) k' + l} \left(\frac{k}{\pm l}\right),$$

für ungerade Werthe von k:

$$c = (-1)^{(k+k') k_1 l'} \omega^{(k-1)^2 (l-2) l' + (k-2) k' + k(l-1) + 1} \left(\frac{l}{\pm k}\right).$$

Sind l und k beide negativ, so ist dem letzteren Ausdruck der Factor $\omega^4 = -1$ hinzuzufügen. Beide Ausdrücke für c gehen durch den Reciprocitätssatz in einander über, wenn k und l gleichzeitig ungerade sind, wobei nach Art. 5

$$\left(\frac{-k}{-l}\right) = -(-1)^{\frac{k-1}{2}\cdot\frac{l-1}{2}}\left(\frac{-l}{-k}\right)$$

zu setzen ist.

Die gefundenen Formeln sind wesentlicher Vereinfachungen fähig, die sich ergeben, wenn man die Fälle unterscheidet, in denen 1) k gerade, l ungerade, 2) k ungerade, l gerade, 3) k und l beide ungerade sind. Man beweist leicht vermöge $kl' - lk' = 1$

1) $k(g)$, $l(u)$, $k'(u)$

$$(k-2)(l+k') \equiv k(l-2l'+k') \equiv 0 \mod 8$$

$$c_1 = (-1)^{\frac{l-1}{2}l'}\,\omega^{(l-2)l'+(k-2)k'+l}\left(\frac{k}{\pm l}\right)$$

$$= \omega^{kk'-ll'-2k'+l}\left(\frac{k}{\pm l}\right) = \omega^{-l(k+l-3)}\left(\frac{k}{\pm l}\right).$$

2) $k(u)$, $l(g)$, $l'(u)$

$$(l-2)(k-l') \equiv l(k+2k'-l') \equiv 0 \mod 8$$

$$c_2 = (-1)^{\frac{k-1}{2}(k'+1)}\,\omega^{(k-2)k'+k(l-1)+1}\left(\frac{l}{\pm k}\right)$$

$$= \omega^{kl-kk'+k-1}\left(\frac{l}{\pm k}\right).$$

3) $k(u)$, $l(u)$, $k'-l'(u)$

$$(k+l)(k'-l'+1)+(k-1)(l-1) = kl+kk'-ll' \equiv 0 \mod 8$$

$$c_3 = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\,\omega^{(k-2)k'+l}\left(\frac{k}{\pm l}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\,\omega^{(k-2)k'+k(l-1)+1}\left(\frac{l}{\pm k}\right)$$

$$= \omega^{(k-2)(k'-2)+l-2}\left(\frac{k}{\pm l}\right)$$

$$= \omega^{kl+ll'-2k'-l}\left(\frac{k}{\pm l}\right) = \omega^{ll'-2k'+k-1}\left(\frac{l}{\pm k}\right).$$

Nach dem Früheren tritt hier bei $\left(\frac{l}{-k}\right)$ der Factor $\omega^4 = -1$ hinzu, wenn k und l gleichzeitig negativ sind.

23.

Die der linearen Transformation entsprechende Gleichung

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_1(u\,q) = c\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_1(u'\,q')$$

ist hiermit vollständig bestimmt. Um zu den für die coordinirten Thetafunctionen geltenden Formeln überzugehen, hat man u um $\frac{\pi}{2}$ und resp. $\frac{hi}{2}$ zu ändern und die bekannten Relationen

$$\Theta_\delta^\varepsilon u = \varepsilon^{\frac{\delta-1}{2}} \Theta_\delta^{-\varepsilon}\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} q^{\frac{1}{4}} e^{ui} \Theta_{-\delta}^\varepsilon\left(u + \frac{hi}{2}\right)$$

$$= \varepsilon^{\frac{\delta}{2}} q^{\frac{1}{4}} e^{ui} \Theta_{-\delta}^{-\varepsilon}\left(u + \frac{\pi + hi}{2}\right)$$

zur Reduction zu benutzen. Man erhält auf diesem Wege:

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}} \vartheta_2(u\,q) = e^{\frac{lu^2 i}{p}} \vartheta_1\left(u + \frac{\pi}{2}, q\right) = c\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{l\pi i}{2}\left(2u + \frac{\pi}{2}\right)} \vartheta_1\left(u' + l'\frac{\pi}{2} - l\frac{h'i}{2}, q'\right)$$

$$= c\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \omega^{-ll'} q'^{\frac{1}{4}ll'} e^{-lu'i} \vartheta_1\left(u' + l'\frac{\pi}{2} - l\frac{h'i}{2}, q'\right)$$

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}} \vartheta(u\,q) = e^{\frac{lu^2 i}{p}} \frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}} e^{ui} \vartheta_1\left(u + \frac{hi}{2}, q\right)$$

$$= c\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \omega^{-kk'-2} q'^{\frac{1}{4}kk} e^{ku'i} \vartheta_1\left(u' - k'\frac{\pi}{2} + k\frac{h'i}{2}, q'\right)$$

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}} \vartheta_3(u\,q) = e^{\frac{lu^2 i}{p}} q^{\frac{1}{4}} e^{ui} \vartheta_1\left(u + \frac{\pi + hi}{2}, q\right)$$

$$= c\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \omega^{-kk'-ll'+2lk'} q'^{\frac{1}{4}(k-l)^2} e^{(k-l)u'i} \vartheta_1\left(u' - \overline{k'-l'}\frac{\pi}{2} + \overline{k-l}\frac{h'i}{2}, q'\right)$$

In diesen Ausdrücken bleiben die Werthe zu substituiren:

$$\vartheta_1\left(u' + \overline{2m+1}\frac{\pi}{2} + 2n\frac{h'i}{2}, q'\right) = (-1)^m q'^{-nn} e^{-2nu'i} \vartheta_2(u'q')$$

$$\vartheta_1\left(u' + 2m\frac{\pi}{2} + \overline{2n+1}\frac{h'i}{2}, q'\right) = (-1)^m i^{2n+1} q'^{-(n+\frac{1}{2})^2} e^{-(2n+1)ui} \vartheta(u'q')$$

$$\vartheta_1\left(u' + \overline{2m+1}\frac{\pi}{2} + \overline{2n+1}\frac{h'i}{2}, q'\right) = (-1)^m q'^{-(n+\frac{1}{2})^2} e^{-(2n+1)u'i} \vartheta_3(u'q').$$

In Betracht kommen dabei die sechs möglichen Fälle:

1) kg, lu, $k'u$ a) $l'g$ b) $l'u$

2) ku, lg, $l'u$ a) $k'g$ b) $k'u$

3) ku, lu a) $k'g$, $l'u$ b) $k'u$, $l'g$.

Wir beschränken uns hier darauf, beispielshalber die Fälle 1 a) und 2 a) auszuführen, für welche die Transformationsgleichungen die einfache Gestalt annehmen:

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}} \vartheta_2(u\,q) = \omega^{-l(k-1)} \left(\frac{k}{l}\right) \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \vartheta(u'q')$$

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}} \vartheta(u\,q) = \omega^{-l(l'-1)} \left(\frac{k}{l}\right) \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \vartheta_2(u'q')$$

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}} \vartheta_3(u\,q) = \omega^{l} \left(\frac{k}{l}\right) \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \vartheta_3(u'q'),$$

sowie für 2 a):

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_2(u\,q) = \omega^{-kk'-k+1}\left(\frac{l}{k}\right)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_2(u'q')$$
$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta(u\,q) = \omega^{kl-k+1}\left(\frac{l}{k}\right)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta(u'q')$$
$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\,\vartheta_3(u\,q) = \omega^{-k+1}\left(\frac{l}{k}\right)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_3(u'q').$$

Wir beschliessen unser Thema mit der Bemerkung, dass die entwickelten Transformationsformeln als analytische Ausdrücke für den Werth des Symbols $\left(\frac{k}{l}\right)$ resp. $\left(\frac{l}{k}\right)$ angesehen werden können. Setzt man z. B. $u = 0$, so erhält man leicht

$$\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\vartheta_1' q = c\,\frac{\pi}{p}\,\vartheta_1' q'$$

und damit

$$c = \left(\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right)^3 \frac{\vartheta_1' q}{\vartheta_1' q'},$$

d. h. für k gerade:

$$\left(\frac{k}{l}\right) = \omega^{l(k+l'-3)}\left(\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right)^3 \frac{\vartheta_1' q}{\vartheta_1' q'},$$

für l gerade:

$$\left(\frac{l}{k}\right) = \omega^{k(k'-l-1)+1}\left(\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right)^3 \frac{\vartheta_1' q}{\vartheta_1' q'}$$

und wenn k und l ungerade:

$$\left(\frac{l}{k}\right) = \omega^{-l(k+l'-1)+2k'}\left(\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right)^3 \frac{\vartheta_1' q}{\vartheta_1' q'}$$

nebst

$$\left(\frac{k}{l}\right) = \omega^{-ll'+2k'-k+1}\left(\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right)^3 \frac{\vartheta_1' q}{\vartheta_1' q'};$$

ferner für k und l' gerade:

$$\left(\frac{k}{l}\right) = \omega^{l(k-1)}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta q'} = \omega^{l(l'-1)}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\frac{\vartheta q}{\vartheta_2 q'} = \omega^{-l}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\frac{\vartheta_3 q}{\vartheta_3 q'},$$

sowie für l und k' gerade:

$$\left(\frac{l}{k}\right) = \omega^{kk'+k-1}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta_2 q'} = \omega^{-kl+k-1}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\frac{\vartheta q}{\vartheta q'} = \omega^{k-1}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\frac{\vartheta_3 q}{\vartheta_3 q'}.$$

Die Multiplication der zusammengehörigen Gleichungen liefert die von ϑ_1' abhängigen Werthe von $\left(\frac{k}{l}\right)$ und $\left(\frac{l}{k}\right)$ in der vorhin gefundenen Gestalt. In den Gleichungen

$$\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta_3 q} = \omega^{-kk'}\frac{\vartheta_2 q'}{\vartheta_3 q'} \quad\text{und}\quad \frac{\vartheta q}{\vartheta_3 q} = \omega^{kl}\frac{\vartheta q'}{\vartheta_3 q'},\quad l(q) \text{ und } k'(q)$$

liegt die Ergänzung des in Art. 21 gelieferten Beweises für die Vieldeutigkeit von q als Function von $\varkappa$ betrachtet, entsprechend der Unveränderlichkeit von $\varkappa^2 = \left(\frac{\vartheta_2 q}{\vartheta_3 q}\right)^4$ und $\varkappa'^2 = \left(\frac{\vartheta q}{\vartheta_3 q}\right)^4$ beim Uebergange von q zu q'. Für $k(g)$ und $l'(g)$ geht $\varkappa^2$ in $\varkappa'^2$ über.

Die übrigen Fälle liefern selbstverständlich analoge Resultate.

DAMPFDRUCKE TERNÄRER GEMISCHE

VON

W. OSTWALD.

Des XXV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VII.

MIT 36 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1900.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 14. November 1899.
Das Manuscript eingereicht am 26. November 1899.
Den letzten Bogen druckfertig erklärt am 5. Januar 1900.

DAMPFDRUCKE TERNÄRER GEMISCHE

VON

W. OSTWALD.

Einleitung.

1. Durch die ausgezeichnete Arbeit von KONOWALOW[1]) und die sich an diese schliessenden theoretischen wie experimentellen Untersuchungen haben wir eine weitgehende Kenntniss von den allgemeinen Verhältnissen erlangt, unter denen die Verdampfung binärer Gemische, homogener wie heterogener, stattfindet. Wie sich diese Verhältnisse aber in dem Falle gestalten, dass die Zahl der Bestandtheile auf drei sich erhöht, darüber sind mir zur Zeit keine Untersuchungen bekannt.

Nun ist es möglich, auf Grund einiger einfacher Prinzipien, die mit den für binäre Gemische maassgebenden entweder übereinstimmen, oder sich als sachgemässe Erweiterungen jener bezeichnen lassen, die Erscheinungen bei ternären Gemischen in einem ziemlich weiten Umfange theoretisch abzuleiten. Eine solche Ableitung soll den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bilden.

2. Vorher wird es aber vielleicht angemessen sein, einige Worte über die Methode vorauszuschicken, welche in diesem Falle zur Anwendung gebracht wird. Sie bildet ein brauchbares Beispiel für das allgemeine Verfahren, dem zuzustreben nach meiner Meinung für jede rationelle Wissenschaft nothwendig ist, und das in einigen Fällen bereits zu sehr bemerkenswerthen Resultaten geführt hat. Im Prinzip liegt diese Methode allerdings aller wissenschaftlichen Begriffsbildung zu Grunde; das Maass von Bewusstheit, mit dem sie angewendet wird, ist aber von Fall zu Fall so verschieden, dass einige allgemeine Betrachtungen nicht überflüssig erscheinen werden.

Betrachten wir beispielsweise die Entwicklung der krystallographischen Theorieen, so sehen wir zuerst die atomistischen Vorstellungen HAÜY's, der die Krystalle aus kleinsten Bausteinen der Primitivform sich aufgebaut dachte, zu einem bestimmten

1) Wied. Ann. 14. 34. 1881.

Gesetze führen, welches die Lage der secundären Flächen zu der der primären bestimmt. Die atomistische Haüy'sche Theorie wurde durch die dynamische von Weiss abgelöst, welcher den Krystall als das Ergebniss einer dynamischen, nach bestimmten Axen gerichteten Thätigkeit auffasste. Diese Axen erwiesen sich als ein so erfolgreiches Hilfsmittel zur Veranschaulichung der allgemeinen Verhältnisse, dass sie bestehen blieben, als schon längst die allgemeine Ausbreitung des Atomismus die dynamische Naturphilosophie zu der sich Weiss bekannt hatte, mit Stumpf und Stiel vernichtet zu haben schien.

Die Wiederaufnahme der Haüy'schen atomistischen Ansichten gemäss den inzwischen erweiterten Kenntnissen in der Krystallographie geschah durch Frankenheim, Bravais und insbesondere Sohncke. Doch gelang es nicht mehr, auf diesem Wege einfache Ergebnisse zu gewinnen. Sohncke entwickelte in consequenter Fortbildung der atomistischen Krystallstrukturtheorie schliesslich 63 verschiedene Arten der gesetzmässigen Anordnung von Punkten im Raume, die gleichzeitig den krystallographischen Grundgesetzen genügten; es ergab sich aber, dass selbst dies reichhaltige Schema nicht genügte, um die krystallographisch möglichen Fälle vollständig darzustellen.

Inzwischen hatte sich eine von Hessel begründete und von diesem lange übersehenen Forscher auch vollständig durchgeführte Betrachtungsweise Bahn gebrochen, welche das krystallographische Problem mit einer Vollständigkeit löste, welche zur Zeit für weitere Wünsche und Bedürfnisse kaum Raum lässt. Das Prinzip dieser Betrachtungsweise, die auf alle möglichen Vorstellungen über die Zusammensetzung oder Entstehung der Krystalle vollständig verzichtet, ist folgendes. Man untersucht an der Hand des allgemeinsten Grundbegriffes der Krystallographie, des Symmetriebegriffes, welche Mannigfaltigkeiten innerhalb des krystallographischen Grundgesetzes überhaupt möglich sind, und gewinnt in der systematischen Aufstellung dieser Mannigfaltigkeiten die Theorie der Krystalle.

3. Es wurde eben erwähnt, dass dieses Verfahren, das Erscheinungsgebiet als eine Mannigfaltigkeit im Rahmen der allgemeinen Gesetze des Gebietes anzusehen, und die möglichen Fälle dieser Mannigfaltigkeit systematisch zu erschöpfen, in dem angeführten Beispiele durchaus zum Ziele geführt hat. Es soll

demgemäss als das allgemeine Verfahren der rationellen Wissenschaften bezeichnet werden, jedes Erscheinungsgebiet als ein Mannigfaltigkeitsproblem aufzufassen, und in der erschöpfenden Aufstellung der möglichen Fälle die Theorie dieses Gebietes zu suchen.

Der Experimentalforschung fällt hierbei die wichtige Aufgabe zu, durch das Studium einzelner Fälle zuerst die zusammengehörigen Erscheinungen zu ermitteln und so das Gebiet abzugrenzen, und ferner auf dem gleichen Wege der Einzeluntersuchung die Art der vorhandenen Mannigfaltigkeit und ihre maassgebenden Bedingungen zu ermitteln. Eine auf solcher Grundlage zunächst entwickelte Mannigfaltigkeitstheorie braucht entsprechend der Begrenztheit jener Grundlagen weder richtig, noch erschöpfend zu sein. Die Aufstellung einer solchen vorläufigen Theorie gewährt aber alsbald ein Mittel, jene Grundlagen selbst der Prüfung zu unterwerfen, und sie somit zu bestätigen oder zu verbessern.

4. Von diesem Verfahren unterscheidet sich das noch vorwiegend übliche der physikalischen, insbesondere mechanischen Hypothese und das bereits kritischere der mechanischen Analogie durch einen wesentlichen Umstand. Im Grunde liegt allerdings der Zweck und Nutzen der letzterwähnten Forschungsmittel auf gleichem Boden, wie bei der Anwendung der Mannigfaltigkeitslehre, aber mit einem grossen Unterschiede. Während bei dieser nur genau bezeichnete Elemente in die Betrachtung aufgenommen werden, welche aus der Beschaffenheit der vorliegenden Erscheinungen geschöpft sind, werden durch jede Hypothese, d. h. Uebertragung eines bekannten Erscheinungsgebietes auf das zu erforschende neben den angemessenen Elementen (die eben zur Aufstellung der Hypothese Anlass gegeben haben) noch andere Elemente, die dem hypothetischen Bilde anhaften, eingeführt, über deren Angemessenheit nichts bekannt ist. Finden sich weitere angemessene Elemente, so pflegt man von einer Bestätigung der Hypothese zu reden; die nicht angemessenen Elemente, die man früher oder später unweigerlich einmal antrifft, werden entweder mit Stillschweigen übergangen, oder durch weitere Specialhypothesen unschädlich gemacht. Geht letzteres nicht mehr ohne allzu grossen Aufwand, so wird die Hypothese aufgegeben, und es wird ein anderes Bild gesucht, dessen Elemente eine bessere Uebereinstimmung mit dem Erscheinungsgebiete aufweisen.

Diesem zwar entwicklungsgeschichtlich erklärlichen, aber doch als irrationell zu bezeichnenden Verfahren gegenüber muss das oben gekennzeichnete Verfahren, für jedes Erscheinungsgebiet die Elemente der Mannigfaltigkeit aufzusuchen, die darin vorhanden sind, und dann die Mannigfaltigkeit selbst zu entwickeln als das rationellere bezeichnet werden. Den Vorwurf des Mangels an „Anschaulichkeit“ wird es sich nur so lange gefallen zu lassen brauchen, als unsere wissenschaftliche Erziehung uns die Handhabung der erforderlichen Begriffe und Methoden noch nicht geläufig gemacht hat. Ist dies erreicht, dann ist das Verfahren um nichts weniger anschaulich, als z. B. die Entwicklung der geometrischen Mannigfaltigkeiten in den entsprechenden Theilen der reinen Mathematik.

Erster Theil.

Die homogenen Gemische.

5. Gehen wir nach diesen allgemeinen Darlegungen dazu über, den aufgestellten Gesichtspunkten gemäss das Problem der Dampfdrucke ternärer Gemische zu behandeln, so tritt uns zunächst die Frage entgegen, wie sich die Ergebnisse graphisch veranschaulichen lassen. Die Aufgabe ist bereits von Willard Gibbs in seiner grundlegenden Arbeit behandelt und befriedigend gelöst worden. Das Verfahren besteht in folgendem.

Man drückt die Zusammensetzung des Gemisches durch die drei Brüche aus, welche sich ergeben, wenn man die Mengen der drei Bestandtheile durch die Gesammtmenge dividirt. Die Summe dieser drei Brüche ist dann immer gleich Eins. Die Mengen können sowohl in Gewichtseinheiten wie in Molen gemessen sein; der Einfachheit wegen setzen wir bei den folgenden Betrachtungen das erste voraus. Doch werden die Ergebnisse an keinem Punkte geändert, wenn man die Zusammensetzung in rationellerer Weise nach Molen zählt.

Die drei Brüche werden in ein Coordinatensystem eingetragen, welches auf ein gleichseitiges Dreieck bezogen ist. Die Abmessungen des Dreiecks sind dadurch bestimmt, dass die Normale von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite gleich der Einheit ist.

Da ein jeder Punkt eines solchen Dreiecks die Eigenschaft hat, dass die von ihm auf die drei Seiten gefällten Normalen die

Summe Eins ergeben, so folgt, dass jeder mögliche Werth der Brüche, welche die Zusammensetzung eines ternären Gemisches ausdrücken, durch einen bestimmten Punkt des Dreiecks dargestellt wird, und dass die Fläche des Dreiecks die Gesammtheit aller möglichen Zusammensetzungen des Gemisches darstellt.

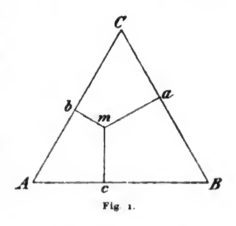


Fig. 1.

Die Abmessung erfolgt in der Weise, dass man die Länge der Normalen von der Gegenseite zu zählen beginnt. Werden die drei Bestandtheile des Gemenges mit *A*, *B* und *C* bezeichnet, und ist *m* der darstellende Punkt im Inneren des Dreiecks, Fig. 1 so sind die Strecken *am*, *bm* und *cm* gleich den Antheilen von *A*, *B* und *C* im Gemenge.

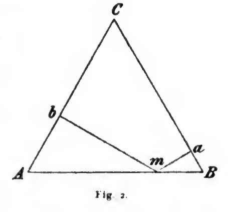


Fig. 2.

Daraus folgt, dass die reinen Stoffe *A*, *B* und *C* durch die Eckpunkte des Dreiecks dargestellt sind, denn in diesen sind die Normalenlängen von der Gegenseite aus je gleich Eins. Die binären Gemenge finden sich auf den Dreiecksseiten. Das Zusammensetzungsverhältniss kann sowohl durch die beiden Normalen, z. B. *am*, *bm*, Fig. 2, gemessen werden, wie auch durch die beiden Theile der Seite *mB* und *mA*, da beide Verhältnisse einander gleich sind. Der Consequenz wegen soll die Messung durch die Normalen beibehalten werden.

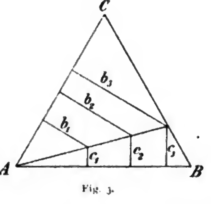


Fig. 3.

Was die geometrischen Eigenschaften dieser Darstellungsweise anlangt, so ist zu bemerken, dass Punkte, die auf einer durch einen Eckpunkt gehenden Geraden liegen, Gemische angeben, welche die beiden anderen Bestandtheile in constantem Verhältniss enthalten. Dies ergiebt sich unmittelbar daraus, dass die von einem beliebigen Punkte einer solchen Geraden auf die beiden anliegenden Seiten gefällten Normalen in constantem Verhältniss stehen. Fig. 3 lässt diese Beziehung alsbald erkennen.

Punkte, die auf einer beliebigen Geraden liegen, ergeben das Verhältniss zweier Bestandtheile nicht constant, wohl aber ist das Verhältniss zwischen einem Bestandtheil und einem anderen nach Abzug eines unveränderlichen Werthes constant. Aus Fig. 4 ergiebt sich $b_1 c_1 - \gamma = b_2 c_2 - \gamma = \text{const}$, wo γ die Normale vom Durchschnittspunkte auf die Seite AB ist.

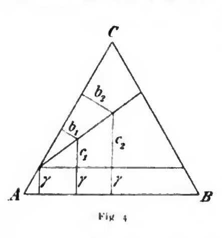


Fig. 4

Ferner haben alle Punkte, die auf irgend einer Geraden liegen, die wichtige Eigenschaft, dass man jedes einem solchen Punkte entsprechende Gemisch aus Gemischen zusammensetzen kann, die irgend welchen anderen Punkten derselben Geraden entsprechen. Liegt das herzustellende Gemisch zwischen den anderen, so kann es durch Zusammensetzung hergestellt werden; liegt es dagegen ausserhalb, so kann es nur durch Entfernung des am anderen Ende liegenden Gemisches aus dem mittleren erhalten werden. Die gegenseitigen Abstände der drei Punkte geben die Verhältnisse an, in denen die endständigen Gemische zusammengebracht werden müssen, um das mittlere zu ergeben.

6. Um nun die Dampfdruckverhältnisse der ternären Gemische darzustellen, trägt man die Werthe der Dampfdrucke senkrecht zu der Fläche des darstellenden Dreiecks auf. Die Gesammtheit der für eine Temperatur geltenden Dampfdrucke giebt dann eine Isothermenfläche, deren Gestalt zu Schlüssen über das Verhalten bei der isothermen Destillation berechtigt.

Trägt man statt der Drucke bei einer gegebenen Temperatur die Temperaturen für einen gegebenen Druck auf, bei denen Dampf neben der Flüssigkeit bestehen kann, so erhält man eine Isobarenfläche, deren Gestalt das Verhalten bei der isobarischen Destillation ableiten lässt. Beide Flächen sind einigermaassen reciprok und haben eine grosse Zahl charakteristischer Eigenthümlichkeiten gemeinsam. Ich will mich nachstehend ausschliesslich mit der Isothermenfläche als der in gewissem Sinne einfacheren beschäftigen. Die Uebertragung auf den anderen Fall lässt sich ohne jede Schwierigkeit bewerkstelligen und braucht deshalb nicht eingehend dargelegt zu werden.

7. Fragen wir nach den Elementen der Mannigfaltigkeit, um

die es sich hier handelt, so finden wir sie in den Typen der Dampfdrucklinien binärer Gemenge, wie sie von Konowalow aufgestellt worden sind. Drücken wir die Zusammensetzung eines binären Gemisches durch die Theile einer Geraden von der Länge Eins aus und tragen die Dampfdrucke für eine bestimmte Temperatur als senkrechte Gerade darauf, so sind die drei Fälle I, II und III Fig. 5 bisher beobachtet worden. Zwar lässt sich prinzipiell die Möglichkeit einer Anzahl verwickelterer Formen absehen[1], doch sind solche bisher noch nicht mit Sicherheit beobachtet worden, so dass wir uns auf die angegebenen beschränken können.

Fig. 5

Diese drei Typen unterscheiden sich dadurch, dass in I zwischen dem Dampfdrucke *Aa* des reinen Stoffes *A* und dem Dampfdrucke *Bb* des reinen Stoffes *B* die Dampfdrucke aller Gemische belegen sind, so dass dazwischen weder ein Maximum noch ein Minimum des Druckes erscheint. Bei II ist dagegen ein Maximum, bei III ein Minimum vorhanden, d. h. es giebt ein Gemisch, dessen Dampfdruck grösser, bez. kleiner ist, als der aller anderen möglichen Gemische mit Einschluss der reinen Stoffe.

Nun ist von Konowalow und allgemeiner von Gibbs gezeigt worden, dass in solchen ausgezeichneten Punkten auch ein ausgezeichneter Fall in Bezug auf die Zusammensetzung des Dampfes eintritt: in jedem Maximum oder Minimum des Dampfdruckes muss der Dampf die gleiche Zusammensetzung haben, wie die Flüssigkeit, aus der er sich entwickelt.

Die Nothwendigkeit einer solchen Beziehung lässt sich einsehen, wenn man folgende Betrachtung anstellt, welche wir für den Fall ternärer Gemische gleichfalls verwenden wollen. Destillirt man ein beliebiges Gemisch, so muss sein Dampf immer eine solche Zusammensetzung haben, dass der Dampfdruck des Rückstandes abnimmt. Denn wäre das Umgekehrte der Fall, so könnte die Flüssigkeit mit ihrem Dampfe nicht im stabilen Gleichgewicht sein, sondern müsste explosiv verdampfen.

Die Zusammensetzung des Dampfes ist somit von der der

---

1) Ostwald, Lehrb. der Allg. Chemie, Bd. II, Abth. 2, S. 618. Lpz. 1899.

Flüssigkeit immer im Sinne des aufsteigenden Theils der Dampfdrucklinie verschieden, und der Rückstand ändert sich so, dass seine Zusammensetzung durch einen Punkt an der Seite dargestellt wird, nach welcher die Dampfdrucklinie sich senkt.

8. Wendet man diese Regel auf die Stelle eines Maximums oder Minimums des Dampfdruckes an, so sieht man, dass die Zusammensetzung des Dampfes und des Rückstandes weder im einen noch im anderen Sinne von einander abweichen können, dass sie also identisch sein müssen.

Hieraus ergiebt sich dann in bekannter Weise allgemein, dass bei unbegrenzt oft wiederholter fraktionirter Destillation bei einem Gemische mit der Dampfdrucklinie I eine Trennung in die beiden reinen Stoffe A und B bewirkt wird. Bei Gemischen vom Typus II und III wird dagegen immer das ausgezeichnete Gemisch erhalten, das durch Destillation nicht in seine Bestandtheile zu trennen ist, und ausserdem der reine Antheil, welcher in Bezug auf dies Gemisch überschüssig vorhanden war.

9. Man kann diese Ergebnisse auch auf eine andere Weise ausdrücken. Bei einer Dampfdrucklinie vom Typus I gelangt man von jedem beliebigen Punkte bei der Trennung durch Destillation über die ganze Linie, indem der Rückstand den abfallenden Theil, und das Destillat den aufsteigenden Theil durchwandert. Bei Gemischen, die den beiden anderen Typen angehören, gelangt man von einem gegebenen Punkte aber nicht durch die ganze Linie, sondern nur durch eine Hälfte. Geht man von einem Punkte rechts von m oder n aus, so wird insgesammt nur der Theil mB, bez. nB durchmessen, von einem Punkte links von m oder n kann man nur über das Gebiet Am oder An kommen. Nie aber gelangt man durch Destillation über den Punkt m oder n hinweg. Diese Punkte sind also unüberschreitbare Punkte.

Endlich ist zu betonen, dass als Produkte der Trennung nur die constant siedenden Flüssigkeiten auftreten, seien es die reinen Stoffe oder die constant siedenden Gemische m und n. Jedes binäre Gemisch zerfällt schliesslich in zwei und nicht mehr solche constant siedende Flüssigkeiten.

Dies sind alles wohlbekannte Thatsachen, nur in einer etwas abweichenden Form ausgesprochen. Sie wurden so formulirt, um eine ungezwungene Uebertragung auf den verwickelteren Fall dreier Bestandtheile zu ermöglichen.

10. Wenden wir uns nun den ternären Gemischen zu, so sind in einem solchen, dessen Bestandtheile *A*, *B* und *C* seien, drei binäre Zusammenstellungen möglich, *AB*, *AC* und *BC*. Jedes dieser Paare kann eine Dampfdrucklinie vom Typus I, II oder III haben. Combinirt man diese Möglichkeiten erschöpfend, so ergeben sich folgende Fälle:

I I I; I I II; I I III; I II II; I II III; I III III; II II II; II II III; II III III; III III III.

Dies sind im ganzen zehn Fälle, die sich noch in Unterfälle theilen lassen, die aber für unser Problem nichts besonderes ergeben.

Für die weitere Discussion nehmen wir nun an, dass ebenso wie im Falle der binären Gemische mehrere Maxima oder Minima ausgeschlossen sein sollen und dass Durchschnitte durch die ternäre Dampfdruckfläche im allgemeinen ähnliche Gestalt haben sollen, wie die benachbarten binären Dampfdrucklinien. Der Erfahrung bleibt vorbehalten, Fälle zu ermitteln, die diesen Voraussetzungen nicht entsprechen. Ist dies geschehen, so wird es nicht schwierig sein, auch diese Mannigfaltigkeit in die Betrachtungen aufzunehmen.

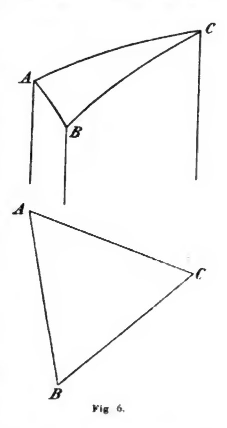


Fig. 6.

11. Der Fall I I I. Sind die drei Grenzlinien *AB*, *BC*, *CA* der ternären Dampfdruckfläche *ABC*, Fig. 6 sämmtlich vom Typus I, so wird auch die Fläche selbst nirgend ein Maximum oder Minimum erwarten lassen. Für irgend ein ternäres Gemisch, entsprechend einem beliebigen Punkte auf der Fläche *ABC* wird dieselbe Regel gelten, die oben für binäre Gemische ausgesprochen wurde: das Destillat ändert seine Zusammensetzung im aufsteigenden, der Rückstand im absteigenden Sinne. Dadurch muss bei fortgesetztem Fraktioniren schliesslich eine Trennung in die drei Bestandtheile *A*, *B* und *C* erreicht werden. Die Ergebnisse der fraktionirten Destillation werden mit anderen Worten durch die Eckpunkte des Drei-

ecks ABC gekennzeichnet. Man erkennt die vollständige Analogie dieses Falles mit dem binären Falle vom Typus I.

12. Der Fall I I II. In Fig. 7 ist eine Dampfdruckfläche dargestellt, wie sie sich bei dem Vorhandensein der Grenzlinien I, I und II ausbilden. Sie giebt zu folgenden Schlüssen Anlass.

Hat man ein Gemisch, das in dem Gebiete ARB liegt, so wird es sich ebenso verhalten, als wären AB, AR und RB die Grenzlinien eines ternären Gemisches vom ersten Typus. Die Linie AR kann durch die Destillation nicht überschritten werden, da sie die Folge der relativ höchsten Dampfdrucke darstellt. Der Rückstand muss sich dem allgemeinen Prinzip zufolge so ändern, dass seine Zusammensetzung sich der Linie AB nähert, der Dampf so, dass er der Linie AR näher kommt. Hat aber der Dampf diese Linie erreicht, so kann er sich nicht weiter in gleichem Sinne ändern, denn dann müsste sein Druck wieder kleiner werden, was dem allgemeinen Prinzipe widerspricht.

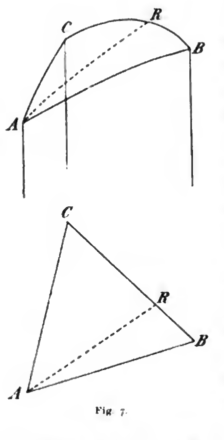


Fig. 7.

Das Ergebniss der Destillation eines dem Gebiete ABR angehörenden Gemisches ist also, dass es in die drei Antheile A, B und R getrennt wird.

Ganz dasselbe gilt für ein Gemisch aus dem Gebiete ACR; es zerfällt in A, C und R. Es gilt also auch hier der Satz, dass jedes Gemisch in die drei Flüssigkeiten zerfällt, welche die Eckpunkte seines Gebietes bilden. Nur hat das Auftreten eines Maximums in einer der drei Grenzlinien zur Folge, dass ausser den drei reinen Bestandtheilen noch eine vierte untrennbare Flüssigkeit vorhanden ist. Demgemäss zerfällt das ganze Gebiet nunmehr in die beiden Dreiecke, welche durch den unüberschreitbaren Punkt R gemeinsam mit den mit gleicher Eigenschaft naturgemäss behafteten Punkten A, B und C bestimmt werden.

Es erhebt sich die Frage, wie sich ein Gemisch verhalten wird, welches auf der unüberschreitbaren Linie AR liegt.

Die Linie AR ist eine unüberschreitbare Linie für das ternäre Gemisch ABC in demselben Sinne, in welchem r ein unüberschreitbarer Punkt für das binäre Gemisch BC ist.

Da es die Linie AR weder nach rechts noch nach links überschreiten kann, muss es auf ihr bleiben. Es ist dies nicht so aufzufassen, dass das Destillat die gleiche Zusammensetzung haben wird, wie der Rückstand. Dies ist deshalb nicht möglich, weil die Linie ja von A nach R aufsteigt; das Destillat ist also

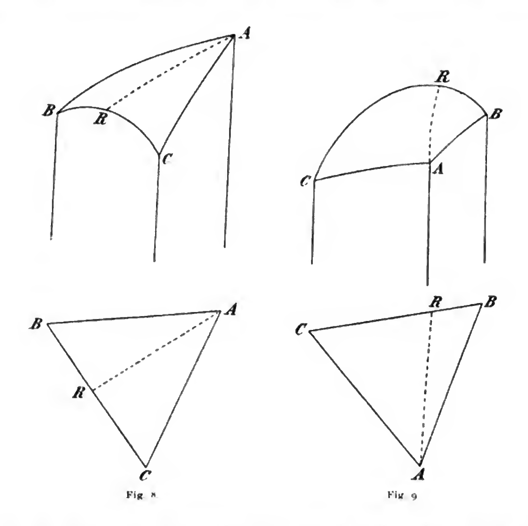


Fig. 8 Fig. 9

nach R verschoben, der Rückstand nach A. Wohl aber muss das Endergebniss der Fraktionirung sein, dass jedes auf AR liegende Gemisch schliesslich in A und R gespalten wird. Ein solches Gemisch verhält sich also, obwohl es aus den drei Bestandtheilen besteht, als wäre es binär.

Daraus lässt sich der weitere Schluss ziehen, dass die Projektion der Linie Ar auf die Grundfläche eine Gerade sein muss, oder dass Ar entsteht, indem man eine Ebene durch Aa und r legt, welche die Dampfdruckfläche in Ar schneidet. Denn

da sich jedes Gemisch, das durch einen Punkt der Linie dargestellt wird, in *A* und *R* scheiden lässt, so muss es die Bestandtheile *B* und *C*, aus denen *R* besteht, in demselben Verhältniss enthalten, wie *B* und *C* in *R* enthalten sind. Diese Eigenschaft haben aber nur die Punkte, welche auf der Verbindungsgeraden *AR* liegen.

Es ist in der Zeichnung angenommen, dass die Linie *CB* vom Typus II die beiden höchsten Punkte der beiden anderen Linien verbindet. Untersucht man die beiden anderen Fälle,

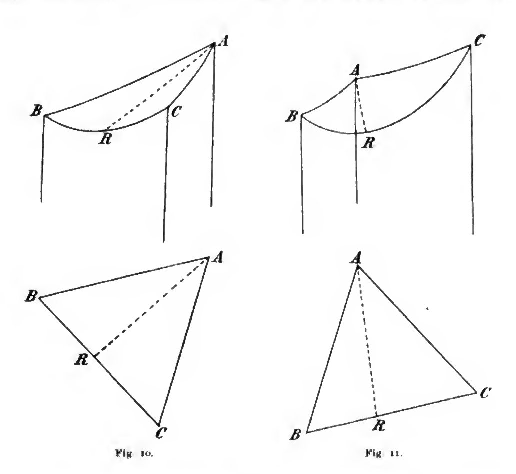


Fig. 10. Fig. 11.

welche entstehen, wenn der der Linie II gegenüberliegende Punkt *A* höher liegt, als die Punkte *B* und *C* (Fig. 8), und wenn er zwischen beiden liegt (Fig. 9), so ergiebt sich, dass sie nichts neues liefern. Das Gesammtfeld wird immer durch eine unüberschreitbare Linie *AR* in zwei Dreiecke zerlegt, und irgend ein Gemisch ergiebt bei der Fraktionirung die drei in den Ecken seines Dreiecks liegenden untrennbaren Flüssigkeiten. Von diesen sind immer zwei reine Stoffe und das dritte ist das constant siedende Gemisch. Von den vier derartigen Flüssigkeiten werden also im allgemeinen je drei aus einem gegebenen Gemisch erhalten.

Befindet sich das Gemisch auf der unüberschreitbaren Linie *AR*, so werden nur zwei Fraktionen gewonnen. Ist die Zusammensetzung der Flüssigkeit durch einen der Punkte *A*, *B*, *C*, *R* dargestellt, so siedet der Stoff einheitlich.

13. Der Fall I I III. Wenn neben den zwei einfachen Linien vom Typus I eine Linie III mit einem Minimum vorhanden ist, so ergeben sich ganz dieselben Betrachtungen, wie im vorigen Falle, wie denn überhaupt die Fälle mit II und die mit III einander ganz parallel gehen. Die Darstellung dieser Fälle in

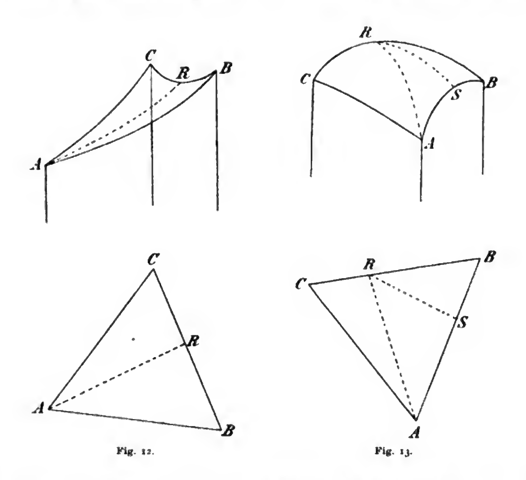


Fig. 12. Fig. 13.

den Figg. 10 bis 12 braucht nur betrachtet zu werden, um die Richtigkeit dieser Behauptung alsbald hervortreten zu lassen.

14. Der Fall I II II. Aus der Betrachtung der Dampfdruckfläche *ABC*, Fig. 13, ergiebt sich zunächst, dass zwischen den beiden binären Maximalwerthen *R* und *S* eine unüberschreitbare Linie verlaufen muss. Ueber das Verhalten eines Gemisches aus dem Gebiete *BRS* ist daher nichts neues zu sagen, es wird in die Bestandtheile *B*, *R* und *S* getrennt werden. Gegen die früheren Fälle macht sich nur der Unterschied geltend, dass hier zwei von den Fraktionen binäre Gemische sind, und nur eine

ein reiner Stoff. Dies ist die Folge davon, dass hier fünf constant siedende Flüssigkeiten vorhanden sind: die drei reinen Stoffe und die beiden binären Maximalgemische.

Eine neue Ueberlegung fordert das Viereck *CRSA*. Man könnte geneigt sein, anzunehmen, dass ein Gemisch aus diesem Gebiete sich in vier Fraktionen wird spalten lassen. Doch zeigt eine eindringendere Ueberlegung, dass zwischen *R* und *A*, d. h. zwischen dem höchsten Punkte des Feldes und der gegenüberliegenden Ecke noch eine unüberschreitbare Linie verläuft. Denn nach der Voraussetzung ist *R* höher als *C* und *S*; daher kann ein in der Nähe von *C* liegendes Gemisch nicht in das Feld *ARS* gelangen, und ein Gemisch aus diesem Felde ebensowenig nach *ACR*.

Die Voraussetzung, dass *R* höher als *S* ist, erscheint nicht als eine nothwendige. Nimmt man umgekehrt an, dass *S* höher liegt als *R*, so wird aus denselben Gründen eine unüberschreitbare Linie von *S* nach *C* verlaufen. Es geht in allen Fällen die unüberschreitbare Linie von dem höchsten Punkte des Vierecks nach dem gegenüberliegenden.

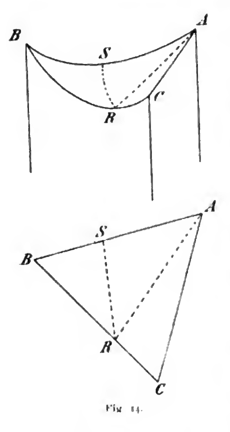


Fig. 14.

Alle diese unüberschreitbaren Linien sind Gerade. Der Beweis beruht auf ganz ähnlichen Ueberlegungen, wie die S. 424 gegebenen.

Im Falle I II II und, wie gleich hinzugefügt werden soll, in dem ganz entsprechenden Falle I III III Fig. 14 wird also das ganze Gebiet in je drei Dreiecke zerlegt, die durch zwei unüberschreitbare Linien von einander geschieden sind. Jedes dieser Dreiecke ergiebt drei Fraktionen, von denen in zwei Fällen zweie binäre Gemische sind, während die dritte durch einen reinen Bestandtheil gebildet wird; im dritten Falle ist es umgekehrt.

Auf den beiden unüberschreitbaren Linien verhalten sich die ternären Gemische wieder wie binäre. Die Fraktionen sind in einem Falle zwei binäre Gemische, im anderen ein binäres Gemisch

und ein reiner Bestandtheil. Ausserdem sind fünf Punkte da, welche constant siedende Flüssigkeiten kennzeichnen.

15. Die Fälle II II II und III III III. Wenn die drei Grenzlinien der binären Gemische sämmtlich ein Maximum aufweisen, so tritt eine neue Eigenthümlichkeit auf. Diese besteht darin, dass der höchste Punkt der ternären Dampfdruckfläche nicht mehr in einem der Eckpunkte oder auf einer der Grenzlinien liegt. Er rückt vielmehr in das Innere der Fläche hinein, und hierdurch entstehen neue Mannigfaltigkeiten.[1])

Bezeichnen wir den höchsten Punkt mit X, so ist auf ihn zunächst dieselbe Ueberlegung anzuwenden, welche über die Beziehung zwischen der Zusammensetzung der Flüssigkeit und des Dampfes bei einem binären Maximalpunkte entwickelt wurde. Da nicht angegeben werden kann, in welchem Sinne der Dampf von der Flüssigkeit verschieden zusammengesetzt sein könnte (S. 420), so muss geschlossen werden, dass er gleich zusammengesetzt ist. Daraus folgt weiter, dass eine Flüssigkeit von der Zusammensetzung X unverändert destilliren muss. Ein solches ternäres Gemisch verhält sich so, wie ein binäres Gemisch mit maximalem Dampfdruck, oder wie ein reiner Stoff.

Es sind demnach insgesammt sieben constant siedende Flüssigkeiten vorhanden: die drei reinen Bestandtheile A, B, C, die drei binären Maximalgemische R, S, T und das ternäre Maximalgemisch X.

Unüberschreitbare Linien verlaufen nun zunächst, Fig. 15, zwischen A, B, C und X; ferner zwischen R, S, T und X. Es sind also im ganzen sechs unüberschreitbare Linien vorhanden, die aus bekannten Gründen alle Gerade sind. Sie treffen alle im

---

1) Es darf einstweilen nicht als eine Unmöglichkeit angesehen werden, dass nicht auch in einem der früher erörterten Fälle ein Minimal- oder Maximalpunkt im Inneren der Fläche auftreten könnte. Dies würde nur der Annahme widersprechen, welche eingangs gemacht worden ist, dass in der Nähe der Grenzlinien die Durchschnitte durch die Dampfdruckfläche denselben Typus behalten, wie die Grenzlinien ihn haben. Diese Annahme ist zwar die einfachste und wird voraussichtlich auch in der Mehrzahl der Fälle zutreffen, es ist aber kein Grund anzugeben, warum nicht auch Abweichungen hiervon möglich wären.

Eine Vermehrung der Manigfaltigkeiten würde indessen durch einen solchen Fall nicht hervorgerufen werden. Er würde einfach einem der gegenwärtig erörterten zuzurechnen sein, die durch das Auftreten eines Maximalpunktes im Inneren der Dampfdruckfläche gekennzeichnet sind.

Punkte X zusammen, und theilen das Feld in sechs Dreiecke, in deren Ecken je ein reiner Stoff, ein binäres Gemisch und das ternäre Gemisch X liegt. Ein beliebiges Gemisch zerfällt daher beim Destilliren in drei Fraktionen: einen reinen Bestandtheil, ein binäres Gemisch und das ternäre Gemisch. Letzteres wird also in jedem Falle in gleicher Zusammensetzung erhalten.

Ein Gemisch, das auf einer unüberschreitbaren Linie liegt, zerfällt in das constante ternäre Gemisch und entweder einen

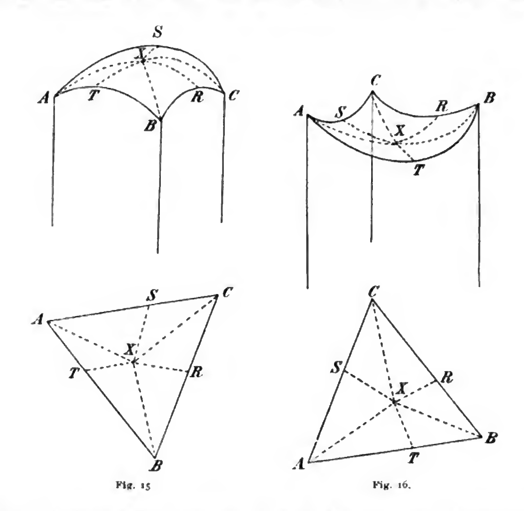


Fig. 15 Fig. 16.

reinen Bestandtheil, oder ein binäres Gemisch von constantem Siedepunkte.

Es ist noch besonders hervorzuheben, dass die beiden Geraden AX und XR und die entsprechenden anderen Paare von einander ganz unabhängig sind, und nicht etwa sich gegenseitig verlängern. Es mag ein solches Verhalten vielleicht aus besonderen Gründen eintreten, aus den hier benutzten allgemeinen Grundlagen ergiebt es sich, soweit ich urtheilen kann, nicht.

Völlig analog den hier betrachteten Beziehungen sind die Ergebnisse, die man bei dem Zusammentreten dreier Grenzlinien

mit je einem Minimum findet. Sie brauchen daher nicht besonders entwickelt zu werden, da sie aus Fig. 16 unmittelbar ersichtlich sind.

16. Die Fälle II II III und II III III. Wenn Grenzlinien des Typus II und III gleichzeitig in einem ternären Gemisch auftreten, so erscheint an der Dampfdruckfläche eine neue Gestaltung, eine Sattelfläche. Es ist dies eine Fläche, deren Durchschnitte mit den verschiedenen Vertikalebenen einerseits Minima, andererseits Maxima aufweisen. In einer solchen Fläche giebt es einen Punkt, der der höchste aller Minimalpunkte und der niedrigste aller Maximalpunkte gleichzeitig ist; diesen ausgezeichneten Punkt nennen wir den Sattelpunkt X.

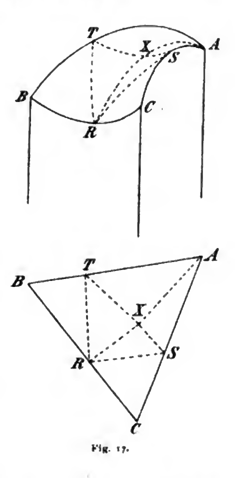


Fig. 17.

Betrachten wir eine der beiden Flächen mit einem Sattelpunkte, z. B. die Fläche II II III, Fig. 17, und wenden das allgemeine Prinzip für die Veränderung der Gemische durch Destillation auf diesen Fall an, so ergiebt sich folgendes. Die Gesammtfläche muss zunächst zwischen den beiden Maximalpunkten S und T eine unüberschreitbare Linie haben. Ferner wird eine solche zwischen dem Minimalpunkte R und der gegenüberliegenden Ecke C bestehen müssen. Diese Linien müssen daher in einem Punkte zusammentreffen, und dieser kann kein anderer, als der Sattelpunkt X sein. Hierbei ist zu bemerken, dass die beiden durch den Punkt X getrennten Theile jeder dieser Linien nicht nothwendig in derselben Geraden liegen müssen. Jede von ihnen muss im Grundriss eine Gerade zwischen X und dem entsprechenden Endpunkte sein; es ist aber nicht nöthig, dass diese Theile mit einander eine ungebrochene Gerade bilden.

Der Grundriss wird dadurch in zwei Dreiecke und zwei Vierecke getheilt. Die beiden ersten geben zu keinen weiteren Erörterungen Anlass; sie führen zu dem Schlusse, dass ein innerhalb ihrer Flächen belegenes Gemisch durch Destillation in je

drei Fraktionen zerlegt wird, von denen eine der reine Stoff C, die andere ein binäres Gemisch und die dritte ein ternäres Gemisch, und zwar das durch den Sattelpunkt X bestimmte ist.

In den beiden Vierecken findet sich noch je eine unüberschreitbare Linie, welche zwischen dem tiefsten Punkte des ganzen Gebietes R, und den beiderseits liegenden höchsten Punkten S und T verläuft.

Das Feld wird dadurch in weitere vier Dreiecke getheilt, durch deren Eckpunkte die entsprechenden Fraktionen bei der Destillation angegeben werden. Von diesen vier enthalten aber nur zwei das ternäre Gemisch an einer ihrer Ecken; zwei andere, CRS und BRT, geben neben reinem Stoffe nur binäre Gemische. Dies ergiebt den Unterschied gegen die Fälle II II II und III III III, wo auch sechs Dreiecke auftraten, die aber sämmtlich eine Ecke im ternären Gemisch hatten.

Das Gesammtergebniss dieser Betrachtungen ist also folgendes. Wird ein beliebiges Gemisch destillirt, so zerfällt es immer in drei Fraktionen. Liegt das Gemisch innerhalb des Vierecks $ATRS$, so zerfällt es in je einen reinen Stoff, ein binäres Gemisch von constantem Siedepunkte und in das ternäre von gleicher Eigenschaft.

Liegt das Gemisch dagegen in einem der Dreiecke CRS oder BRT, so zerfällt es in einen reinen Bestandtheil und zwei binäre constant siedende Gemische.

Im Felde verlaufen sechs unüberschreitbare Linien, welche wieder die Eigenschaft haben, dass Gemische, die auf ihnen liegen, nur in zwei Fraktionen zerfallen. Von diesen Linien ergiebt nur eine einen reinen Bestandtheil neben dem ternären constanten Gemisch. Drei andere ergeben neben diesem ternären Gemische je ein binäres von constantem Siedepunkte. Zwei unüberschreitbare Linien führen endlich zu je zwei binären Gemischen als Produkten der fraktionirten Destillation.

Endlich sind sieben Punkte vorhanden, welche untrennbaren Flüssigkeiten entsprechen: die drei reinen Stoffe, die drei binären constanten Gemische und ein ternäres constantes Gemisch.

Beim Vergleich dieser Ergebnisse mit denen der Fälle II II II und III III III stellt sich heraus, dass sie sich wesentlich durch die Lage zweier unüberschreitbarer Linien unterscheiden. Statt der Linien AX und BX im symmetrischen Falle treten die Linien RS und RT in dem weniger symmetrischen Falle auf.

Fig. 18 stellt den Fall II III III dar, auf den die eben angestellten Betrachtungen gleichlautend Anwendung finden.

17. Der Fall I II III. Als letzten Fall haben wir schliesslich den zu erörtern, wo alle drei Linientypen gleichzeitig auftreten. Gemäss der allgemeinen Beziehung, dass das Vorhandensein der Linien vom Typus I die Mannigfaltigkeit vermindert, ist auch hier eine nicht so weitgehende Theilung des Feldes, wie in den letzten Fällen zu erwarten.

Die Anschauung der Fig. 19 zeigt, dass wieder ein Sattelpunkt erscheint, in welchem sich vier unüberschreitbare Linien treffen.

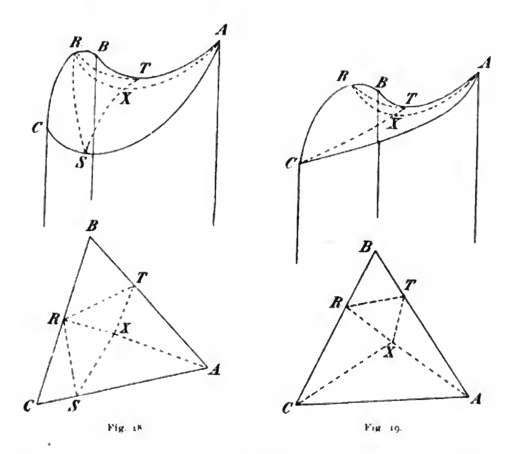


Fig. 18 Fig. 19.

Es entstehen dadurch zunächst drei Dreiecke mit je einer Ecke im Sattelpunkte X, und ein Viereck $BRXT$, zwischen dessen höchstem Punkte R und tiefstem Punkte T noch eine unüberschreitbare Linie verläuft. Das ganze Feld wird dadurch in fünf Dreiecke getheilt, die durch fünf unüberschreitbare Linien begrenzt werden.

Von diesen fünf Dreiecken sind vier von der Beschaffenheit, dass sie als eine der Fraktionen das ternäre Gemisch X ergeben. Ein Dreieck ergiebt ausserdem zwei reine Stoffe als Fraktionen, zwei Dreiecke ergeben dazu einen reinen Stoff und ein binäres Gemisch, eines ergiebt zwei binäre Gemische.

Das fünfte Dreieck ergiebt endlich als Fraktionen einen reinen Stoff und zwei binäre Gemische.

18. Stellt man nun alle diese Ergebnisse zusammen, so ergiebt sich zunächst, dass bezüglich der Mannigfaltigkeit sechs Klassen vorhanden sind, indem solche Klassen, in denen die Linien vom Typus II durch solche vom Typus III ersetzt sind, sich übereinstimmend verhalten. Die verschiedenen Klassen sind durch die Zahl der Fraktionen, der unüberschreitbaren Linien, der getrennten Dreiecksfelder, und die Beschaffenheit der Fraktionen verschieden. In der nachstehenden Tabelle sind die Fälle übersichtlich zusammengefasst.

Klasse.	Anzahl der Felder.	Anzahl der unüber-schr. L.	Anzahl der Frak-tionen.	Arten der Fraktionen.
1 (I I I)	1	3 (0)	3	(111)
2 (I I II u. I I III)	2	4 (1)	4	$(112)^2$
3 (I II II u. I III III)	3	5 (2)	5	(112) $(122)^2$
4 (I II III)	5	8 (5)	6	(122) (113) $(123)^2$ (223)
5 (II II III u. II III III)	6	9 (6)	7	$(122)^2$ $(123)^2$ $(223)^2$
6 (II II II u. III III III)	6	9 (6)	7	$(123)^6$

Zur Erklärung der Tabelle sei folgendes bemerkt. In der ersten Spalte sind die sechs Klassen zusammengestellt, deren Mannigfaltigkeit unter einander verschieden ist. Wie man sieht, enthalten nur zwei Klassen je einen Fall; die anderen enthalten je zwei Fälle, die durch Vertauschung der Typen II und III gegen einander entstehen.

Die Anzahl der Felder, in welche das Gesammtgebiet durch unüberschreitbare Linien zerlegt wird, nimmt von 1 bis 6 zu; die Zahl der letzteren von 3 auf 9, wenn man die drei binären Dampfdrucklinien als unüberschreitbar mitrechnet. Rechnet man nur die inneren unüberschreitbaren Linien, so werden die Zahlen um je 3 kleiner; sie sind in Klammern beigefügt.

Unter „Fraktionen" ist die Anzahl constant siedender Flüssigkeiten angegeben, die aus allen Gemengen insgesammt erhalten werden können. Sie nimmt von 3 auf 7 zu.

Die letzte Spalte endlich enthält die Beschaffenheit der Fraktionen. Unter 1 ist eine einheitliche Flüssigkeit (einer der Bestandtheile) verstanden; unter 2 ein constant siedendes binäres

Gemisch, unter 3 ein ternäres Gemisch von constantem Siedepunkte. Die Exponenten geben an, in wieviel Feldern die Zusammenstellung vorkommt, die Summe der Exponenten kommt daher mit den Zahlen der zweiten Spalte überein.

Zwischen diesen verschiedenen Zahlen lassen sich allerlei Beziehungen aussprechen. Da diese indessen dem Gesagten nichts neues hinzufügen, so mag ihre Entwicklung dem Leser überlassen bleiben.

Zweiter Theil.

Heterogene Gemische.

19. Für die bisherigen Erörterungen ist die Annahme gemacht worden, dass die drei Flüssigkeiten, welche sich am Aufbau der Lösungen betheiligen, sich in allen Verhältnissen vermischen lassen. Von den möglichen ternären Gemischen genügt nur ein kleiner Theil dieser Bedingung; bei weitem die meisten Flüssigkeiten werden, wenn man sie zu dreien mit einander in Berührung bringt, sich nur theilweise lösen und zwei oder mehrere getrennte Schichten bilden.

20. Bevor wir indessen auf die Betrachtung der ternären heterogenen Gemenge übergehen, wird es zweckmässig sein, an die Erscheinungen bei heterogenen binären Gemengen zu erinnern, die gleichfalls von Konowalow ins klare gestellt worden sind.

Bringt man zu einer gegebenen Menge der Flüssigkeit A eine kleine Menge von B, so wird diese homogen gelöst; ebenso verhält sich B gegen A. Ueberschreitet aber die Menge des Zusatzes einen bestimmten Betrag, so trennt sich die Flüssigkeit in zwei Schichten. Die Zusammensetzung derselben bleibt bei gegebener Temperatur constant, d. h. unabhängig von dem Verhältniss, in welchem man die beiden Flüssigkeiten zusammenbringt. Dieses Verhältniss bestimmt nur die Mengen der beiden Lösungen, die sich bilden.

Haben wir also eine Gerade AB, Fig. 20, welche in gewohnter Weise die Zusammensetzung aller möglichen Gemische aus zwei Bestandtheilen A und B darstellt, so wird es in der Nähe der beiden Endpunkte zwei Punkte a und b geben, welche die Zusammensetzung dieser beiden neben einander im Gleichgewicht befindlichen oder coexistirenden Lösungen darstellt. Nimmt man die beiden Bestandtheile in einem Verhältnisse, das

innerhalb *Aa* oder *Bb* liegt, so erhält man eine homogene Lösung von der entsprechenden Zusammensetzung. Nimmt man aber die Antheile in einem zwischen *a* und *b* liegenden Verhältnisse, so trennt sich das Gemisch in eine Lösung von der Zusammensetzung *a* und eine von der Zusammensetzung *b*.

Es sind also *Aa* und *Bb* die homogenen Gebiete, *ab* ist das heterogene Gebiet der binären Mischungen.

Was den Dampfdruck anlangt, so ändert sich dieser innerhalb der homogenen Gebiete mit der Zusammensetzung. Innerhalb des heterogenen Gebietes ist die Zusammensetzung der beiden Schichten, die sich bilden, immer dieselbe; der Dampfdruck kann sich daher zwischen *a* und *b* nicht ändern, da er nicht von den absoluten oder relativen Mengen der flüssigen Phasen abhängt, sondern (bei gegebener Temperatur) nur von deren Zusammensetzung.

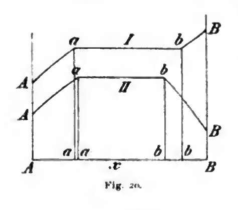


Fig. 20.

Eine Dampfdrucklinie vom Typus I, Fig. 5, geht daher in eine Linie von der Gestalt I in Fig. 20 über; eine Linie vom Typus II in die Linie II derselben Figur. Dampfdrucklinien, die sich aus dem Typus III, Fig. 5 ergeben würden, kommen bei heterogenen Gemischen nicht vor, und Konowalow hat gezeigt, dass sie nicht möglich sind. Es braucht daher in der Folge nur auf I und II Rücksicht genommen zu werden.

21. Das Verhalten beider Typen bei der Destillation ist wesentlich verschieden. Gemenge vom Typus II ergeben zunächst, dass zwischen *A* und *a* der Dampf mehr an *B* enthält, als der Rückstand, während er zwischen *b* und *B* mehr an *A* enthält. Da die Zusammensetzung des Dampfes aber an den Stellen *a* und *b* die gleiche ist, so muss sie nothwendig zwischen *a* und *b* liegen, und es giebt zwischen diesen Punkten einen Punkt *x*, der die Zusammensetzung des Dampfes darstellt, solange beide Schichten anwesend sind, d. h. so lange die Gesammtzusammensetzung der Flüssigkeit zwischen *a* und *b* liegt. Mischt man beide Schichten in solchem Verhältniss, dass ihre Gesammtzusammensetzung gleich *x* ist, so destilliren sie gleichzeitig zu Ende, und ein solches Gemenge verhält sich daher beim Destilliren wie ein einheitlicher Stoff von constantem Siedepunkte.

Verläuft dagegen die Dampfdrucklinie wie I, so liegt nach dem allgemeinen Princip die Zusammensetzung des Dampfes jedenfalls rechts von *a*. Da aber die Schicht *b* den gleichen Dampf aussendet, und nach rechts gleichfalls ansteigt, so liegt die Zusammensetzung des Dampfes auch rechts von *b*, und fällt irgendwo in das Gebiet *bB*. Infolge dieser Lage ist es unmöglich, dass eine Flüssigkeit gefunden wird, welche einen Dampf von gleicher Zusammensetzung aussendet, und es giebt daher keinen Fall eines (homogenen oder heterogenen) constant siedenden Gemisches.

Wie man sieht, entsprechen diese beiden Fälle durchaus denen, die bei homogenen Gemischen auftreten, und es ist in gewissem Sinne gleichgültig, ob das Gemenge der beiden Flüssigkeiten homogen oder heterogen ist.

22. Für die weitere Erörterung ist es nun wesentlich, ob man annimmt, dass die entstandenen Schichten getrennt und einzeln weiter behandelt werden sollen, oder ob sie zusammen weiter destillirt werden sollen. Im ersten Falle kann man durch wiederholte Destillation beide Bestandtheile rein erhalten, der zweite entspricht dagegen dem Falle der homogenen Lösungen insofern, als man schliesslich constant siedende Gemenge neben den reinen Bestandtheilen erhält.

Nehmen wir zuerst den Fall, dass wir die Schichten trennen. Dann hat man bei der weiteren Destillation mit Lösungen von der Zusammensetzung *a* oder *b* zu thun. Diese trennen sich bei der Destillation in den reinen Stoff *A* oder *B* und zwei Schichten *a* und *b*. Trennt man diese wieder mechanisch, und destillirt weiter, so erreicht man schliesslich eine vollständige Trennung in die reinen Bestandtheile, indem jede entstandene Schicht einen Theil in Gestalt des reinen Stoffes abzuscheiden gestattet.

Trennt man dagegen die entstandenen Schichten nicht mechanisch, so wird zwar anfangs eine gewisse Menge des reinen Stoffes abgeschieden, und man erhält im Destillat die beiden Schichten. Destillirt man aber diese gemeinsam, so sieden sie constant, so lange noch zwei Schichten vorhanden sind, denn Druck und Zusammensetzung des Dampfes ist bei beiden gleich. Es geht also ein Dampf von constanter Zusammensetzung über, der sich in zwei Schichten sondern wird, deren Mengenverhältniss gleichfalls constant ist, solange beide Schichten in der Retorte vorhanden sind. Unterbricht man die Destillation in dem Augenblicke, wo

die eine der beiden Schichten in der Retorte verschwindet, so hat das übergegangene heterogene Gemisch offenbar die Eigenschaft, dass es bis zum letzten Tropfen bei constanter Temperatur destillirt, denn in ihm verschwinden die beiden Schichten gleichzeitig mit dem letzten Tropfen Flüssigkeit, der in Dampf übergeht. Dieses Gemenge wird also durch Destillation ohne mechanische Trennung der Schichten sich nicht weiter zerlegen lassen.

Für das rückständige homogene Gemisch ergiebt die Fortsetzung dieser Betrachtungen, dass es sich gleichfalls in einen reinen Bestandtheil und in das heterogene Gemenge von der bestimmten Zusammensetzung trennen lässt, welches seinerseits bei der Destillation constant bleibt.

Vermeidet man also eine mechanische Trennung der Schichten, so ist das Ergebniss der Fraktionirung ein constantes heterogenes Gemenge und der reine Bestandtheil, der in Bezug auf die Gesammtzusammensetzung dieses Gemenges ursprünglich überschüssig vorhanden war. Die Analogie dieses Falles mit dem Falle, dass die Dampfdrucklinie der homogenen Lösungen ein Maximum hat (S. 420), ist unverkennbar. Sie wird noch deutlicher, wenn wir uns erinnern, dass die Gesammtzusammensetzung der beiden Schichten, wenn sie in solchem Verhältnisse genommen werden, dass sie bei der Destillation gleichzeitig verschwinden, mit der Zusammensetzung des Dampfes übereinstimmt. Der Punkt x auf der Linie AB, der diese Zusammensetzung angiebt, hat also auch die Eigenschaft, dass dort Dampf und Rückstand gleiche Zusammensetzung haben. Dieser Punkt tritt an die Stelle des Maximalpunktes homogener Gemische.

23. Hiernach können wir zu dem Verhalten der ternären heterogenen Gemenge übergehen, die sich auf Grund der eben gepflogenen Erörterungen alsbald übersehen lassen.

Wir machen zunächst die Voraussetzung, dass die Zahl der heterogenen Schichten drei nicht überschreitet. In der That hat die Erfahrung erwiesen, dass flüssige Schichten höchstens in der Anzahl der Bestandtheile irgend eines Gleichgewichtes vorkommen, so dass wir uns mit dieser Einschränkung innerhalb des beobachteten Gebietes bewegen, ohne es irgendwie zu verkleinern.

Die erste Untersuchung, welche wir hier anzustellen haben werden, ist die der denkbaren Fälle für die Heterogenität dreier Flüssigkeiten. Wiewohl bezüglich dieser Frage ausgezeichnete

Vorarbeit in den Untersuchungen von Roozeboom, Schreinemakers und Anderen gethan worden ist, so erscheint es mir doch nicht überflüssig, in allgemeinster Weise diese Frage nochmals zu behandeln.

Wir gehen von dem Falle aus, dass alle drei Flüssigkeiten sich mit einander nur theilweise vermischen lassen und suchen die entsprechende Darstellung.

Sei *ABC*, Fig. 21, wieder unser Dreieck, welches die Zusammensetzung der Lösungen darstellt, so wird die gemachte Voraussetzung zunächst zu folgenden Schlüssen führen.

Auf der Linie *AB* befinden sich zwei Punkte, *a* und *b'*, welche die Zusammensetzung der gegenseitig gesättigten Lösungen von *A* und *B* darstellen. Der Punkt *a* bezeichnet die Flüssigkeit, die vorwiegend aus dem Stoffe *A* mit etwas gelöstem *B* besteht, der Punkt *b'* die Lösung von etwas *A* in viel *B*. Beide Punkte stellen Lösungen dar, die mit einander im Gleichgewichte sind, und deshalb nach dem von Konowalow bewiesenen Satze auch gleichen Druck und gleiche Zusammensetzung der Dämpfe aufweisen müssen.

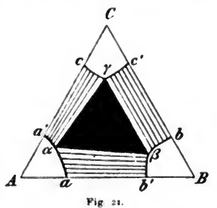


Fig. 21.

Setzt man nun etwas von dem dritten Stoffe *C* dazu, so wird sich dieser zwischen den beiden Schichten *a* und *b'* vertheilen. Es werden zwei neue Lösungen mit vorwiegendem *A*, bez. *B* entstehen, die ausserdem je etwas *C* enthalten. Die aufgenommenen Mengen von *C* brauchen beiderseits nicht gleich zu sein.

Die beiden so entstandenen im Gleichgewicht befindlichen oder coexistirenden Lösungen werden durch zwei entsprechende Punkte dargestellt sein, die in der Nähe von *a* und *b'* innerhalb des Dreiecks liegen. Diese beiden Punkte brauchen nicht in einer Parallelen zu *AB* zu liegen, doch wird ihre Verbindungslinie sich von einer solchen um so weniger entfernen, je näher sie an *a* und *b'* liegen, d. h. je weniger *C* zugefügt worden ist.

Setzt man mehr und mehr von *C* zu, so entstehen weitere entsprechende Punktenpaare, und es bilden sich zwei Linien aus, welche sich von *a* und *b'* aus in das Innere des Dreiecks fortsetzen. Dies geht aber nicht unbegrenzt weiter, denn zuletzt wird das

zugefügte C sich nicht mehr vollständig auflösen, sondern es wird sich eine dritte Schicht bilden, welche vorwiegend aus C nebst geringeren Mengen von A und B besteht. Wie dies zu Stande kommt, ergiebt sich, wenn wir die eben angestellten Betrachtungen für die beiden anderen Paare AC und BC wiederholen. Auch auf deren Grenzlinien, welche die binären Gemische darstellen, werden sich entsprechende Punkte a', c und b, c' finden, von denen die Linien der ternären Gemische sich ins Innere erstrecken. In den Punkten α, β und γ, wo jedesmal das dritte Gemisch beginnt aufzutreten, treffen diese Linien zusammen, und bilden insgesammt drei Eckgebiete Aaa', Bbb' und Ccc'. Die Verbindungslinien der drei Punkte α, β und γ ergeben ein inneres Dreieck $\alpha\beta\gamma$, und ausserdem sind noch drei vierseitige Gebiete $a\alpha\beta b'$, $b\beta\gamma c'$ und $a'\alpha\gamma c$ vorhanden. In jedem dieser drei Arten Gebiete bestehen verschiedene Arten Gleichgewichte.

Liegt die Zusammensetzung der Flüssigkeit innerhalb eines der drei Eckgebiete $Aa\alpha a'$, $Bb\beta b'$, $Cc\gamma c'$, so bleibt die Lösung homogen, denn die beiden in geringerer Menge zugefügten Flüssigkeiten lösen sich vollständig in der dritten auf. Es sind dies die homogenen Felder.

Liegt die Zusammensetzung der Flüssigkeit in einem der vierseitigen Seitengebiete, so kann die Flüssigkeit nicht mehr homogen bleiben, sondern sie trennt sich in zwei gegenseitig gesättigte oder coexistirende Lösungen. Und zwar entsprechen sich die beiden krummlinigen Grenzen, z. B. $a\alpha$ und $b'\beta$ Punkt für Punkt, indem zu jedem Punkte der einen Grenze, der die Zusammensetzung der einen entstehenden Schicht angiebt, ein entsprechender Punkt auf der anderen Grenze gehört, der die Zusammensetzung der zweiten Schicht angiebt, die mit der ersten im Gleichgewicht steht. Dieser Zusammenhang ist durch die Schraffirung der drei binären Gebiete zum Ausdruck gebracht worden.

Werden also die drei Bestandtheile in solchen Mengen zusammengebracht, wie sie durch einen Punkt in einem binären Viereck dargestellt werden, so zerfällt die Flüssigkeit in zwei nicht mischbare Antheile, von denen jeder die drei Stoffe, nur in verschiedenen Verhältnissen enthält. Die Zusammensetzung dieser Gemische ist von Fall zu Fall verschieden; alle Gemische aber, die auf einer Verbindungslinie „entsprechender" Punkte liegen, geben Antheile von derselben Zusammensetzung; die Lage

auf dieser Geraden hat nur Einfluss auf die Mengen der beiden coexistirenden Flüssigkeiten, beeinflusst aber deren Zusammensetzung nicht.

Liegt endlich die gesammte Zusammensetzung der Flüssigkeit innerhalb des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$, so trennt sich die Flüssigkeit in drei Antheile von ganz bestimmter Zusammensetzung, welche durch die drei Punkte α, β und γ angegeben wird. Das anfängliche Mischungsverhältniss hat nur auf die Mengen der drei Lösungen einen Einfluss, die neben einander entstehen, nicht aber auf ihre Zusammensetzung. Wohl aber kann diese mit der Temperatur sich ändern. Dies Dreieck heisse das ternäre Gebiet.

24. Die Dampfdrucke der nichthomogenen Lösungen ergeben sich in diesem allgemeinsten Falle auf Grund folgender Betrachtungen.

In den homogenen Eckgebieten wird der Dampfdruck mit der Zusammensetzung sich stetig ändern. Tragen wir daher die Dampfdrucke für eine bestimmte Temperatur wieder als Ordinaten senkrecht auf das Dreieck, so wird über den Eckgebieten eine gekrümmte Dampfdruckfläche von dem allgemeinen Charakter der früher betrachteten Flächen vorhanden sein. Die einzige Einschränkung, die hier zu machen ist, bezieht sich darauf, dass Linien vom Typus III nicht vorkommen, wie S. 434 erwähnt wurde.

In den vierseitigen binären Gebieten besteht das Gesetz, dass alle Gemenge, deren Gesammtzusammensetzung irgendwo auf der Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte liegt, gleichen Dampfdruck haben müssen. Dies folgt unmittelbar daraus, dass alle diese Gemenge in zwei Lösungen gleicher Zusammensetzung zerfallen. Da auf den Dampfdruck nur die Zusammensetzung der Flüssigkeit, nicht aber ihre Menge einen Einfluss hat, so muss über jeder solchen Linie ein constanter Druck bestehen.

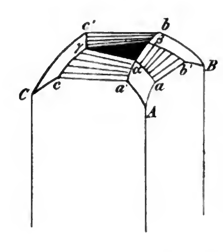
Die Dampfdruckflächen über diesen Gebieten ergeben sich also, wenn man längs der Grenzlinien, mit denen die Dampfdruckflächen der homogenen Eckgebiete abschliessen, je eine horizontale Gerade so verschiebt, dass sie längs zweier solcher Grenzlinien gleitet. Diese Dampfdruckflächen sind somit Regelflächen.

In den drei Punkten α, β und γ endlich treten je drei heterogene Lösungen auf. Da es in jedem Falle (bei gegebener Temperatur)

dieselben drei Lösungen, nur in verschiedenen Mengenverhältnissen sind, so besteht in diesen drei Punkten der Dampfdrucklinie überall derselbe Druck. Das Gleiche gilt für jeden Punkt innerhalb des Dreieckes $\alpha\beta\gamma$. Dieser Theil der Dampfdruckfläche ist daher eine horizontale Ebene.

Fig. 22 giebt eine Darstellung der Dampfdruckfläche in dem Falle, dass alle binären Grenzlinien vom Typus II sind. Die Regelflächen sind schraffirt, die Ebene constanten Druckes ist schwarz.

25. Das Verhalten bei der Destillation solcher heterogener Gemenge ist wesentlich verschieden je nach der Lage des Punktes,



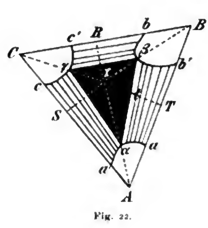
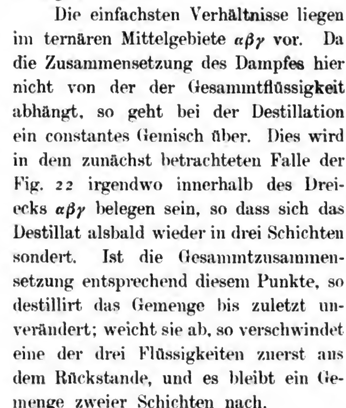


Fig. 22.



der die Zusammensetzung der Gesammtflüssigkeit darstellt.

Die einfachsten Verhältnisse liegen im ternären Mittelgebiete $\alpha\beta\gamma$ vor. Da die Zusammensetzung des Dampfes hier nicht von der der Gesammtflüssigkeit abhängt, so geht bei der Destillation ein constantes Gemisch über. Dies wird in dem zunächst betrachteten Falle der Fig. 22 irgendwo innerhalb des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ belegen sein, so dass sich das Destillat alsbald wieder in drei Schichten sondert. Ist die Gesammtzusammensetzung entsprechend diesem Punkte, so destillirt das Gemenge bis zuletzt unverändert; weicht sie ab, so verschwindet eine der drei Flüssigkeiten zuerst aus dem Rückstande, und es bleibt ein Gemenge zweier Schichten nach.

Hieraus ergiebt sich das Verhalten im binären Gebiete. Da in dem Augenblick, wo eine der Schichten verschwindet, der Dampf noch die alte Zusammensetzung hat, die durch einen innerhalb des Dreiecks belegenen Punkt dargestellt wird, so folgt nothwendig, dass der Rückstand sich bei der Fortsetzung der Destillation in entgegengesetzter Richtung von einem Punkte der Geraden $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ oder $\gamma\alpha$ entfernen muss.

Um einen bestimmten Fall zu haben, nehmen wir an, dass α und β nachgeblieben seien. Dann wird die Zusammensetzung

des Rückstandes durch einen Punkt im binären Gebiete $ab'\beta\alpha$ dargestellt werden, d. h. in der Retorte werden zwei Schichten vorhanden sein, deren Zusammensetzung bei der Fortsetzung der Destillation sich immer mehr den Punkten a und b' nähert, bis sie schliesslich auf diese Punkte hinauskommt. Diese binären Gemische verhalten sich dann bei der Destillation wie S. 435 entwickelt wurde.

Die Flüssigkeitsgemenge aus drei Bestandtheilen, die sich in zwei Schichten sondern, verhalten sich demnach wesentlich anders, als wenn sie aus zwei Bestandtheilen beständen. Dies beruht darauf, dass die Zusammensetzung ihres Dampfes nicht durch einen Punkt in der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte dargestellt wird, wie bei zwei Bestandtheilen, sondern durch einen auf der Regelfläche höher belegenen Punkt, bez. durch einen Punkt im ternären Dreieck. Der Dampfdruck über den beiden Schichten ist im Falle dreier Bestandtheile zwar auch constant, solange dieselben beiden Schichten vorhanden sind; die Zusammensetzung des Dampfes ist aber nicht als Summe aus den Zusammensetzungen der beiden Schichten mehr darstellbar, und daher ändern sich die Schichten bei der Destillation. Diese Aenderung erfolgt im Sinne eines gemeinsamen Herabgleitens der beiden entsprechenden Punkte längs der Linien αa und $\beta b'$. Im Dampfe treten anfangs noch die drei Schichten constanter Zusammensetzung auf. Bei weiterer Destillation wird aber auch der den Dampf darstellende Punkt sich in das binäre Gebiet $\alpha ab'\beta$ zurückziehen, und damit verschwindet die Schicht γ aus dem Destillat. Von diesem Augenblicke an, wo im Destillat gleichfalls nur zwei Schichten erscheinen, ist auch deren Zusammensetzung nicht mehr constant, sondern ändert sich im Sinne einer Annäherung an die Punkte a und b'.

Das Schicksal des Rückstandes in der Retorte wird schliesslich sein, dass dort eine von den beiden Flüssigkeiten verschwindet, und nur eine übrig bleibt. Dies wird im allgemeinen an einem Punkte der Linie $a\alpha$ oder $b'\beta$ geschehen; wir nehmen den ersteren Fall der Bestimmtheit wegen an. Dann tritt die Zusammensetzung des Rückstandes in das homogene Feld $Aa\alpha a'$ über, während im Destillat anfangs noch zwei Schichten erscheinen.

Wiederholte Destillationen müssen also dahin führen, den reinen Stoff A als letzten Retortenrückstand zu isoliren. Was

die Gemenge anlangt, so ergiebt sich wieder ein Unterschied, je nachdem man die heterogenen Schichten mechanisch trennt, oder nicht. Da praktisch nur der erstere Fall in Frage kommt, so beschäftigen wir uns mit ihm zuerst. Die Frage reducirt sich dadurch auf die, wie sich die Gemische verhalten werden, welche auf den Linien $a\alpha$ und den entsprechenden fünf anderen $a'\alpha$, $b\beta$, $b'\beta$, $c\gamma$, $c'\gamma$ liegen. Es genügt natürlich die Betrachtung einer dieser Linien, z. B. $a\alpha$.

Das Gemisch von der Zusammensetzung, die durch einen Punkt der Linie $a\alpha$ dargestellt ist, sendet Dämpfe aus, deren Zusammensetzung durch einen mehr nach rechts und oben gelegenen Punkt dargestellt ist. Dadurch gelangt es selbst mehr in das homogene Gebiet $Aa\alpha$ hinein, und wird als Rückstand schliesslich den reinen Stoff A lassen.

Im Destillat erhält man entweder drei Schichten, oder zwei; ersteres, wenn der Punkt in der Nähe von α liegt. Da auf das Verhalten der Flüssigkeit α weiter unten eingegangen werden soll, nehmen wir zunächst an, es entstehen zwei Schichten. Von diesen liegt eine auf $a\alpha$, die andere auf $b'\beta$.

Wird die erste Schicht getrennt und destillirt, so finden wieder die eben geschilderten Vorgänge statt, mit dem Ergebniss, dass weiteres reines A abgeschieden wird, und im Destillat, falls zwei Schichten entstehen, die Zusammensetzung der an A reicheren weiter nach links und unten belegen ist.

Das Ergebniss ist schliesslich eine Trennung von A und die Bildung anderer Schichten mit vorwiegendem B, bez. C, die diese Stoffe gleichfalls rein abzusondern gestatten, d. h. eine vollständige Trennung der Bestandtheile A, B und C.

Ein besonderer Fall liegt vor, wenn das homogene Gemisch gerade die Zusammensetzung α hat. Dann geht die Destillation auf einer unüberschreitbaren Linie vor sich, und man kann sie so leiten, dass einerseits reines A, andererseits das dem Punkte X entsprechende Gemenge der drei Schichten entsteht. Auf diese Verhältnisse wird alsbald näher eingegangen werden.

26. Bereits im Falle der binären nichthomogenen Gemenge (S. 435) ist gezeigt worden, dass es auf der Linie AB einen Punkt giebt, der sich ganz ebenso verhält, wie der ausgezeichnete Maximal- oder Minimalpunkt im Falle der homogenen Lösungen. Wenn die Gesammtzusammensetzung der Flüssigkeit diesem Punkte

entspricht, der durch die Zusammensetzung des Dampfes gekennzeichnet ist, so sind bis zum letzten Augenblicke der Destillation beide Schichten gleichzeitig vorhanden, so dass sich das Gemenge trotz seiner zwei Schichten wie ein einheitlicher Stoff verhält.

Im Falle dreier Bestandtheile haben wir einen solchen Fall in einem Gemenge der drei unveränderlichen Lösungen α, β und γ. Nimmt man diese in solchen Verhältnissen, dass ihre Gesammtzusammensetzung der des Dampfes gleich ist, so destilliren die drei Flüssigkeiten gleichfalls gleichzeitig zu Ende und das Gemenge verhält sich wie eine reine Flüssigkeit, bez. wie ein constant siedendes ternäres Gemisch, dessen Zusammensetzung gleich der seines Dampfes ist. Der Punkt X des inhomogenen Gemisches entspricht also ganz dem Punkte X des ternären homogenen Gemisches (S. 427).

Den ausgezeichneten Punkten des homogenen Gemisches R, S und T, welche die Maxima des Dampfdruckes der drei binären Combinationen darstellen, entsprechen in gleicher Weise die drei Punkte R, S und T, Fig. 22, des heterogenen Gemenges, welche die Zusammensetzung des Dampfes aus beiden Schichten und gleichzeitig die constant siedende Gesammtzusammensetzung der beiden Schichten darstellen.

27. Nun war der Fall des homogenen Gemisches, S. 427, dadurch gekennzeichnet, dass von den sechs Punkten A, B, C, R, S, T nach dem Punkte X unüberschreitbare Linien gingen. Wir haben auch im heterogenen Falle eine analoge Erscheinung zu erwarten, und müssen nur bestimmen, wie sie sich gestaltet.

Ziehen wir die Verbindungsgeraden zwischen X und den genannten Punkten, so wird alsbald die Vermuthung nahe gelegt, dass die drei Punkte α, β und γ auf diesen Geraden liegen und durch den Durchschnitt derselben mit den Grenzen $\alpha\alpha\alpha'$ u. s. w. des homogenen Feldes bestimmt sind. Dies lässt sich in der That beweisen.

Setzen wir zunächst eine Flüssigkeit so zusammen, dass wir das Gemenge X und den Antheil α in beliebigem Maasse vermengen. Die Gesammtzusammensetzung der Flüssigkeit wird dann aus geometrischer Nothwendigkeit auf der Geraden $X\alpha$ liegen. Destillirt man dies Gemenge, so gehen die drei Schichten in der Gesammtzusammensetzung X über, und der Rückstand nähert sich geradlinig dem Punkte α, den er schliesslich erreicht.

In diesem Augenblicke verschwinden in der Retorte gleichzeitig die beiden anderen Schichten β und γ, und es hinterbleibt α allein.

Andererseits läuft von A nach α eine unüberschreitbare Linie. Dies ergiebt sich schon aus der Entstehungsweise der heterogenen Dampfdruckfläche durch Beschneidung der homogenen, wie dies S. 439 geschildert worden ist. Das Feld $Aa\alpha a'$ ist von der homogenen Fläche unverändert erhalten geblieben; folglich muss auch die unüberschreitbare Linie erhalten geblieben sein.

Daraus folgt, dass einerseits zwischen A und α, andererseits zwischen α und X je eine unüberschreitbare Gerade verläuft. Es bleibt noch zu beweisen übrig, dass beide sich gegenseitig verlängern.

Dies ergiebt sich daraus, dass α bei der Destillation zunächst einen Dampf geben muss, dessen Zusammensetzung X ist. Denn jede der drei Schichten α, β und γ bildet einen Dampf von dieser Zusammensetzung. Daraus folgt weiter, dass der Rückstand eine Zusammensetzung haben muss, die sich ergiebt, wenn man X von α abzieht, d. h. der Anfang der Linie αA muss in der Verlängerung von $X\alpha$ liegen, was zu beweisen war.

Man kann also thatsächlich die drei Punkte α, β und γ aus den Grenzen der drei homogenen Gebiete und der Zusammensetzung des Dampfes aus den drei constanten Schichten bestimmen.

27. Eine ähnliche Bedeutung haben die Linien XR, XS und XT. Der Punkt t, Fig. 22, stellt die Gesammtzusammensetzung eines Gemenges dar, welches sich in die beiden Schichten α und β, ohne γ spaltet. Jedes Gemenge auf der Geraden Xt hat daher die Eigenschaft, dass es beim Destilliren die drei Schichten von der Gesammtzusammensetzung X abgiebt, worauf in der Retorte eine der drei Schichten verschwindet und zwei (nicht eine, wie im vorigen Fall) nachbleiben.

Der Punkt T hängt nur von der Natur der beiden Bestandtheile A und B ab, und nicht von C. Zieht man TX, so hat jedes Gemisch auf dieser Linie die Eigenschaft, dass es durch Destillation in die drei constanten Schichten α, β und γ einerseits, in die beiden constanten binären Schichten a und b' andererseits zerfällt. Bei der Destillation tritt daher folgendes ein.

Solange die Flüssigkeit im ternären Gebiete $\alpha\beta\gamma$ liegt, siedet sie bei constantem Drucke, indem die drei Schichten von der

Gesammtzusammensetzung x übergehen. In dem Augenblicke, wo die Zusammensetzung des Rückstandes durch t geht, verschwindet die Schicht γ und der Druck vermindert sich. Bei weiterem Destilliren bei constanter Temperatur muss der Druck immer mehr vermindert werden, und schliesslich ist er auf dem Werthe angelangt, der dem Punkte T entspricht. Von nun ab destillirt die Flüssigkeit wieder bei constantem Druck, bis alles verflüchtigt ist.

Die Flüssigkeit verhält sich auf dieser Linie also wieder wie eine binäre, nur mit dem Unterschiede, dass an Stelle der einheitlichen Flüssigkeiten Schichten erscheinen, und zwar dreifache im Destillat, und zweifache im Rückstande.

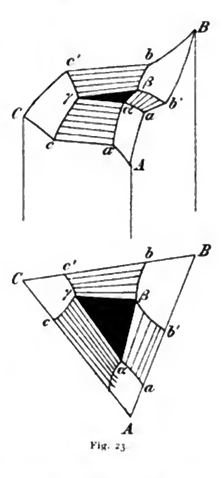


Fig. 23

28. Die bisher gewonnenen Ergebnisse sind nun nach zwei Richtungen zu erweitern. Einmal müssen die Fälle erörtert werden, in denen sich eine oder mehrere Grenzlinien vom Typus I, Fig. 20 am Aufbau der Isothermenfläche betheiligen; andererseits ist die Mannigtaltigkeit zu betrachten, welche durch das verschiedenartige Zusammenfliessen der homogenen Gebiete ternärer Mischungen entsteht. Da die letzteren sich als stufenweise Vereinfachungen des allgemeinsten Typus darstellen, und auf alle drei Fälle der Combinationen verschiedener Grenzlinien gleicherweise Anwendung finden, so seien die Betrachtungen, die sich an die Verschiedenheit der binären Grenzlinien knüpfen, vorausgeschickt.

Ausser dem bereits erörterten Falle II II II, der der häufigste sein dürfte, sind noch drei andere Combinationen möglich, nämlich I I I, I I II und I II II. Sie sollen nach einander betrachtet werden.

29. Der Fall I I I. Verhältnissmässig übersichtlich ist der Fall, in dem sich drei gleichartige Grenzlinien I zu der Gesammtform der Dampfdruckisotherme zusammensetzen. Fig. 23 giebt hiervon eine Anschauung.

Die Feldertheilung ist wieder genau dieselbe, wie im erstbetrachteten Falle; die Form zeichnet sich aber von jener durch das vollständige Fehlen aller unüberschreitbaren Linien aus. Es liegt dies daran, dass bei binären Gemischen im Falle der Dampfdrucklinien von der Form I die Zusammensetzung des Dampfes nicht innerhalb der Zusammensetzungen der beiden flüssigen Schichten liegen kann (S. 435). Der Fall verhält sich ganz entsprechend dem homogenen Falle I I I (S. 421), und als constant siedende Flüssigkeiten treten nur die reinen Bestandtheile auf.

Wie die Betrachtung der Fig. 23 ergiebt, liegt die ternäre horizontale Ebene, die der Anwesenheit dreier Schichten entspricht, nicht mehr wie bei II II II im höchsten Punkte der Dampfdruckfläche, sondern in mittlerer Höhe. Dem entsprechend liegt auch die Zusammensetzung des Dampfes nicht in einem Punkte des Dreiecks, sondern ausserhalb.

Entsprechend der Lage der Ebene sind auch die drei Regelflächen zum Theil anders geordnet, als im vorigen Falle. Es fällt mindestens eine von ihnen nach dem Dreieck zu ab, während eine andere wie im früheren Falle aufsteigt. Wie sich die dritte verhält, hängt von der Gestalt der drei Grenzlinien ab, sie kann sowohl auf- wie absteigen.

Das Verhalten bei der Destillation braucht nicht eingehend geschildert zu werden, da es sich einfach dahin zusammenfassen lässt, dass in keinem Falle constant siedende Gemische entstehen. Zwar ist innerhalb des dreieckigen Feldes der Dampfdruck von der Zusammensetzung unabhängig, und wenn überhaupt die drei Schichten vorhanden sind, so ist auch der Druck und die Zusammensetzung des Dampfes dieselbe. Aber bei der Destillation verschiebt sich die Zusammensetzung bald so, dass eine Schicht verschwindet, und aus dem Destillat bilden sich in keinem Falle wieder drei Schichten.

30. Der Fall I I II. Fig. 24 stellt einen der möglichen Fälle vor, wo zwei Grenzlinien des ersten Typus sich mit einer des zweiten vereinigen. An der Hand dieser Darstellung wird man leicht die Umwandlung der Figuren 8 und 9 in die entsprechenden heterogenen Formen bewerkstelligen können. Wesentlich abweichendes ergeben sie nicht.

Da die Grenzlinie *BC* vom Typus II ist, so ist die Zusammensetzung des Dampfes aus dem heterogenen binären Gemenge

zwischen B und C belegen, und es giebt daher ein solches Gemenge, welches unverändert bis zum letzten Tropfen destillirt. Demgemäss behalten auch die ternären Gemenge mit zwei Schichten, die der Regelfläche $bc'\gamma\beta$ angehören, eine entsprechende Eigenschaft bei, d. h. sie lassen bei der Destillation das binäre Gemenge R

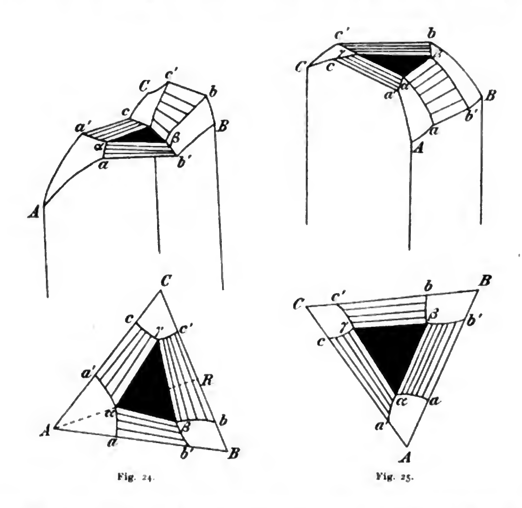


Fig. 24. Fig. 25.

zurück, und im Destillate erscheint ein dem Dreiecke angehöriges Gemenge, das drei Schichten bildet.

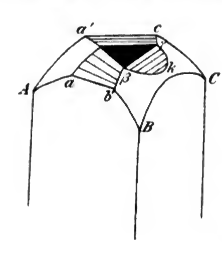
Eine weitere Folge der Linie vom zweiten Typus ist, dass auch in dem homogenen Felde $Aa\alpha a'$ eine unüberschreitbare Linie $A\alpha$ verläuft.

Die Eigenschaften des vierten Falles I II II lassen sich aus der Fig. 25 ablesen und bedürfen keiner besonderen Erörterung.

31. Eine andere mögliche Mannigfaltigkeit heterogener Gemenge besteht darin, dass die vollständige Feldtheilung, wie sie durch Fig. 21 ausgedrückt ist, nicht zu Stande kommt, sondern sich nur theilweise entwickelt. Es kann dies einerseits dadurch geschehen, dass sich die Regelflächen gegen das mittlere Dreieck zurückziehen, andererseits, indem sie sich von einander soweit

gegen den Rand entfernen, dass das ternäre Dreieck überhaupt nicht mehr zu Stande kommt, endlich dadurch, dass Dreiecke oder Regelflächen zusammenfliessen. Es kommen auf solche Weise insgesammt sechszehn Hauptfälle zusammen, von denen jeder auf eine der vier eben geschilderten Formen der Dampfdruckfläche angewendet werden kann. Dies ergiebt insgesammt 64 verschiedene Fälle heterogenen Gleichgewichts ternärer Lösungen.

Es soll darauf verzichtet werden, alle diese Fälle zu erörtern, zumal sich die einmal aufgetretenen Elemente meist ohne erhebliche Aenderung wiederholen, und es wird genügen, die verschiedenen Theilungsfälle auf die wahrscheinlich häufigste Form der Dampfdruckfläche anzuwenden, wie sie in Fig. 22 dargestellt ist.



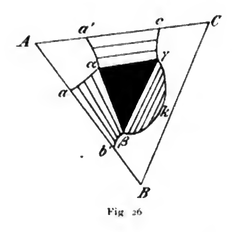


Fig. 26

32. Fig. 26 stellt den Fall dar, dass eine der Regelflächen sich vom Rande zurückzieht. Es entsteht dadurch an Stelle der vierseitigen Fläche eine, die durch eine stetige Curve $\beta k \gamma$ begrenzt ist. Zieht man in ihr die Geraden, welche die entsprechenden Punkte verbinden, so werden diese immer kürzer und ziehen sich bei k in einen Punkt zusammen.

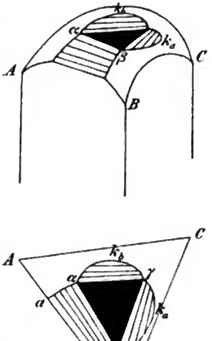
Dies bedeutet, dass von den drei Flüssigkeiten zwei Paare sich nur theilweise lösen, während das dritte Paar sich in allen Verhältnissen vermischt. Wenn zu der aus B und C bestehenden Lösung in zunehmender Menge A gesetzt wird, so geht die Lösung bei einem bestimmten Gehalt in zwei nicht mischbare Schichten aus einander, deren Zusammensetzung um so verschiedener wird, je mehr A zugesetzt wird. Bei einer gewissen Menge von A tritt dann eine weitere Scheidung in drei Phasen ein, indem die Gesammtzusammensetzung des Gemenges in das ternäre Dreieck $\alpha\beta\gamma$ tritt.

Denkt man sich umgekehrt dem Gemenge A entzogen, so verwandeln sich die drei Phasen zunächst in zwei, und ferner

wird die Zusammensetzung der beiden Phasen sich immer ähnlicher. Im Punkte k werden beide Flüssigkeiten identisch, und vermischen sich daher zu einer homogenen Lösung.

Einen Punkt, in welchem zwei Phasen identisch werden, nennt man einen **kritischen Punkt**. Ein solcher tritt daher nothwendig unter den geschilderten Bedingungen auf.

Hält man diesen Fall mit dem allgemeinen Fig. 21 zusammen, so sieht man, dass beim Uebergange jenes in diesen (der z. B. durch Temperaturänderung zu bewerkstelligen ist) im Augenblicke des Ueberganges der Punkt k in die Linie BC fällt. Das heisst, dass ein solches Gemenge in diesem Zustande seinen kritischen Punkt für das entsprechende binäre System BC hat, und dass dieser kritische Punkt der erste, bez. der letzte ist, welcher bei einer derartigen stetigen Aenderung zu beobachten ist.



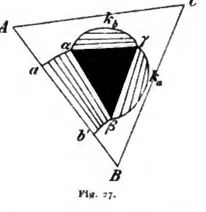


Fig. 27.

33. Fig. 27 stellt den Fall dar, dass der Vorgang des Zurückziehens der Regelfläche nach dem ternären Dreieck an zweien dieser Flächen stattgefunden hat. Es sind dementsprechend zwei kritische Punkte entstanden. Für diese gelten gleichfalls die eben angestellten Betrachtungen, und es braucht nur ergänzend bemerkt zu werden, dass bei stetiger Aenderung der Temperatur nicht etwa beide Punkte gleichzeitig erscheinen, bez. verschwinden, sondern einer nach dem anderen. Bei einem Uebergange aus dem allgemeinen Falle in den vorliegenden muss also jedenfalls der Fall Fig. 26 dazwischen auftreten.

Fig. 28 stellt den Fall dar, dass an allen drei Seiten das Zurückziehen stattgefunden hat. Dies würde dem entsprechen, dass die drei Flüssigkeiten sich zwar paarweise in einander unbeschränkt lösen, dass aber jedes Paar durch den Zusatz der dritten Flüssigkeit zuerst zum Entmischen in zwei, und dann in drei Schichten gebracht werden kann. Mit dieser Eigenschaft ist das Auftreten dreier kritischer Punkte verbunden, die indessen

noch nicht die höchste Zahl sind, welche überhaupt unter den gemachten Voraussetzungen vorkommen kann.

34. Fragen wir umgekehrt nach den Erscheinungen, welche das erste Auftreten heterogener Schichten begleiten, so haben wir in Fig. 29 den einfachsten Fall. Er stellt das Verhalten dar, dass zwei von den Paaren in allen Verhältnissen mischbar sind,

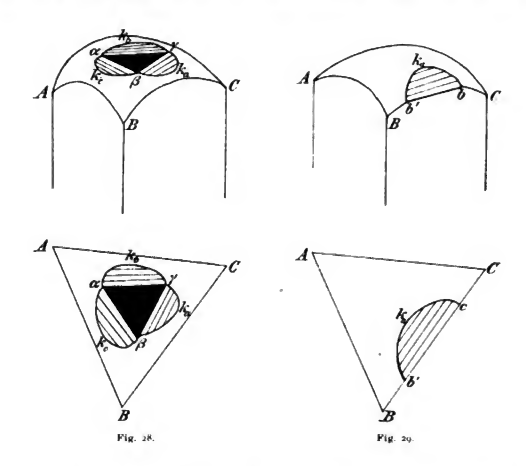


Fig. 28. Fig. 29.

das dritte aber nicht. Dieses wird aber durch den Zusatz des dritten Stoffes immer mischbarer, und geht schliesslich in eine homogene Lösung über.

Dies Verhalten ist dem eben betrachteten gerade entgegengesetzt, und demgemäss stellt sich auch ein Gegensatz in der Erscheinung des kritischen Punktes, der auch hier auftritt, heraus. Während dort durch Zufügung des dritten Stoffes das homogene Gebiet durch den kritischen Punkt in das heterogene übergeht, wird hier umgekehrt das heterogene Gemenge durch den dritten Stoff homogen, und geht dabei durch den kritischen Punkt.

Fig. 30 und 31 stellen die Fälle dar, wo an zwei, bez. drei Seiten die eben geschilderten Vorgänge eintreten. In Fig. 31 sind insbesondere drei Flüssigkeiten vorausgesetzt, die drei nur

theilweise mischbare Paare bilden, von denen aber jedes durch den Zusatz des dritten Stoffes homogen gemacht werden kann.

35. Die bisherigen Betrachtungen lehren zwar eine Anzahl

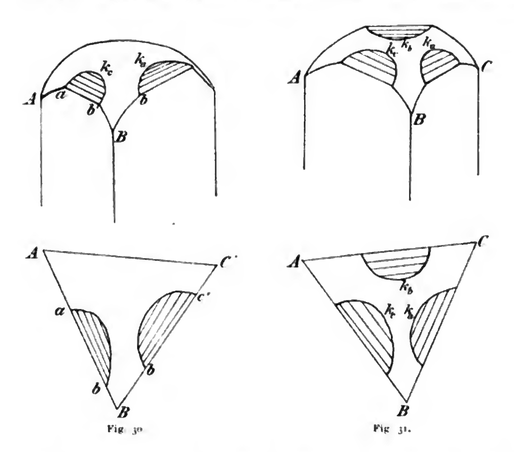


Fig. 30. Fig. 31.

wichtiger Einzelfälle der Abweichungen vom Typus kennen, gewähren aber keine Sicherheit über die Erschöpfung der vorhandenen Möglichkeiten. Eine solche gewinnt man auf folgendem Wege.

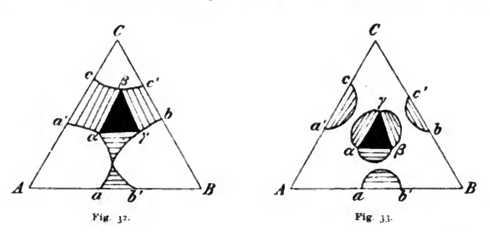


Fig. 32. Fig. 33.

Lässt man die homogenen Felder der Fig. 21 sich ausbreiten, so ist der allgemeinste Fall ihrer gegenseitigen Berührung durch Fig. 32 gegeben, wo diese an irgend einer Stelle zwischen *a* und *α*, bez. einem entsprechenden anderen Begrenzungsstück der ho-

mogenen Gebiete stattfindet. Nimmt man an, dass zwischen allen drei homogenen Feldern solche Berührungen und die entsprechenden Verschmelzungen stattgefunden haben, so ergiebt sich Fig. 33 als der allgemeinste Fall, dem nur noch die Voraussetzung zu Grunde liegt, dass nur eine solche Berührung zwischen jedem Paare homogener Felder eingetreten ist. Diese Voraussetzung erscheint nicht nothwendig, doch wird der Fall mehrfacher Berührung voraussichtlich sehr selten sein, so dass auf seine Erörterung verzichtet werden soll.

Im Falle der Fig. 33 treten sechs kritische Punkte auf. Es erscheint nicht sehr wahrscheinlich, dass man diesen Fall jemals experimentell antreffen wird.

Die in Fig. 26 bis 28 dargestellten Fälle entstehen aus dem allgemeinen, indem die Verschmelzung an einer bis drei Stellen

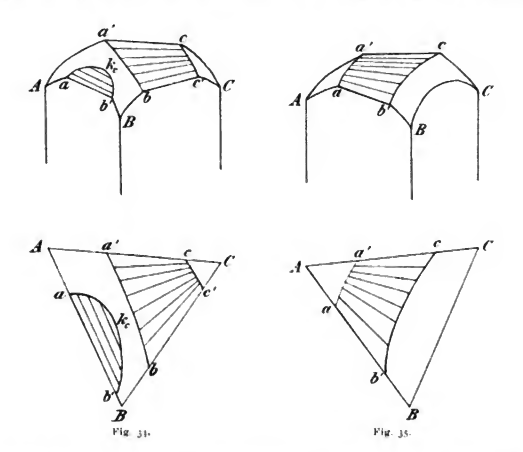


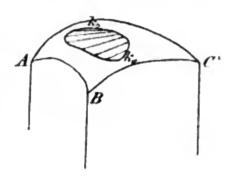
Fig. 34. Fig. 35.

stattgefunden hat. In den genannten Figuren sind die Randfelder alle fortgelassen worden. Da zu Fig. 26 ein, zu 27 zwei und zu 28 drei Fälle zuzufügen sind, je nachdem man die Randfelder ganz oder theilweise bestehen lässt, so erhöht sich die Zahl der unter diese Gruppe fallenden Möglichkeiten auf neun. Da die entsprechenden Dampfdruckflächen aus den in Fig. 26 bis 28

gezeichneten sich ohne weiteres ableiten lassen, sollen sie nicht besonders dargestellt werden.

Diese neun Fälle erschöpfen die Möglichkeiten, für die Voraussetzung, dass ein ternäres Mittelfeld vorhanden ist, dass es also Mischungsverhältnisse geben soll, in denen sich drei Schichten bilden.

36. Fällt das Mittelfeld fort, so liegen zunächst die drei weiteren Fälle vor, die in Figur 29 bis 31 dargestellt sind. Aus 31 kann durch Zusammenfliessen zweier Seitenfelder Fig. 34 entstehen, welche durch Verschwinden des dritten Seitenfeldes in Fig. 35 übergeht. Dadurch endlich, dass die beiden Punktpaare *ab'* und *a'c* über einander fallen, und das Band sich von den Seiten ablöst, entsteht Fig. 36.



Hierdurch ist die Anzahl der möglichen Abweichungen von dem einfachen Typus auf 15 gestiegen, und die Zahl aller Fälle unter Einschluss des Typus auf 16. Soviel ich übersehen kann, ist damit die durch die gemachten Voraussetzungen gebotene Mannigfaltigkeit erschöpft.

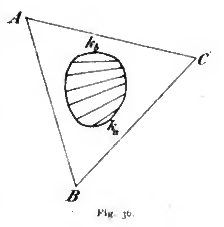


Fig. 36.

37. Für die experimentelle Forschung ist durch die vorstehenden Betrachtungen ein bequem bearbeiteter Boden gewonnen worden. Wie sich die Beobachtung der wirklichen Erscheinungen zu der hier entwickelten allgemeinen Systematik stellen wird, lässt sich bei dem vollständigen Mangel an experimentellen Untersuchungen auf diesem Gebiete zunächst nicht mit Sicherheit sagen. Doch darf bei der Einfachheit und Controlirbarkeit der gemachten Voraussetzungen die Vermuthung ausgesprochen werden, dass zwischen beiden erhebliche Widersprüche nicht zu erwarten sind.

Leipzig, November 1899.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 05840 5997

